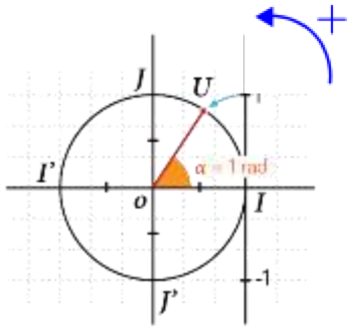
TRIGONOMÉTRIE1
Résumé de Cours

I) Le radian et le cercle trigonométrique :



1) Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.

On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

2) On appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O et de rayon 1 muni d'un point d'origine I et d'un sens de parcours appelé direct (sens contraire au sens des aiguilles d'une montre)

3) Les mesures en radian et en degré d'un même angle sont proportionnelles

• Si x est la mesure d'un angle en radian et y sa mesure en degré alors : $\frac{x}{\pi}=\frac{y}{180}$

4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en radians x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degrés $y^{\odot}$	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°

II) Les abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique

1) Soit M un point du cercle trigonométrique d'origine I

Et soit α la longueur de l'arc IM (on allant de I vers M dans le sens direct) en radian

Tout réel qui s'écrit sous la forme : $\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ s'appelle abscisse curviligne de M

2) Si x et x' deux abscisses curvilignes du même point M dans le cercle trigonométrique alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $x-x'=2k\pi$ on écrit : $x\equiv x'[2\pi]$:Et on lit : x est congrue a x' modulo 2π

3) Abscisse curviligne principale :

Parmi les abscisses curvilignes d'un point M du cercle trigonométrique une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et on l'appelle abscisse curviligne principale .

III)) Relation de Chasles pour les angles orientés de deux demi-droites et de vecteurs

1) Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites d'origine O

On a : $\overline{(Ox;Oy)}+\overline{(Oy;Oz)}\equiv\overline{(Ox;Oz)}[2\pi]$

$\overline{(Ox;Oy)}\equiv-\overline{(Oy;Ox)}[2\pi]$

2) l'angle orienté des vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans cet ordre est l'angle noté : $(\vec{U}\,;\vec{V})$

3) Pour des vecteurs non nuls, on a :

a) $\overline{(\vec{u}\,;\vec{u})}\equiv 0[2\pi]$ b) $\overline{(\vec{u}\,;-\vec{u})}\equiv\pi[2\pi]$

c) $\overline{(\vec{u}\,;\vec{v})}+\overline{(\vec{v}\,;\vec{w})}\equiv\overline{(\vec{u}\,;\vec{w})}[2\pi]$ relation de Chasles

Et on a : $\overline{(\vec{u};\vec{v})} = -\overline{(\vec{v};\vec{u})} + 2k\pi$ et $\overline{(-\vec{u};\vec{v})} = \overline{(\vec{u};\vec{v})} + \pi + 2k\pi$ et $\overline{(-\vec{u};-\vec{v})} = \overline{(\vec{u};\vec{v})} + 2k\pi$

et $\overline{(\vec{u};-\vec{v})} = \overline{(\vec{u};\vec{v})} + \pi + 2k\pi$

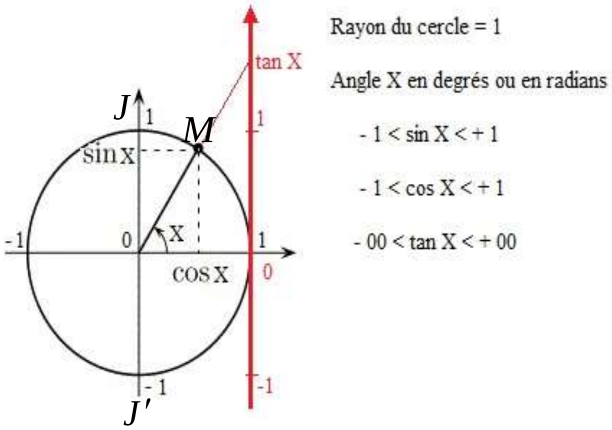
IV) Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.

1) Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I

Soit $x \in \mathbb{R}$ il existe un point M de (C) unique tel que x est une abscisse curviligne de M

Soit C le projeté orthogonal de M sur (OI)

Et soit S le projeté orthogonal de M sur (OJ)



- Le <u>cosinus du nombre réel</u> x est l'abscisse de M

Et on note **cos** x.

- Le <u>sinus du nombre réel</u> x est l'ordonnée de M

Et on note **sin** x.

- Soit (Δ) la droite tangente a (C) en I

Si $M \neq J$ et $M \neq J'$ alors la droite (OM) coupe la tangente (Δ) en un point T

Le nombre réel $\overline{IT}$ l'abscisse de T sur l'axe (Δ) est La tangente du nombre réel x et on note **tan** x.

Remarque :

✓ Les rapports trigonométriques : **cos** x *et* **sin** x *et* **tan** x. sont aussi appelés cosinus et sinus et tangente de l'angle orienté $(\overline{OI};\overline{OM})$

✓ tan x existe si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

✓La cotangente de x est le nombre réel x noté cotant x et on a : $\cot an\, x = \frac{1}{\tan x}$

2) Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables :

x	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	**-1**
$\sin x$	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**

3) Propriétés : Pour tout nombre réel x, on a :

1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$

5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif 6) si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

7) si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan(x + k\pi) = \tan x$

8) :$1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

9) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ 10) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$

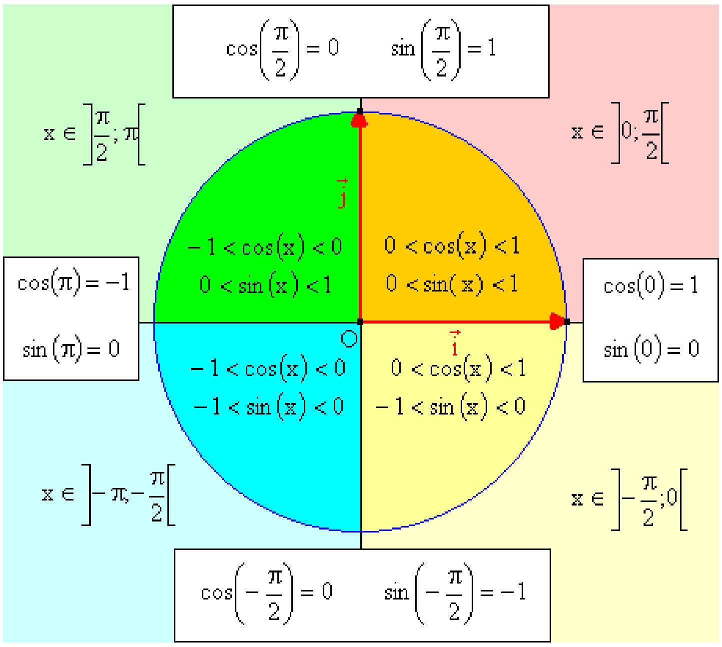
11) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ 12) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

13) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$

14) $\tan(\pi-x)=-\tan x$ et $\tan(\pi+x)=\tan x$ si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

V) Signe de Cosinus, sinus

- *Si* $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ alors $\cos x\geq 0$
- *Si* $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ alors $\cos x\leq 0$
- *Si* $0\leq x\leq\pi$ alors $\sin x\geq 0$
- *Si* $\pi\leq x\leq 2\pi$ alors $\sin x\leq 0$

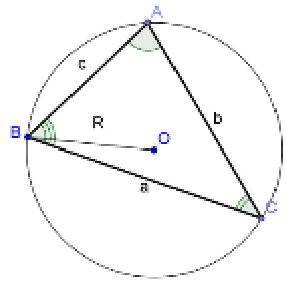


Loi des sinus : ABC triangle tel que : $AB=c$ **et** $AC=b$ **et** $BC=a$

S est l'aire du triangle ABC, R est le rayon du cercle circonscrit à ABC

On a la Loi des sinus : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2S_{ABC}}{abc}=\frac{1}{2R}$ d'où $abc=4RS_{ABC}$

La formule de l'aire : $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$



Remarque : la Loi des sinus : peut être utilisée :

- Soit pour calculer la longueur d'un côté, lorsque le triangle est donné par 2 angles et un côté ;
- Soit pour calculer un angle si le triangle est donné par 2 longueurs et un angle opposé à l'un des côtés précédents.

Exemple : Calcul de la longueur d'un côté

Soit à calculer AC dans ce triangle :

D'après la loi des sinus, On obtient : $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ donc : $\frac{\sin 67^\circ}{b}=\frac{\sin 33^\circ}{5}$

Donc : $b\sin 33^\circ=5\sin 67^\circ$ c'est-à-dire : $b=\frac{5\sin 67^\circ}{\sin 33^\circ}$

Par suite : $AC\simeq 8,45$