Résumé de Cours : PRODUIT SCALAIRE

I. Produit scalaire.

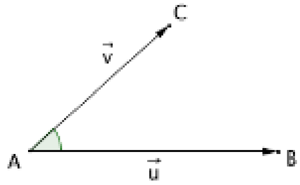
Le produit scalaire est une opération qui associe à deux vecteurs : $\vec{u}$, $\vec{v}$ du plan, un réel (positif ou négatif).

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan :

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté : $\vec{u}.\vec{v}$, le nombre réel définit par :

a) $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul

b) $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$, dans le cas contraire.



$\vec{u}.\vec{v}$ se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

II. Produit scalaire et norme

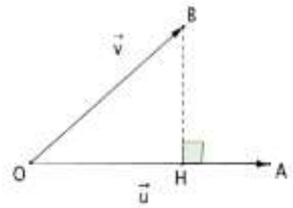
1) Soit un vecteur $\vec{u}$, on a : $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

2) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

On a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

3) Soient A, B et C trois points du plan.

On a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$



4) Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

III. Projection orthogonale

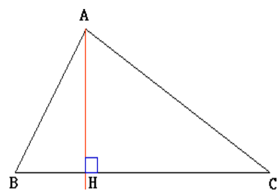
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).

On a : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

IV). APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1) Les relations métriques dans un triangle rectangle.

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et [AH] la hauteur.



Théorème de Pythagore :

Si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$

($BA^2=BH\times BC$ ET $CA^2=CH\times BC$ et $AH^2=HB\times HC$ et $AB\times AC=AH\times BC$

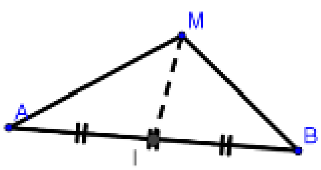
2) Théorème d'Al Kashi : Dans un triangle ABC, on a avec les notations de la figure :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$ Ou $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Ou $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

3) Théorème de la médiane : Soient deux points A et B et I le milieu du segment [AB]

Pour tout point M, on a : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$ Ou $\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4}$



Ou $\overrightarrow{MA}\times\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{IM}\times\overrightarrow{AB}$

4) Surface d'un triangle et formule de sinus

Dans un triangle ABC on a :

1) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$ avec S : Surface du triangle ABC

2) $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$ (formule de sinus)