TRIGONOMÉTRIE2 Tronc commun Sciences BIOF

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Résumé de Cours

I) Les équations trigonométriques élémentaires

1) Equation: $\cos x = a$ Soit a un nombre réel.

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\cos x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S = \varnothing$.

Si $-1 \leq a \leq 1$ alors il existe un unique réel : α dans $[0;\pi]$ tel que $\cos x = \cos\alpha$ et alors on a :

$S = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

2) Equation: $\sin x = a$

Si $a > 1$ ou $a < -1$ alors l'équation $\sin x = a$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ et on a : $S_{\mathbb{R}} = \varnothing$.

Si $-1 \leq a \leq 1$ alors il existe un unique réel : α dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin x = \sin\alpha$ et alors on a :

$S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

3) Equation : $\tan x = a$

L'équation $\tan x = a$ est définie dans $\mathbb{R}$ équivaut à : $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ avec k un nombre relatif

Il existe un unique réel : α dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan x = \tan\alpha$ et alors on a : $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Des équations trigonométriques élémentaires :

$\cos x = 1$ Équivaut à : $x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -1$ Équivaut à : $x = (2k+1)\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 1$ Équivaut à : $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = 0$ Équivaut à : $x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sin x = -1$ Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

II) Les inéquations trigonométriques élémentaires - Méthode :

Comme pour les équations, on cherche à se ramener à une inéquation du type $\sin(\alpha) \leqslant \sin(\beta)$ ou $\cos(\alpha) \leqslant \cos(\beta)$ ou $\tan(\alpha) \leqslant \tan(\beta)$, en remplaçant au besoin $\leqslant$ par $\geqslant$, < ou >.

Le cercle trigonométrique permet de mieux visualiser les intervalles solutions.

Remarque : Pour les inéquations trigonométriques il est pratiquement impossible de résoudre sans dessiner un cercle trigonométrique