Systèmes : partie2 Résumé de Cours

1) On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues toute système de la forme :

$(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où les coefficients *a*, *b*, *c* , *d* sont des réels donnés et le couple (x,y) est l'inconnue

Dans $\mathbb{R}^2$ résoudre le système (I) c'est déterminer l'ensemble S des solutions c'est-à-dire l'ensemble des couples (x,y) qui vérifient les deux équations:

$ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ simultanément

2) Pour Résoudre un système (I) on utilise généralement quatre méthodes :

- Méthode de substitution.
- Méthode de combinaison linéaire ou addition.
- Méthode des déterminants.
- Méthode graphique.

a) Méthode de substitution : Substituer, c'est remplacer par (Mettre à la place de).

Exemple : Dans le système $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$, on exprime *x* en fonction de *y* dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} x=3-2y \\ 2x+3y=4 \end{cases}$.

On remplace ensuite *x* par $3-2y$ dans la seconde équation, ce qui donne le système :

$\begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+3y=4 \end{cases}$ ce qui signifie que :

$\begin{cases} x=3-2y \\ -y+6=4 \end{cases}$ soit encore à $\begin{cases} x=3-2y \\ y=2 \end{cases}$

Et on remplace *y* par 2 dans la première équation on trouve $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ donc: $S=\{(-1,2)\}$

b) Méthode de combinaison linéaire ou méthode par addition : Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des Facteurs bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre.

Exemple : Dans le système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$

équivalent : $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 6y=6 \\ x=2 \end{cases}$ encore ou $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$.

On en déduit le couple solution : $S=\{(2,1)\}$.

Remarque : Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.

Soit le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Si les coefficients de *x* et de *y* sont proportionnels c'est-à-dire si : $ab'=a'b$ ce système a une infinité de solutions ou pas de solutions

– Si de plus : $ac'\neq a'c$ alors le système n'a pas de solution ;

– Si $ac'=a'c$ (les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

c)Méthode des déterminants : Soit le système de deux équations à deux inconnues suivant

$(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ et $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$ son déterminant.

- Si $\Delta\neq 0$ alors le système (I) admet un couple solution unique :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \quad ; \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}$$

Donc : $S=\{(x;y)\}$

• Si $\Delta \neq 0$ alors :

✓ Si $\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=0$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0$ alors : les deux équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont équivalentes et dans ce cas résoudre le système c'est résoudre l'une des équations par exemple en choisi : $ax+by=c$ et alors on a :

$$S=\left\{\left(x;\frac{c-ax}{b}\right)/\, x\in\mathbb{R}; b\neq 0\right\}$$

✓ Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors le système (I) n'admet aucun couple solutions et donc $S=\varnothing$

3)Mise en équation d'un problème à deux inconnues

Rappel des quatre étapes dans la résolution d'un problème à deux inconnues.

- ✓ 1ère étape : choix de l'inconnue (ou des inconnues)
- ✓ 2ème étape : mise en équations du problème
- ✓ 3ème étape : résolution de l'équation (ou du système d'équations)
- ✓ 4ème étape : vérification des résultats

Exemple de problème : Dans une boulangerie, Ali a acheté deux croissants et un pain il a payé 6 dh 50 Dans la même boulangerie, Aicha à acheter un croissant et trois pains et elle a payé 5dh 50.
Quel est le prix d'un croissant et d'un pain dans cette boulangerie ?

Méthode de résolution : Pour résoudre un problème avec deux inconnues :

1. On pose **x= "**la première inconnue" et **y =** "la deuxième inconnue".
Pour ce problème, on écrit : "J'appelle x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain "
Ou : "Soit x le prix d'un croissant et y le prix d'un pain ".

2. On écrit les équations correspondant au problème : $2x+1y=6.5$ et $1x+3y=5.5$

On place les équations l'une en dessous de l'autre dans une grande accolade : $\begin{cases} 2x+1y=6.5 \\ 1x+3y=7 \end{cases}$

3. On résout le système avec l'une des trois méthodes on trouve : $x=2,5$ et $y=1,5$

4. Vérification des résultats : $\begin{cases} 2\times 2.5+1\times 1.5=6.5 \\ 1\times 2.5+3\times 1.5=7 \end{cases}$

Interprétation graphique du système de deux équations du premier degré a deux inconnues :

$(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$; Soit (d) et (d') deux droites d'équations respectives : ax + by - c = 0 **et** a'x + b'y - c' = 0.

Soit M (u;v) un point du plan.
Dire que (u;v) est solution du système (I) revient à dire que le point M appartient à la fois à (d) et (d'). On distingue alors trois cas :
Si (d) et (d') sont parallèles et distinctes, le système (S) n'admet aucun couple solution.
Si (d) et (d') sont sécantes, le système (S) admet une solution unique.
Si (d) et (d') sont confondues alors le système (S) admet une infinité de couples solutions.
Conclusion : Résoudre (S) revient à étudier la position relative des droites (d) et (d')