PROF: ATMANI NAJIB

Controle3 sur les suites

1BAC BIOF

EXERCICE1:

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n - 25}{U_n - 3} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)$; $U_n \neq 5$.
2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)$; $5 \leq U_n \leq 11$.
3) Etudier la monotonie de (U_n).
4) On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = \dfrac{1}{U_n - 5}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite Arithmétique et déterminer sa raison et son premier terme.
   b) Déterminer V_n en fonction de n.
   c) Déterminer U_n en fonction de V_n ، en déduire U_n en fonction de n.
5) On pose : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{U_n - 5}$.

   Calculer S_n en fonction de n.

EXERCICE2:

Soit la suite (U_n) : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{U_n + 4} \end{cases}$

1) Calculer U_2, U_1 .
2) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)$; $1 < U_n < 3$.
3) Etudier la monotonie de (U_n).
4) On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 2}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
   b) Déterminer V_n en fonction de n.
   c) Déterminer U_n en fonction de V_n ، en déduire U_n en fonction de n.
5) On pose : $G_n = \sum_{k=1}^{k=n} V_n$ et $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \dfrac{3}{U_n + 2}$.
   a) Calculer G_n en fonction de n.
   b) Vérifier que : $\dfrac{3}{U_n + 2} = 1 - V_n$.
   c) En déduire S_n en fonction de n.

EXERCICE3:

1) *Soit la suite numérique* (U_n) *définie par :*
   $\begin{cases} U_0 = 3/2 \\ (\forall n \in IN) ; \; U_{n+1} = \dfrac{6U_n - 2}{U_n + 3} \end{cases}$
   a) *Montrer que* $(\forall n \in IN)$; $2 - U_{n+1} = \dfrac{4}{U_n + 3}(2 - U_n)$.
   b) *Montrer par récurrence que* $(\forall n \in IN)$; $1 < U_n < 2$.
2) *En déduire que* (U_n) *est croissante.*
3) *Soit la suite numérique* (V_n) *définie par :* $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 1}$.
   a) *Montrer que* (V_n) *est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.*
   b) *Calculer* V_n *en fonction de n, en déduire* U_n *en fonction de n.*
4) *Calculer* $S_n = \dfrac{4^0}{4^0 + 5^0} + \dfrac{4^1}{4^1 + 5^1} + \dfrac{4^2}{4^2 + 5^2} ..... + \dfrac{4^p}{4^p + 5^p} + ... + \dfrac{4^n}{4^n + 5^n}$,

EXERCICE4:

1) On considère la suite numérique (U_n) définie par :
   $U_0 = 1/2$; $(\forall n \in IN)$; $U_{n+1} = \dfrac{5U_n}{2U_n + 3}$
   a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in IN)$; $0 < U_n < 1$.
   b) Montrer que (U_n) est strictement croissante.
2) On considère la suite (V_n) telle que : $V_n = 1 - \dfrac{1}{U_n}$.
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
   b) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $U_n = \dfrac{1}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n}$
   c) En déduire que $(\forall n \in IN)$; $0 < 1 - U_n < \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$.

EXERCICE5:

On considère la suite (U_n), telle que: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{3 + \sqrt{U_n}} \end{cases}$

1) Montrer par recurrence que $(\forall n \in IN)$; $0 < U_n$.
2) Etudier les variations de la suite (U_n), *en déduire qu'elle est convergente.*
3) Montrer que $(\forall n \in IN)$; $0 < U_{n+1} < \dfrac{2}{3} U_n$
4) *En déduire que* $(\forall n \in IN)$; $0 < U_n < \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
5) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.