Méthodes et astuces et remarques et conseils

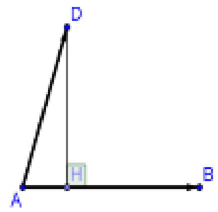
METHODES POUR CALCULER UN PRODUIT SCALAIRE :

Il existe de nombreuses méthodes permettant de calculer un produit scalaire.
Il y'a 5 principales méthodes pour calculer un produit scalaire :

Méthode1 : Utiliser une projection orthogonale,
Soient A, B, C trois points du plan et si H est la projection orthogonale de C sur la Droite (AB).

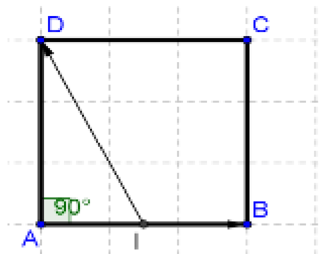
Alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ si l'angle $\left(BAC\right)$ est aigu

(C'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont le même sens.)



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ Si l'angle $\left(BAC\right)$ est obtus (C'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $.\overrightarrow{AH}$ ont des sens opposés.

EXEMPLE : Sur la figure ci-dessous, ABCD est un carré de côté 4 unités et I et le milieu du segment [AB].
On cherche à calculer la valeur du produit scalaire : $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{ID}$

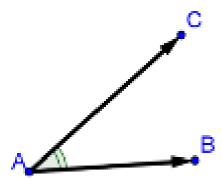


Puisque l'on connaît la projection orthogonale A du point D sur la droite (IB).L'angle $\left(DIB\right)$ est ici un angle obtus.

Les segments : [IB] et [AI] Mesurent chacun 2.

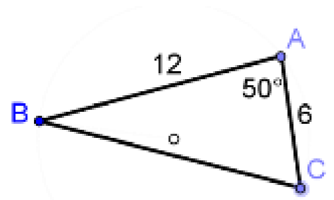
On a donc : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-IB\times IA=-2\times 2=-4$

Méthode2 : Appliquer une formule utilisant le cosinus d'un angle



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|\times\cos\left(BAC\right)=AB\times AC\times\cos\left(BAC\right)$$

EXEMPLE : Pour la figure ci-dessous, on souhaite déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du produit scalaire. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



SOLUTION : Bien sûr, on utilise la définition du produit scalaire à l'aide des angles puisqu'ici on connaît l'angle BAC

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(BAC\right)=12\times 6\times\cos\left(50^{\circ}\right)\approx 12\times 6\times 0.643\approx 46,28$$

Méthode3 : Appliquer une formule utilisant les normes de 3 vecteurs
Lorsque l'on connaît trois distances, par exemple, les longueurs des trois côtés d'un triangle,
On peut calculer un produit scalaire en utilisant l'une des égalités ci-dessous:

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a : $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

Cette formule est particulièrement utile lorsque l'on connaît les trois côtés d'un triangle ou lorsque l'on connaît 2 côtés et la médiane issus du même point ; on utilise alors souvent une des relations ci-dessous :

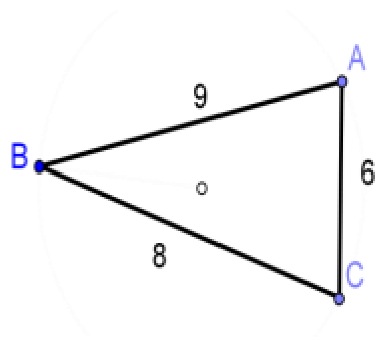
- $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ (Relation de Chasles)
- Si M et le milieu du segment [BC] : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ (Propriété de la médiane)

EXEMPLE : Pour la figure ci-dessous, on cherche, là encore, à calculer le produit scalaire **:** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

SOLUTION : Dans le triangle ci-dessus, d'après la relation de Chasles :

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

On en déduit, d'après la seconde égalité du théorème précédent :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right\|^2\right)$$

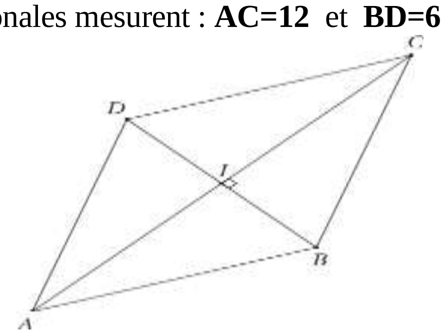
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(9^2+6^2-8^2\right)=\frac{1}{2}\times 53=26,5$$

Méthode4 : Utiliser la relation de Chasles.

Une autre façon de calculer le produit scalaire de 2 vecteurs consiste à décomposer ces vecteurs en utilisant la relation de Chasles puis à utiliser la distributivité du produit scalaire par rapport à l'addition ou à la soustraction de vecteurs : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a : $\vec{u}\bullet\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\bullet\vec{v}+\vec{u}\bullet\vec{w}$

EXEMPLE : Sur la figure ci-dessous, ABCD est un losange dont les diagonales mesurent : **AC=12** et **BD=6** et on souhaite calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$



SOLUTION : Il est possible ici de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$. et $\overrightarrow{BC}$ en utilisant la relation de Chasles et en faisant intervenir le point I :

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}$

On peut alors calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ de la façon suivante :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right).\left(\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}\right)=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$$

Comme les vecteurs : $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux le produit scalaire $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI}$ est nul ; pour la même raison le produit scalaire $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$ est lui aussi nul.

De plus : $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AI}$; $IB=\frac{1}{2}DB=3$ et $IC=AI=\frac{1}{2}AC=6$

Par conséquent : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{IB}^2=AI^2-IB^2=6^2-3^2=36-29=27$

(**Remarque** : On peut montrer que ce résultat est encore correct si ABCD est un parallélogramme

Méthode5 : Se placer dans un repère orthonormé (l'année prochaine)

Un peu d'histoire..

al-Kashi

Jamshîd al-Kashi est un grand savant iranien né vers 1380 et mort en 1429. Comme de nombreux savants des pays d'Islam, il doit son nom à sa ville natale : Kâshân, ville d'Iran située entre Téhéran et Ispahan. Il étudie les mathématiques (arithmétique, algèbre et géométrie) l'astronomie et la médecine.

Il laisse par ailleurs sous son nom un théorème qui généralise le théorème de Pythagore pour un triangle quelconque c'est : Le **théorème d'Al-Kashi ou** encore **loi des cosinus** c'est un théorème mathématique qui est utilisé en géométrie pour connaître la longueur d'un côté, ou un angle, d'un triangle quelconque, à partir de la longueur des autres côtés et de la mesure de l'angle opposé.