Ensemble des nombres réels et sous-ensembles

1) Ensembles de nombres.

a) L'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}=\{0;1;2;...\}$

b) L'ensemble **des entiers relatifs :** $\mathbb{Z}$

Tous les entiers qu'ils soient négatifs, positifs ou nuls, sont des entiers relatifs : $\mathbb{Z}=\{...;-2-1;0;1;2;...\}$

$\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}-\{0\}=\{...;-2-1;1;2;...\}$ ($\mathbb{Z}$ Privé de 0).

c) L'ensemble des décimaux : $\mathbb{D}$

L'ensemble des décimaux est l'ensemble des nombres dits "à virgule" $\mathbb{D}=\left\{a\times 10^{-n}=\frac{a}{10^n}/a\in\mathbb{Z};n\in\mathbb{N}\right\}$

d) L'ensemble des rationnels : $\mathbb{Q}$

Les nombres rationnels sont les fractions de la forme $\frac{a}{b}$: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}/a\in\mathbb{Z};b\in\mathbb{N}^*\right\}$

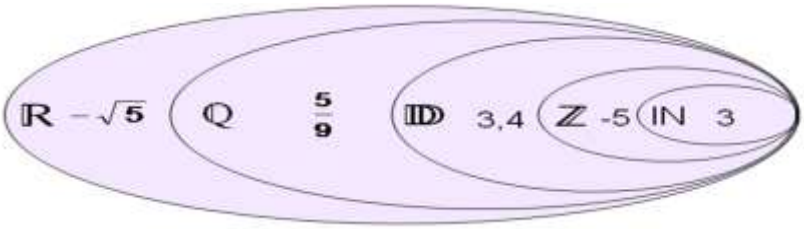
e) L'ensemble des réels : $\mathbb{R}$. Tous les nombres utilisés jusqu'à présent sont des réels.

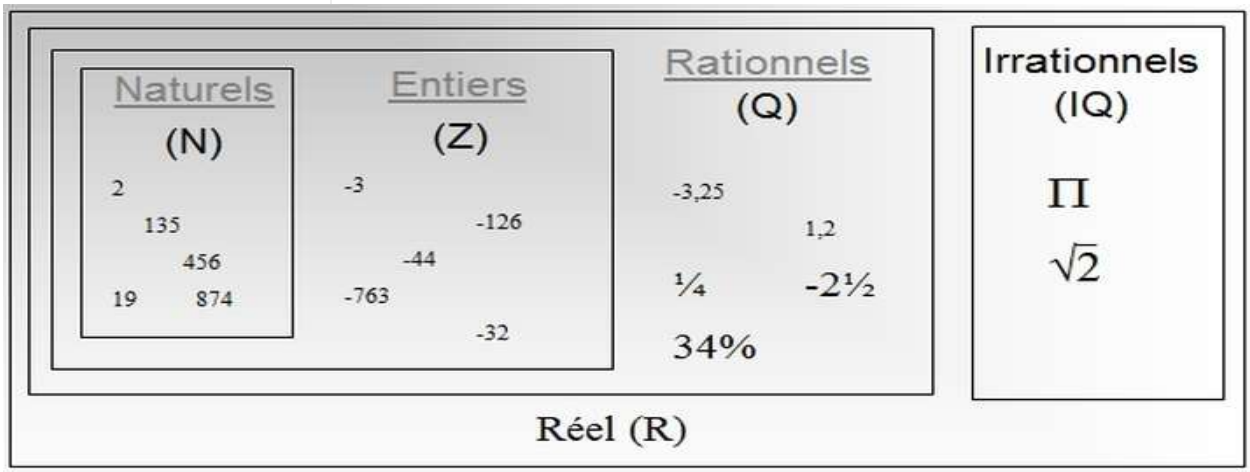
$\mathbb{R}^+$ Désigne l'ensemble des réels positifs (avec zéro).

$\mathbb{R}^-$ Désigne l 'ensemble des réels négatifs (avec zéro) et $\mathbb{R}^*$ est l 'ensemble des réels non nuls

$\mathbb{N}$ *: ensemble des entiers naturels*
$\mathbb{Z}$ *: ensemble des entiers relatifs*
D : ensemble des nombres décimaux
$\mathbb{Q}$ *: ensemble des nombres rationnels*
$\mathbb{R}$ *: ensemble des nombres réels*

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$





Remarque :

a) Pour déterminer les éléments communs à deux ensembles donnés A et B on utilise le symbole $\cap$

Exemple : si : $A=\{-3;4;5;6\}$ et $B=\{3;4;5;8\}$ alors : $A\cap B=\{4;5\}$

b) Pour réunir deux ensembles donnés A et B on utilise le symbole $\cup$

Exemple : si : $A=\{-3;4;5;6\}$ et $B=\{3;4;5;8\}$ alors : $A\cup B==\{-3;3;4;5;6.8\}$

c) L'ensemble vide : $\varnothing$ est l'ensemble qui ne contient aucun élément.

d) On a : $\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-=\mathbb{R}$; $\mathbb{R}^+\cap\mathbb{R}^-=\{0\}$; $\mathbb{R}^{+*}\cap\mathbb{R}^-=\varnothing$

2) Opérations et règles de calcul dans l'ensemble des nombres réels :

Si: $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $d\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{R}$ alors on a : $a+b=b+a$; $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$

$-a$: Est l'opposé de a et $(-a)+a=a+(-a)=0$ et $a+0=0+a=a$ et $a-b=a+(-b)$ et $-(a-b)=-a+b$

$a\times b=b\times a=ab=ba$ et $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$

Si : $a\neq 0; a\times\frac{1}{a}=1$: $\frac{1}{a}$ l'inverse de a et on a : $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

$k(a+b)=ka+kb$ et $k(a-b)=ka-kb$

$(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$

Si $bd\neq 0$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ et $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ et $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ et $k\times\frac{a}{b}=\frac{ak}{b}$ et $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}; bc\neq 0$ et $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$

Si on a : $\begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases}$ alors $a+c=b+d$.

Si $bd\neq 0$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ si et seulement si ad=bc . $\frac{a}{b}=0$ Si et seulement si : $a=0$.

3) Racine carrée : a) a est un nombre **positif**.

La racine carrée de a notée : $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est égal à a

b) Si a et b deux nombres positifs ou nuls alors :

$(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=a$; $(\sqrt{a})^n=\sqrt{a^n}; n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}; b\succ 0$; $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

$a\in\mathbb{R}^+$: $x^2=a$ si et seulement si $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$.

4) Les Puissances :a) $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$

Le produit de n facteurs égaux à a et noté a^n et s'appelle la puissance n^{ième} de a » ; n est appelé exposant

$a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\ldots\times a}_{nfois}$ Cas particulier : $a^1=a; a^0=1$

Et on a : $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ en particulier : pour a $\neq 0$ on a : $a^{-1}=\frac{1}{a}$

$10^n=\underbrace{1000\cdots 0}_{n}; n\in\mathbb{N}$ (n zéros) et $10^{-n}=\underbrace{0,000\cdots 01}_{n}; n\in\mathbb{N}$ (n zéros)

$10^1=10$; $10^{-1}=0,1$; $10^{-2}=0,01$; $10^0=1$

b) Propriétés des puissances : $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$; $m\in\mathbb{N}^*$

$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$ et $a^n\times b^n=(ab)^n$; $(a^n)^m=a^{nm}$; $a^n\times a^m=a^{n+m}$; $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$

4) Écriture scientifique d'un nombre décimal : La notation scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a\times 10^p$ où a est un nombre décimal ($1\leq a\prec 10$) et p un nombre entier relatif.

5) Identités Remarquables : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

5) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ Somme de deux cubes

6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ Cube d'une Somme

7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ Cube d'une différence

Ces formules sont pour développer et pour factoriser

Factoriser c'est écrire sous la forme d'un produit