Exercices avec corrections sur
Le PRODUIT SCALAIRE

Types d'exercices :

Application directe du cours (*) Difficulté moyenne (**) Demande une réflexion (***)

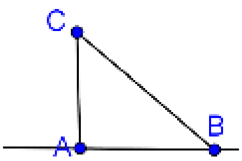
Exercice1 : (**) Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et $AB = 2cm$

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB}$

Solution : On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AA}$

Car : A est le projeté orthogonales de A sur (AB)

et B est le projeté orthogonales de B sur (AB)



et A est le projeté orthogonales de C sur (AB)

Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AA = AB \times 0 = 0$

De même on a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = BA \times BA = 2 \times 2 = 4$

De même on a : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} = -BA \times AB = -2 \times 2 = -4$

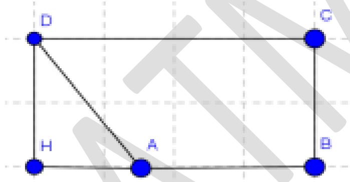
Exercice2 : (**) Soit HBCD un rectangle :

$AB = 3cm$; $AD = 2cm$; $BC = \sqrt{2}cm$.

1) Calculer AH 2) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ 3) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution :1) Calculons AH : le théorème de Pythagore nous permet d'écrire :

$AD^2 = AH^2 + HD^2$



D'où $AH^2 = AD^2 - HD^2 = 4 - 2 = 2$

Donc : $AH = \sqrt{2}cm$

2) Calculons : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AH}\right\|\cos\pi = AB \times AH(-1) = -3\sqrt{2}$

2) Calculons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 = AB^2 = 3^2 = 9$

Exercice3 : (**) Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.

Calculer : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos BAC$

$$= a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Exercice4 : (**) Soit CFG un triangle tels que $CF = 7$ et $CG = 6$ et $FG = 3$

Calculer : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$

Solution : **Rappels : Si** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs :

On a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u} - \vec{v}\right\|^2\right)$

et $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CG}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CF}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CG} - \overrightarrow{CF}\right\|^2\right)$

$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(CG^2 + CF^2 - FG^2\right) = \frac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - 3^2\right) = 38$

Exercice5 : (*) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que : $\left\|\vec{u}\right\| = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ et $\left\|\vec{v}\right\| = 4$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Solution :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

Exercice6 : (**) Soit EFG un triangle tel que : $EF = 5$; $EG = 3$ et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -6$

Calculer : $\cos\left(\widehat{FEG}\right)$

Solution :

$\overrightarrow{EF} \bullet \overrightarrow{EG} = \left\|\overrightarrow{EF}\right\| \times \left\|\overrightarrow{EG}\right\| \cos\left(\widehat{FEG}\right) = -6$

Équivalent à : $EF \times EG \cos\left(\widehat{FEG}\right) = -6$

Équivalent à $5 \times 3\cos\left(\widehat{FEG}\right) = -6$

Equivalent à $\cos\left(\widehat{FEG}\right) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$

Exercice7 : (**) Soit ABC un triangle tels que : $AB = 3$; $AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$

Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solution : On a :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\hat{A} = AB \times AC\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 3\cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12\cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=12\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Car : $\cos(\pi-x)=-\cos x$ Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-6$

Exercice8 : (**) **1)** Soit ABC un triangle tel que $AB=7$ et $AC=5$ et $BC=6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) Calculer AH

2) Sachant que $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=2$ et $\vec{u}.\vec{v}=-\frac{1}{2}$

a)Calculer : $A=(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})$

$B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)$; $C=(\vec{u}-\vec{v})^2$ et $D=(2\vec{u}+3\vec{v})^2$

b) En déduire $E=\|\vec{u}-\vec{v}\|$ et $F=\|2\vec{u}+3\vec{v}\|$

Solution :1) Calcul de $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{BC}\|^2-\|\overrightarrow{BA}\|^2-\|\overrightarrow{AC}\|^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left(BC^2-AB^2-AC^2\right)=\frac{1}{2}\left(6^2-7^2-5^2\right)=-19$

Donc : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=-19$

Donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}=19$

a) Calcul de AH

On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ donc : $AH=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB}=\frac{19}{7}$

2) a)

$A=(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}$

$A=(2\vec{u}-3\vec{v}).(\vec{u}+2\vec{v})=2\vec{u}.\vec{u}+4\vec{u}.\vec{v}-3\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}.\vec{v}$

$A=2.\vec{u}^2+\vec{u}.\vec{v}-6\vec{v}^2=2.\|\vec{u}\|^2+\vec{u}.\vec{v}-6\|\vec{v}\|^2=2\times4^2+\frac{1}{2}-6\times2^2$

$A=32+\frac{1}{2}-24=\frac{17}{2}$

$B=\left(\frac{\vec{u}}{2}-\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\frac{\vec{v}}{2}\right)=\frac{1}{2}\vec{u}.\vec{u}+\frac{1}{4}\vec{u}.\vec{v}-\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\vec{v}.\vec{v}$

$B=\frac{1}{2}\times\|\vec{u}\|^2-\frac{3}{4}\times\vec{u}.\vec{v}-\frac{1}{2}\times\|\vec{v}\|^2=\frac{1}{2}\times4^2-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\times2^2$

$B=8+\frac{3}{8}-2=\frac{51}{8}$.

$C=(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2=4^2-2\left(-\frac{1}{2}\right)+2^2$

$C=16+1+4=21$

$D=(2\vec{u}+3\vec{v})^2=4\vec{u}^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\vec{v}^2=4\|\vec{u}\|^2+12\vec{u}.\vec{v}+9\|\vec{v}\|^2$

$D=4\times4^2+12\left(-\frac{1}{2}\right)+9\times2^2=64-6+36=94$

b) $(\vec{u}-\vec{v})^2=21$ donc $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=94$

Par suite : $\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{21}$

$(2\vec{u}+3\vec{v})^2=94$ Donc $\|2\vec{u}+3\vec{v}\|^2=94$

Par suite : $\|2\vec{u}+3\vec{v}\|=\sqrt{94}$

Exercice9 : (**) Soit un carré ABCD c

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=$

Exercice10: (***) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A Sur la droite (BC). Montrer que :

1) $AB^2+AC^2=BC^2$

2) $AC\times AB=AH\times BC$

Solution :1)

$BC^2=\overrightarrow{BC}^2=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})^2=\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$

On a : $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{AC}$ car ABC un triangle rectangle en A

Donc : $BC^2=BA^2+AC^2$

2) On considère le triangle : (ABC)

Donc : $\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}$

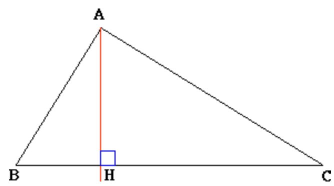
Et on considère le triangle: (ABH) donc : $\sin\hat{B}=\frac{AH}{AB}$

Donc : $\frac{AC}{BC}=\frac{AH}{AB}$ c'est-à-dire: $AC\times AB=AH\times BC$

Exercice11 : (**) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et

$AH=2cm$ et $ABC=\frac{\pi}{3}$

Calculer AB et BH et BC



Solution :

a)On à : ABH un triangle rectangle en H

Donc : $\sin(ABC)=\frac{AH}{AB}$

Par suite :

$$AB=\frac{AH}{\sin\left(ABC\right)}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

b) On a : $AB^2=AH^2+HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

Donc: $AB^2-AH^2=HB^2$

Donc: $\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2-2^2=HB^2$

Donc: $\frac{16}{3}-2^2=HB^2$ c'est-à-dire: $HB^2=\frac{4}{3}$

C'est-à-dire : $HB=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

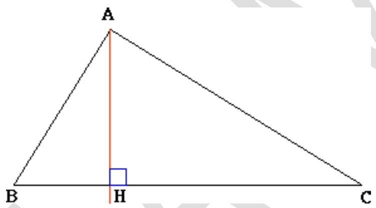
c)On a : $BA^2=BH\times BC$ c'est-à-dire: $BC=\frac{BA^2}{BH}$

Donc: $BC=\frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=\frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$

Exercice12: (**) Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et $BC=5cm$ et $CH=3cm$

Calculer $\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2$

Solution :



$$\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2=\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{AB}$$

$$\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2=CB^2+AB^2+2CB\times AB$$

Or : $AB^2=BH\times BC=2\times5=10$

Et $\overrightarrow{CB}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}\bullet\overrightarrow{BH}=BC\times BH=5\times2=10$

Par suite : $\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AB}\right)^2=25+10+2\times10=55$

Exercice13 : (**) Soit ABC un triangle tel que : $AB=5$ et $AC=8$ et $A=\frac{2\pi}{3}$

Calculer BC et $\cos C$

Solution : a) D'après le Théorème d'Al Kashi

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

$$BC^2=5^2+8^2-2\times5\times8\cos\frac{2\pi}{3}=25+64-80\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$

Donc $BC^2=25+64+40=129$

Car : $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

Par suite : $BC=\sqrt{129}$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$AB^2=AC^2+BC^2-2CA\times CB\cos C$$

C'est-à-dire : $2CA\times CB\cos C=AC^2+BC^2-AB^2$

Donc $\cos C=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2CA\times CB}$

Donc : $\cos C=\frac{64+129-25}{2\times8\times\sqrt{129}}=\frac{168}{16\sqrt{129}}=\frac{21\sqrt{129}}{258}$

Exercice14 : (*) Soit ABC un triangle tel que :

$BC=4cm$; $AC=6cm$ et $AB=3cm$

Et I le milieu du segment $\left[BC\right]$

Calculer : AI

Solution : D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABC on a :

$$AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $3^2+6^2=2AI^2+\frac{1}{2}4^2$ donc : $9+36=2AI^2+\frac{16}{2}$

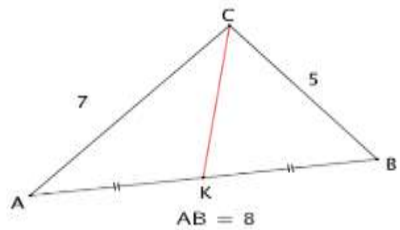
Donc : $AI^2=\frac{37}{2}$ par suite : $AI=\sqrt{\frac{37}{2}}$

Exercice15: (*) Soit ABC un triangle tel que :

$BC=5$; $AC=7$

et $AB=8$ et K le milieu du segment [AB].

Calculer CK.



Solution : D'après le théorème de la médiane

On a : $CA^2+CB^2=2CK^2+\frac{AB^2}{2}$

Donc : $CK^2=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-\frac{AB^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(7^2+5^2-\frac{8^2}{2}\right)=21$

Donc : $CK=\sqrt{21}$.

Exercice16 : (*) Soit ABM un triangle tel que :

$AM=3cm$ et $BM=4cm$ et $AB=4cm$

I le milieu du segment [AB]

J le milieu de $\left[AM\right]$

Et K le milieu du segment $\left[BM\right]$

Calculer : MI et AK et BJ

Solution : 1) Calcul de MI :

D'après le théorème de la médiane dans ABM

On a : $MA^2+MB^2=2MI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc : $3^2+4^2=2MI^2+\frac{1}{2}4^2$

Donc : $9+16=2MI^2+\frac{16}{2}$

Donc : $MI^2=\frac{17}{2}$ c'est-à-dire : $MI=\sqrt{\frac{17}{2}}$

Calcul de AK :

D'après le théorème de la médiane dans ABM

On a : $AB^2+AM^2=2AK^2+\frac{1}{2}BM^2$

Donc : $2^2+3^2=2AK^2+\frac{1}{2}4^2$

Donc : $AK^2=\frac{17}{2}$ et par suite : $AK=\sqrt{\frac{17}{2}}$

Calcul de BJ

D'après le théorème de la médiane dans ABM

On a : $AB^2+BM^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AM^2$

Donc : $4^2+4^2=2BJ^2+\frac{1}{2}3^2$ c'est à dire : $\frac{55}{2}=2BJ^2$

Donc : $BJ^2=\frac{55}{4}$ par suite : $BJ=\frac{\sqrt{55}}{2}$

Exercice17 : (***) Soit $ABCD$ un quadrilatère

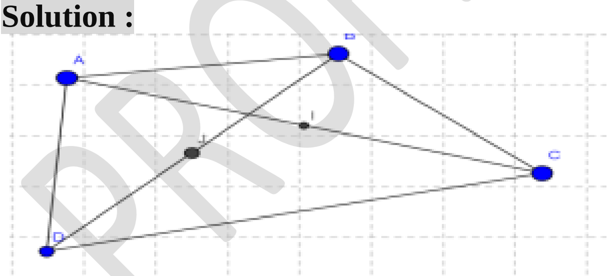
Le point I le milieu de la diagonale [AC] et J le milieu de la diagonale [BD].

1) Montrer que :

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

2) Que remarquez-vous si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle

Solution :



1) Montrons que : $4IJ^2=2BI^2+2DI^2-BD^2$?

Appliquons le théorème de la médiane au triangle

ABC : $AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2 \quad (1)$

Appliquons aussi le théorème de la médiane au triangle ADC : $AD^2+CD^2=2DI^2+\frac{1}{2}AC^2 \quad (2)$

Appliquons aussi le théorème de la médiane au triangle IBD : $IB^2+ID^2=2IJ^2+\frac{1}{2}BD^2 \quad (3)$

Faisons la somme : $(1)+(2)$ ce qui donne :

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2BI^2+2DI^2+AC^2$

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(BI^2+DI^2\right)+AC^2$

Or d'après (3) on a : $IB^2+ID^2=2IJ^2+\frac{1}{2}BD^2$

Donc : $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2\left(2IJ^2+\frac{1}{2}BD^2\right)+AC^2$

Donc : $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=4IJ^2+BD^2+AC^2$

2) Si le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle alors nous aurons : $IJ=0$ car $I=J$

Par conséquent : $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=BD^2+AC^2$

C'est le théorème de Pythagore appliqué au rectangle

Exercice18 : (**) Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que et $EF=3$ et $EH=5$ et $FEH=\frac{3\pi}{4}$

Calculer la surface du triangle EFH et la surface du parallélogramme $EFGH$.

Solution : a)

$S_{EFH}=\frac{1}{2}EF\times EH\sin E=\frac{1}{2}3\times5\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{15}{2}\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$S_{EFH}=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{4}\sqrt{2}$.

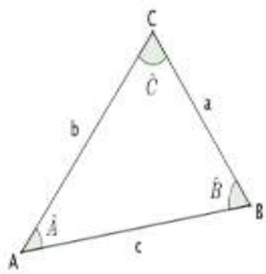
b) $S_{EFGH}=2\times S_{EFH}=2\times\frac{15}{4}\sqrt{2}=\frac{15}{2}\sqrt{2}$

Exercice19 : (**) Soit ABC un triangle tel que :

$a=BC=6$ et $A=30°$ et $B=73°$

Calculer b et c

Solution : D'après la formule de sinus on a :



$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2\times S}{abc}$

$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin 30°}{6}=\frac{1}{12}$

Donc : $\frac{\sin 73°}{b}=\frac{1}{12}$

Par suite : $b=12\sin 73°=11.47$.

$\frac{\sin 77°}{c}=\frac{1}{12}$ Donc $c=12\sin 77°=11.69$

Exercice20: (***)

Soit ABC un triangle tel que : $AB=1$

Et $AC=\sqrt{2}$ et $CB=2$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$

2) Ecrire $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) Calculer $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle ABD

4) Calculer : AD

5) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$ Calculer : AI et BJ

Solution : 1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Et on a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|\times\|\overrightarrow{AC}\|\times\cos\hat{A}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $2^2=1^2+\sqrt{2}^2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $4=1+2-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ donc : $1=-2\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}$

Déduction de $\cos A$:

On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $-\frac{1}{2}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$

Donc : $-\frac{1}{2}=1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}$

Donc : $\cos\hat{A}=\frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Si et seulement si : $\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

C'est-à-dire: $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AD}$ donc : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(AB^2+2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(1+2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=0$

Donc : $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ par suite : $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$

Et donc : ABD est un triangle rectangle en A

4) On a : $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)\right)^2$

Donc : $AD^2=\frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB}^2+\left(2\overrightarrow{AC}\right)^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $AD^2=\frac{1}{9}\left(AB^2+4AC^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)$

$AD^2=\frac{1}{9}\left(1+4\left(-\frac{1}{2}\right)+4\times2\right)=\frac{1}{9}(1-2+8)=\frac{7}{9}$

Donc : $AD=\sqrt{\frac{7}{9}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

5) a)D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc $1^2+\sqrt{2}^2=2AI^2+\frac{1}{2}2^2$

Signifie que : $3=2AI^2+2$ ssi $1=2AI^2$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $AI=\sqrt{\frac{1}{2}}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $BA^2+BC^2=2BJ^2+\frac{1}{2}AC^2$

Donc : $1^2+2^2=2BJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{2}^2$

C'est-à-dire : $5=2BJ^2+1$.

Signifie que : $BJ^2=2$ et par suite : $BJ=\sqrt{2}$

<u>**Exercice21**</u>: (***) Soit ABC un triangle tel que et $AB=3$ et $BC=4\sqrt{3}$ et $ABC=\frac{\pi}{6}$

I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer AC .

2) Montrer que $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

3) Montrer que $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4) Calculer : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle AIB

Solution : 1) Calculons AC

D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\times BC\cos ABC$

$AC^2=9+48-24\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $AC^2=21$

Par suite : $AC=\sqrt{21}$.

b) Montrons que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos ABC=3\times4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$

3) Montrons que : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Nous avons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}$

Puisque I est le milieu du segment $[BC]$

Nous obtenons : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

4) Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=9-\frac{1}{2}\times 18=0$

On a : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ Nous en déduisons que la droite (AI) est perpendiculaire à la droite (AB)

Et par conséquent le triangle AIB est rectangle en A

Exercice22 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=2\sqrt{3}$ et $AC=1$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$

1) Déterminer une mesure de l'angle BAC .

2) Soit I le milieu du segment $[BC]$.

a) Calculer BC b) En déduire la distance AI

Solution :

1) Déterminons une mesure de l'angle BAC

On a : $\cos BAC=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}$

Donc : $\cos BAC=\dfrac{-3}{2\sqrt{3}\times 1}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\cos BAC=-\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

Donc: une mesure de l'angle BAC est :

$\frac{5\pi}{6}$ rad ou 150°

2) I le milieu du segment $[BC]$

a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2=12+1+6=19$ par suite : $BC=\sqrt{19}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(12+1-\frac{19}{2}\right)=\frac{7}{4}$

Par suite : $AI=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice23: (***) Soit ABC un triangle tel que : AB = $\sqrt{7}$ et AC= 2 et BC= 3

I le milieu du segment $[BC]$

1) a) Calculer : $\cos(B\hat{A}C)$

b) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1$

c) Calculer AI

2) Soit M un point tel que : $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

c) Que peut-on déduire des droites : (MB) et (AC) ?

Solution : 1)a) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $9=4+7-4\sqrt{7}\cos(A)$

Donc : $-2=-4\sqrt{7}\cos(A)$

Donc : $\cos(A)=\dfrac{2}{4\sqrt{7}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2\left(\sqrt{7}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$

1)b) On a $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\hat{A}$.

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{7}}{14}=2\times\dfrac{\left(\sqrt{7}\right)^2}{14}=\dfrac{14}{14}=1$

1)c) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Par suite : $\sqrt{7}^2+2^2=2AI^2+\frac{1}{2}3^2$

Donc : $11=2AI^2+\frac{9}{2}$ c'est-à-dire : $AI^2=\frac{13}{4}$

Par suite : $AI=\sqrt{\frac{13}{4}}$

2)a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}AC^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times 4=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$

2) b) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+1=0$

2) b) Donc : $\overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MB)\perp(AC)$

Exercice24 : (***) Soit ABC un triangle tel que $AB=1$ Et $BC=AC=\sqrt{2}$

I Le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que : $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

1) Calculer CI
2) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
3) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$
4) En déduire que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$

Et en déduire $\cos BAC$.

5) Calculer : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du triangle BAD
6) Soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$
a) Calculer $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$
b) Montrer que $(MD)\perp(AC)$

Solution :1) a)D'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $BC^2+AC^2=2CI^2+\frac{1}{2}AB^2$

Donc : $4=2CI^2+\frac{1}{2}$ c'est-à-dire : $\frac{7}{4}=CI^2$

Donc : $CI=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

2) $\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $-\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}$

On a : I le milieu du segment $[AB]$ et ABC isocèle en C donc : $(IC)\perp(AB)$ c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IC}=0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$

4)

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{AI}\right\|\cos 0=AB\cdot AI\cdot 1=AB\cdot\frac{AB}{2}\cdot\cos 0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Calcul de $\cos BAC$: On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}$

Donc : $AB\times AC\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

Signifie que : $1\times\sqrt{2}\times\cos\hat{A}=\frac{1}{2}$

C'est-à-dire : $\cos\hat{A}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ donc : $\cos\hat{A}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

5) On a : $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

Signifie que : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$

Donc: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}^2$

$$=2\times\frac{1}{2}-AB^2=1-1=0$$

Donc : $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

6)a) $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ ssi $-3\overrightarrow{MA}+7\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Signifie que : $-3\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{MA}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Signifie que : $3\overrightarrow{AM}-7\overrightarrow{AM}+7\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $-4\overrightarrow{AM}=-7\overrightarrow{AC}$ ssi $\overrightarrow{AM}=\frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$

Calcul de : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$???

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times 2-\frac{1}{2}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

6) $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}==-\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{2}$$

$$=-\frac{7}{4}\cdot 2+\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=0$$

$\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ donc : $\overrightarrow{MD}\perp\overrightarrow{AC}$ par suite : $(MD)\perp(AC)$

Exercice25 : (***) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que et $AB=5$ et $BC=6$

Soit I le milieu du segment $[BC]$

1) Calculer $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$
2) Soit K la projection orthogonal du point C sur la droite (AB)

Calculer : BK

Solution : 1) a)Calculons $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}$:

1*iére méthode :* I le milieu du segment $[BC]$ et ABC un triangle isocèle en A

Cela équivaut à dire que (AI) est une hauteur du triangle ABC donc : $(AI)\perp(BC)$

Par suite $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

2*iére méthode :*

$$\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}\cdot 2\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$$

Et D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle AIC on a : $AC^2=AI^2+IC^2-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}$

Donc : $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $-2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IC}=-\left(AI^2+IC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-\left(AI^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2-AC^2\right)$

Et D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Par suite : $AI^2=\frac{1}{2}\left(25+25-\frac{36}{2}\right)=16$

Par suite : $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BC}=-(16+9-25)=0$

b) Calculons $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$:
D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a : $AC^2=BA^2+BC^2-2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(BA^2+BC^2-AC^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\left(25+36-25^2\right)=18$

c) Calculons $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}$: On sait que : $\overrightarrow{IC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Car I le milieu du segment $[BC]$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AC}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

Et on a : $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(CA^2+CB^2-AB^2\right)$

Donc : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IC}=\frac{1}{4}\left(25+36-25^2\right)=9$

2) On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=18$ et puisque K est la projection orthogonal du point C sur la droite (AB)

Alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}$ donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BA}=18$

Donc : $BK\times BA=18$ par suite : $BK=\frac{18}{BA}=\frac{18}{5}$.

Exercice26 : (**) Soit ABC un triangle tel que et $AB=2\sqrt{2}$ et $AC=3$ et $BAC=\frac{\pi}{4}$

1) a)Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
b) En déduire la distance BC
2) Soit I le milieu du segment $[BC]$
Calculer la distance AI
3) Soit J le milieu du segment $[AB]$
Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$
4) Soit K tel que $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$
Montrer que les droites :(IJ) et (BK) sont perpendiculaires

Solution : 1) a)Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$:
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$

b) Déduction de la distance BC ?
D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a : $BC^2=AB^2+AC^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc $BC^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2+3^2-2\times 6=8+9-12=5$

Par suite : $BC=\sqrt{5}$.
2) Calculons la distance AI : On a I le milieu du segment $[BC]$ d'après le théorème de la médiane dans ABC on a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{BC^2}{2}$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(8+9-\frac{5}{2}\right)=\frac{29}{4}$

Par suite : $AI=\frac{\sqrt{29}}{2}$

3) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}$

On a : J le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2=\frac{1}{2}AB^2=\frac{1}{2}8=4$

4) On a : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}\right)\cdot\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{IJ}$

Et puisque : I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AB]$ Alors : $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\left(-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=\frac{6}{2}-\frac{9}{3}=3-3+0$

Et puisque : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{IJ}=0$ alors les droites : (IJ)

Et (BK) sont perpendiculaires.

Exercice27: (***) Soit ABC un triangle tel que : $AB=6$ et $AC=5$ et $BC=7$

1) Calculer $\cos BAC$.

2) a)Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$

3) Soit K la projection orthogonal du point A sur la droite (BC).

Calculer : BK

Solution : 1) Calculons $\cos BAC$?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans le triangle ABC on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\times AC\times\cos BAC$

Donc : $\cos BAC = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\times AC}$.

Donc : $\cos BAC = \dfrac{36+25-49}{60} = \dfrac{1}{5}$.

2) a) Calculons $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos BAC$

Donc : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 6\times5\times\dfrac{1}{5}=6$

b) Déduction que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$?

On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA^2-6=36-6=30$

3) Calculons : BK

On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=30$ et puisque K est la projection orthogonal du point A sur la droite (BC)

Alors : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{BC}=30$

Donc : $BK\times BC=30$ par suite : $BK=\dfrac{30}{BC}=\dfrac{30}{7}$

Exercice28 : (***) Soit ABC un triangle isocèle et rectangle en B tel que $AB=\sqrt{2}$

On construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle équilatérale ABD (voir schéma)

1) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$

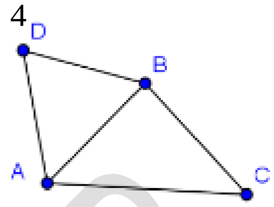
2) Calculer : AC et DC

3) Montrer que : $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) Vérifier que : $DAC=\dfrac{7\pi}{12}$

5) En déduire : $\cos\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Solution : 1)



$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos A\hat{B}D=AB\cdot BD\cdot\cos\dfrac{\pi}{3}=\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BD}\right\|\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\left(\sqrt{2}\right)^2\times-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$

• D'après Pythagore on a : $AC^2=BC^2+AB^2$

Donc : $AC^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2$ c'est-à-dire : $AC^2=4$

Donc : $AC=2$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans BCD on a :

$DC^2=BC^2+BD^2-2BC\times BD\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=2+2-2\times2\times-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Donc : $DC^2=4+4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4+4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4+2\sqrt{3}$

Par suite : $DC=\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

• D'après le Théorème d'Al Kashi dans ACD on a :

$DC^2=AC^2+AD^2-2AC\times AD\cos(\alpha)$

$DC^2=AC^2+AD^2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

$\left(\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)^2=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $4+2\sqrt{3}=4+2-2\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}$

Signifie que : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

4) $DAC=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{12}$

On a : $\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AD}=1-\sqrt{3}$

Donc : $AC\times AD\times\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $2\times\sqrt{2}\times\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=1-\sqrt{3}$

Donc : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{2}}=\dfrac{\left(1-\sqrt{3}\right)\times\sqrt{2}}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice29 : (**) Soit ABC un triangle isocèle en A tel que : $\cos(B\hat{A}C)=\dfrac{1}{4}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$.

I un point tel que : $\overrightarrow{BI}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

1) Construire une figure.
2) Montrer que : $AB=8$ et calculer BC.
3) Calculer : $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}$
4) Montrer que : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=48$
5) Calculer : AJ

Solution :1)

2) On a : $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=16$

Donc : $AB\times AB\times\cos\hat{A}=16$

Donc : $AB^2\times\frac{1}{4}=16$

Donc : $AB^2=64$ c'est-à-dire : $AB=8$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$

Donc : $BC^2=64+64-2\times64\times\frac{1}{4}$

Donc : $BC^2=96$ c'est-à-dire : $BC=\sqrt{96}$

3)
$\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}BA^2=\frac{3}{4}\times64=48$

4) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{EI}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BI}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BA}=48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AJ^2+\frac{1}{2}BC^2$

Donc : $8^2+8^2=2AJ^2+\frac{1}{2}\sqrt{96}^2$

Donc : $128=2AJ^2+48$ c'est-à-dire : $40=AJ^2$

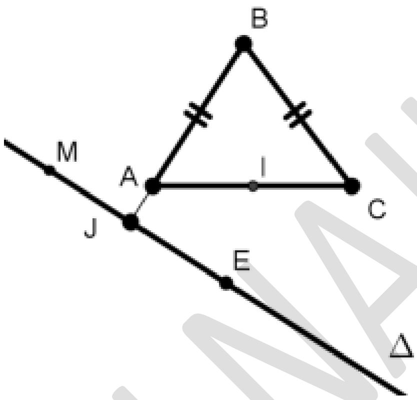
Donc : $AJ=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

__Exercice30__ : (**) Soit ABC un triangle isocèle en B tel que : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$ et $\cos(A\hat{B}C)=\frac{1}{3}$ et J un point tel que : $\overrightarrow{BJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$ et soit la droite (Δ) qui passe par J et perpendiculaire à la droite (AB) et soit E un point tel que : $E\in(\Delta)$

Et soit $M\in(\Delta)$

1) Montrer que : $AB=6$ et calculer AC
2) Calculer : $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}$
3) Montrer que : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=45$
4) Calculer : BI

Solution :



1) On a : $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=12$

Donc : $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\times\cos\hat{B}=12$

Donc : $BA\times BC\times\cos\hat{B}=12$

C'est-à-dire : $AB^2\times\frac{1}{3}=12$

Donc : $AB^2=36$ c'est-à-dire : $AB=6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

On a : $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\cos B$

Donc : $AC^2=36+36-2\times36\times\frac{1}{3}$

Donc : $AC^2=54$ c'est-à-dire : $AC=\sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}=\frac{5}{4}\overrightarrow{BA}^2=\frac{5}{4}BA^2=\frac{5}{4}\times36=45$

4) $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ car $\overrightarrow{MJ}\perp\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{JB}\cdot\overrightarrow{AB}=\left(-\overrightarrow{BJ}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{BA}\right)=\overrightarrow{BJ}\cdot\overrightarrow{BA}=45$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+BC^2=2BI^2+\frac{1}{2}AC^2$

Donc : $6^2+6^2=2BI^2+\frac{1}{2}\sqrt{54}^2$

Donc : $72=2BI^2+27$ c'est-à-dire : $BI^2=\frac{45}{2}$

Par suite : $BI=\sqrt{\frac{45}{2}}$

__Exercice31__ : (***) Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : $AB = AD$ et $CD = CB$

1) Montrer que : les deux droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduire que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

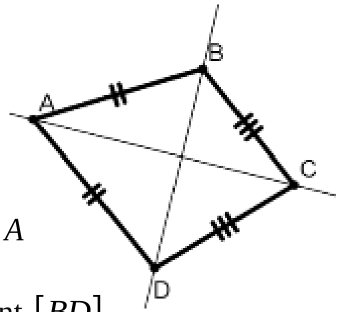
3) Nous prenons dans cette question :

$AB = AD = 3cm$ et $\left(\overline{BAD}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

a)Calculer : BD

b) En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Solution : 1)



1) Montrons que : $(AC) \perp (BD)$?

Puisque : $AB = AD$ et $CD = CB$ alors les points A et C appartiennent à la médiatrice (AC) du segment $[BD]$

Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires

2) En déduisons que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}$

Or $(AC) \perp (BD)$ donc : $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Par suite : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$

3) a)Calculons : BD ?

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos BAD$

Donc : $BD^2 = 18 - 18\cos\frac{\pi}{4} = 9\left(2 - \sqrt{2}\right)$

D'où : $BD = \sqrt{9\left(2-\sqrt{2}\right)} = 3\sqrt{2-\sqrt{2}}$

b) En déduisons $\sin\frac{\pi}{8}$: soit I le point d'intersection des deux diagonales $[BD]$ et $[AC]$

Nous avons ABD est un triangle isocèle et (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$

Donc : (AC) est la bissectrice de l'angle BAD

Donc : $\left(\overline{BAI}\right) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$

D'autre part : le triangle ABI est rectangle en I

Donc : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{BI}{AB} = \frac{\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2-\sqrt{2}}}{3} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Exercice32 : (***) Soit $ABCD$ un carré de centre I et a la longueur de son côté ; on construit à l'extérieur un triangle équilatérale BCE (Voir figure)

1) Soit J le milieu du segment $[AD]$ et K le milieu du segment $[BC]$

Calculer $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IC}$ en fonction de a

2) a)Montrer que : $\overrightarrow{IB} \bullet \overrightarrow{IE} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

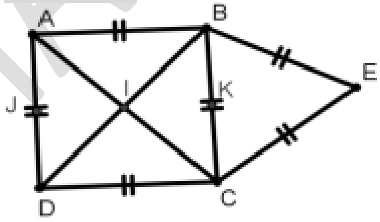
b) En déduire que : $\overrightarrow{BI} \bullet \overrightarrow{BE} = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) En utilisant les résultats de la question

Montrer que $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Et en déduire: $\sin\frac{7\pi}{12}$ et $\tan\frac{7\pi}{12}$

Solution :



1) Calcul de $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IC}$ en fonction de a

On a : $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ} \bullet \left(\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{KC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{KC}$

Et puisque : $(IJ) \perp (KC)$ alors : $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{KC} = 0$

Et puisque : I le milieu de $[JK]$ alors : $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IJ} \bullet \left(-\overrightarrow{IJ}\right) = -\overrightarrow{IJ}^2 = -IJ^2$

Donc : $\overrightarrow{IJ} \bullet \overrightarrow{IC} = -\frac{a^2}{4}$ car $IJ = \frac{a}{2}$

2) a)Montrons que : $\overrightarrow{IB} \bullet \overrightarrow{IE} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

• Montrons d'abord que les points : I ; K et E sont alignés ?

On a : $EC = EB$ et $IC = IB$ car $ABCD$ un carré

Et on a: $KC = KB$ car K le milieu du segment $[BC]$

Donc : les points : I ; K et E appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$

Donc : I ; K et E sont alignés

• On a : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\left(\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KB}\right)\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Et puisque : $(KB)\perp(IE)$ alors : $\overrightarrow{KB}\bullet\overrightarrow{IE}=0$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{IK}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos\left(\overrightarrow{IK};\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=IK\times IE\cos(0)=IK\times IE$

Car $\cos(0)=1$ Or on a : $IK=\dfrac{a}{2}$

et $IE=IK+KE=IK+\sqrt{CE^2-CK^2}$

Donc : $IE=\dfrac{a}{2}+\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}a$

Donc : $\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a\times a=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^2$

b) Déduction que : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BI}\bullet\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IE}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=BI^2+\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE}=BI^2+\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=BI^2-\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=KI^2+KB^2-\overrightarrow{IB}\bullet\overrightarrow{IE}$ car $BI^2=KI^2+KB^2$ (le triangle IKB est rectangle en K)

($KI=KB=\dfrac{a}{2}$)

Donc : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=2\left(\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)}{4}a^2\quad\dfrac{a}{2}$

Par suite : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

3) Montrons que : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

On a : $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=BI\times BE\cos\left(IBE\right)$

Donc : $\cos\left(IBE\right)=\dfrac{\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}}{BI\times BE}$

Et on a : $IBE=IBC+CBE=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{7\pi}{12}$

Et on a $BI=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ et $BE=a$ et $\overrightarrow{BI}\bullet\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2$

Donc : $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)=\dfrac{\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\right)a^2}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2}=\dfrac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Déduction de : $\sin\dfrac{7\pi}{12}$?

On a : $\sin^2\dfrac{7\pi}{12}+\cos^2\dfrac{7\pi}{12}=1$ donc :

$\sin^2\dfrac{7\pi}{12}=1-\cos^2\dfrac{7\pi}{12}=1-\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\dfrac{8-2\sqrt{12}}{16}=\dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$

Donc : $\sin^2\dfrac{7\pi}{12}=\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Par suite : $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\sin\dfrac{7\pi}{12}=-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or : $0\prec\dfrac{7\pi}{12}\prec\pi$ donc : $\sin\dfrac{7\pi}{12}\geq 0$

Par suite : $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

calcul de : $\tan\dfrac{7\pi}{12}$?

$\tan\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\sin\dfrac{7\pi}{12}}{\cos\dfrac{7\pi}{12}}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2}{\sqrt{2}^2-\sqrt{6}^2}=\dfrac{8+2\sqrt{12}}{-4}=-2-\sqrt{3}$

Exercice33 : (***) Soient A et B deux points distincts du plan .Déterminer l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que : $\dfrac{MA}{MB}=1$

Solution : Soit M un point du plan

$M\in(\Delta)$ Équivaut à : $\dfrac{MA}{MB}=1$

Équivaut à : $MA=MB$

Équivaut à dire que : (Δ) est la médiatrice du segment $[AB]$

Par conséquent : l'ensemble (Δ) des points M du plan tel que: $\dfrac{MA}{MB}=1$ est la médiatrice du Segment $[AB]$.

Exercice34 : (***) Soient A et B deux points distincts du plan tel que : $AB=4$

1) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AM}\bullet\overrightarrow{BM}=0$.

2) Déterminer et représenter l'ensemble (F) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$.

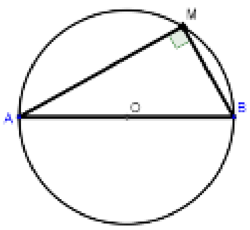
Solution : soit M un point du plan

1) $M\in(E)$ Équivaut à : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

Équivaut à : $(AM)\perp(BM)$

Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

Par conséquent : l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$



2) $M\in(F)$ Équivaut à :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{9}{4}$

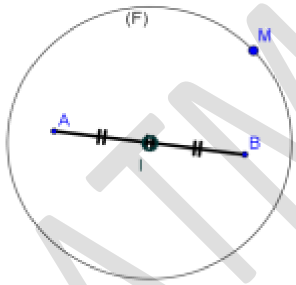
Soit I le milieu du segment $[AB]$

Donc D'après le théorème de la médiane dans MAB on a :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

C'est-à-dire :

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{16}{4}$



$M\in(F)$ Équivaut à :

$MI^2-\frac{16}{4}=\frac{9}{4}$

Équivaut à : $MI^2=\frac{9}{4}+\frac{16}{4}=\frac{25}{4}$

Équivaut à : $MI=\frac{5}{2}$

Par conséquent : l'ensemble (F) des points M du plan est le cercle de centre I et de rayon $R=\frac{5}{2}$

Exercice35: (***) Soient A et B deux points distincts du plan. I et J deux point tels que :

$\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$

1) Représenter les points I et J

2) Montrer que pour tout point M du plan on a :

$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MJ}$

3) Déterminer et représenter l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=2$

Solution : 1) Représentation des points I et J (voir la figure)

• $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ équivaut à : $\overrightarrow{IA}-3\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $-2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

• $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$ équivaut à : $\overrightarrow{JA}+3\left(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $4\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{AJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

2)

• Montrons que pour tout point M du plan on a :

$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=-2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{MI}$

Car $\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan

• Montrons que pour tout point M du plan on a :

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MJ}$

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+3\left(\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JB}\right)=4\overrightarrow{MJ}+\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=4\overrightarrow{MJ}$

Car $\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MJ}$ pour tout point M du plan

3) Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$?

$M\in(E)$ Équivaut à : $\frac{MA}{MB}=3$

Équivaut à : $MA=3MB$

Équivaut à : $MA^2-9MB^2=0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

Équivaut à : $\left(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)=0$

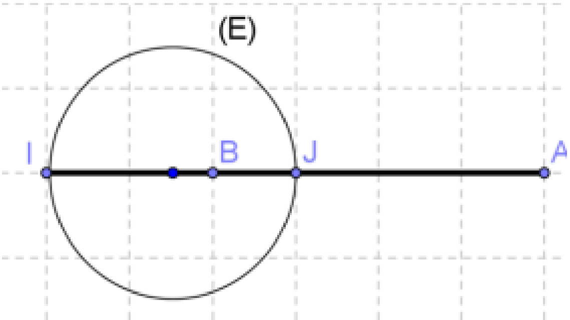
Équivaut à : $-2\overrightarrow{MI}\cdot4\overrightarrow{MJ}=0$

Équivaut à : $-8\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$ Équivaut à :

$(MI)\perp(MJ)$

Équivaut à dire que : le point M appartient au cercle de diamètre $[IJ]$



Exercice36 : (***) Soit $ABCD$ un parallélogramme et O le milieu du segment $[AB]$ et tel que :

$AD = 4$ et $CD = 6$ et $BAC = \frac{\pi}{3}$

1) Calculer : BD et AC

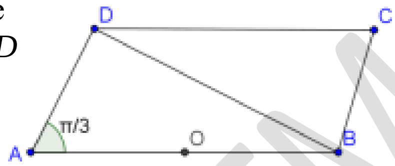
2) Montrer que : pour tout point M du plan on a :

$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2$

3) En déduire que : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 24$

Solution : 1) Calcul de : BD

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABD nous obtenons :



$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos BAD$

$BD^2 = 36 + 16 - 2 \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 28$ car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

D'où : $BD = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Calcul de : AC

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ADC nous obtenons : $AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2DA \times DC \cos ADC$

$AC^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 76$ car :

$\cos ADC = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

D'où : $AC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

2) Montrons que : pour tout point M du plan

On a : $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2$

Puisque O le milieu du segment $[AB]$ donc : D'après le théorème de la médiane dans MAB on a :

$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2$

3) Déterminons l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 24$

On a : $MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2$

Donc : $MA^2 + MB^2 = 24$

Equivaut à : $2MO^2 + \frac{1}{2}AB^2 = 24$

Equivaut à : $2MO^2 = 24 - \frac{1}{2} \times AB^2 = 6$

Car $AB = CD = 6$

Equivaut à : $MO^2 = 3$ c'est-à-dire : $OM = \sqrt{3}$

Par conséquent : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 24$

Est le cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{3}$

Exercice37 : (****) Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB = 10$

Et soit I le milieu du segment $[AB]$

1) Déterminer (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 10$

2) Déterminer (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 68$

Solution : $AB = 10$ et le milieu du segment $[AB]$

1) Déterminons (Δ) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = 10$

Soit : H la projection orthogonal du point M sur la droite (AB) Donc : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB} = IH.AB$

Equivaut à : $IH.AB = 10$ Equivaut à : $IH = 1$

Puisque $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens alors :

$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$

Et par suite : (Δ) est la droite qui passe par le point H et tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{10}\overrightarrow{AB}$ et perpendiculaire a (AB)

2) Déterminons (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = 68$

Donc :

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

$MA^2+MB^2=2\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2$

Puisque I le milieu du segment $[AB]$donc :

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=0$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\vec{0}\right)+50$

Donc : $MA^2+MB^2=2MI^2+50$

par suite on a : $2MI^2+50=68$

Donc : $MI^2=9$ Cela équivaut à dire que $MI=3$

Par conséquent : l'ensemble(C) des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=68$ est le cercle de centre I et de rayon $R=3$

Exercice38 : (****) Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=5$ et soit I le point du segment $[AB]$ tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

2) Calculer les distances : IA et IB

3) Montrer que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

4) Déterminer (C) l'ensemble des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$

Solution : $AB=5$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

1) Montrons que : $4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=4\left(-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}$

$=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

2) Calculons les distances IA et IB :

On a : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ donc : $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\left\|\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\right\|$

Donc: $AI=\frac{1}{5}AB=\frac{1}{5}\times 5=1$ Par suite : $IB=AB-AI=4$

3) Montrons que : quel que soit M un point du plan on a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

Soit M un point du plan on a :

$4MA^2+MB^2=4\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$4MA^2+MB^2=4\left(\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}^2$

$4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(4\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)+IA^2+IB^2$

Donc : $4MA^2+MB^2=5\overrightarrow{MI}^2+2\overrightarrow{MI}\cdot\left(\vec{0}\right)+1^2+4^2$

Par suite : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

4) Déterminons l'ensemble(C) des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$?

On a : $4MA^2+MB^2=5MI^2+17$

Donc : $5MI^2+17=37$

Cela équivaut à dire que : $MI^2=4$

Par conséquent : l'ensemble(C) des points M du plan tel que : $4MA^2+MB^2=37$

Est le cercle de centre I et de rayon $R=2$.

Exercice39 : (****) Soit A et B deux points dans le plan tel que : $AB=4$

Et soit k un réel ; on note (C_k) l'ensemble des points M dans le plan tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=k$

1) Déterminer et représenter les ensembles : (C_0) et (C_5) et (C_{12}) et (C_{-6})

2) Déterminer (E) l'ensemble des points M du plan tel que : $0\le\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\le 5$

Solution : Soit M un point dans le plan et soit I le milieu du segment $[AB]$on a donc : d'après le théorème de la médiane dans MAB :

$\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{1}{4}AB^2$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=MI^2-4$ car $AB=4$

Déterminons l'ensemble(C_0) :

1ier méthode : $M\in(C_0)$Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}$

C'est-à-dire : $(MA)\perp(MB)$ et par suite l'ensemble(C_0) est le cercle de de diamètre $[AB]$

2ier méthode : $M\in(C_0)$Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

Signifie que $MI^2-4=0$

Signifie que $MI^2=4$ c'est-à-dire : $MI=2$

Par suite l'ensemble(C_0) est le cercle de centre I et de rayon $R=2$

Déterminons l'ensemble(C_5) :

• $M\in(C_5)$Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=5$

Signifie que $MI^2-4=5$

Signifie que $MI^2=9$ C'est-à-dire : $MI=3$

Par suite l'ensemble (C_5) est le cercle de centre I et de rayon $R=3$

• Déterminons l'ensemble (C_{12}) :

$M \in (C_{12})$ Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=12$ Signifie que $MI^2-4=12$

Signifie que $MI^2=16$ C'est-à-dire : $MI=4$

Par suite l'ensemble (C_{12}) est le cercle de centre I et de rayon $R=4$

• Déterminons l'ensemble (C_{-6}) : $M \in (C_{-6})$

Signifie que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=-6$ c'est-à-dire : $MI^2-4=-6$

Signifie que $MI^2=-2$ impossible.

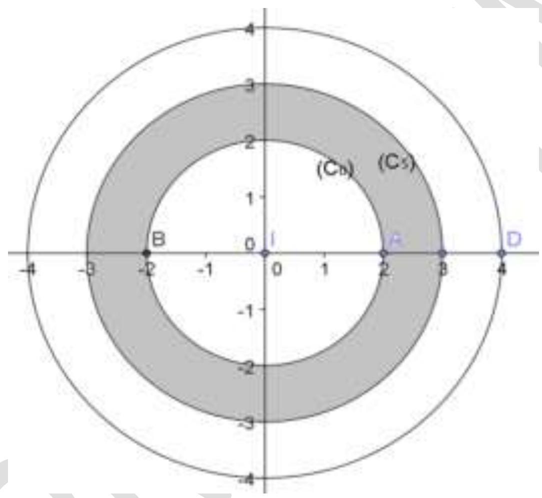
Par suite l'ensemble (C_{-6}) est l'ensemble vide : $(C_{-6})=\varnothing$

2) Déterminons (E) : $M\in(E)$

Signifie que $0\le\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\le 5$ Signifie que $0\le MI^2-4\le 5$

Signifie que $4\le MI^2\le 9$ C'est-à-dire : $2\le MI\le 3$

Par suite l'ensemble (E) est La couranne circulaire limitée par les cercles (C_0) est (C_5)



Exercice40 : (****) Soit ABC un triangle équilatéral tel que : $AB=3cm$

I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AI]$

1) Calculer : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$ et la distance AI

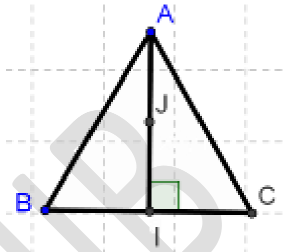
2) Montrer que : pour tout point M du plan on a : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

3) Déterminer : l'ensemble (C) des points M du plan tel que : $2MA^2+MB^2+MC^2=18$

Solution : 1)a)Calcul de : $\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}$

ABC Un triangle équilatéral et I le milieu du segment $[BC]$ donc : $(BC)\perp(IJ)$

Et donc : I est la projection orthogonale de J sur segment (BC)



Donc :

$\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{CI}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}\cdot\overrightarrow{IC}=-\overrightarrow{IC}^2=-IC^2=-2^2=-4$

b) Calcul de : AI

D'après le théorème de la médiane dans ABC

On a : $AB^2+AC^2=2AI^2+\frac{1}{2}BC^2$

Nous obtenons donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-\frac{1}{2}BC^2\right)$

Donc : $AI^2=\frac{1}{2}\left(3^2+3^2-\frac{1}{2}3^2\right)=\frac{3}{4}\times3^2=\frac{27}{4}$

Par suite : $AI=\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

2) Montrons que pour tout point M du plan on a :

$2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

Soit M un point dans le plan et I le milieu du segment $[BC]$.

Donc d'après le théorème de la médiane dans MBC on a : $MB^2+MC^2=2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$

$$2MA^2+MB^2+MC^2=2MA^2+2MI^2+\frac{1}{2}BC^2$$

Donc :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(MA^2+MI^2\right)+\frac{1}{2}BC^2$$

D'autre part on a : J le milieu du segment $[AI]$

Donc d'après le théorème de la médiane dans MAI

On a : $MA^2+MI^2=2MJ^2+\frac{1}{2}AI^2$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=2\left(2MJ^2+\frac{1}{2}AI^2\right)+\frac{1}{2}BC^2$

Donc :

$$2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+AI^2+\frac{1}{2}BC^2$$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{27}{4}+\frac{9}{2}$

car $AI=\frac{3\sqrt{3}}{2}cm$

Donc : $2MA^2+MB^2+MC^2=4MJ^2+\frac{45}{4}$

3) Déterminons l'ensemble (C) ?

$M\in(C)$ Signifie que : $2MA^2+MB^2+MC^2=18$

Signifie que $4MJ^2+\frac{45}{4}=18$

C'est-à-dire : $4MJ^2=18-\frac{45}{4}$

Signifie que $MJ^2=\frac{27}{16}$

C'est-à-dire : $MJ=\sqrt{\frac{27}{16}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Par suite l'ensemble (C) est le cercle de centre J et de rayon $R=\frac{3\sqrt{3}}{4}cm$