Résumé de Cours les polynômes

I) Définition d'un polynôme

a) L'expression : $V(x)=x^3+8x^2+15x$ est appelée polynôme de degré 3 on note : $\deg V = 3$.

Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du polynôme $V(x)$.

$8x^2$ Est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.
x^3 Est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.
$15x$ Est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

b) Un polynôme est une somme de monômes.
Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x), Q(x)$, ...

Le degré du polynôme P noté : $\deg P$ est celui de son monôme de plus haut degré.

c) Remarque et exemples :

- $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ Est un polynôme de degré 4 ordonné suivant les puissances décroissantes.
- Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$
- $R(x)=x^3+3x^2-\dfrac{2}{x}-1$ n'est pas un polynôme et $E(x)=\sqrt{x}+x^2-3$ n'est pas un polynôme
- $F(x)=2=2x^0$ Est un polynôme de degré 0 et s'appelle un polynôme constant.
- Un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme.

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x)=ax^2+bx+c$ Avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

d) Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit P = Q si $P(x)=Q(x)$ Pour tout x réel

e) Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

2) Opérations sur les polynômes :

a) La somme de deux polynômes : Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P+Q$

Tel que : $(P+Q)(x)=(P)(x)+(Q)(x)$ Pour tous $x\in\mathbb{R}$ **et** on a : $\deg(P+Q)\le\max(\deg(P);\deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel : Soient P un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que :
$(\alpha P)(x)=\alpha\times(P)(x)$ Pour tout $x\in\mathbb{R}$ **et** on a : $\deg(\alpha P)=\deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes : Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté $P.Q$ et tel que : $(P.Q)(x)=(P)(x)\times(Q)(x)$ $x\in\mathbb{R}$

Et on a : $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.

3) La division euclidienne d'un polynôme par $x-a$ et factorisation

a) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}$ et soit $a\in\mathbb{R}$

Alors il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tel que : $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$ pour tous $x\in\mathbb{R}$

Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par : $x-a$ et $Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste.

b) Soit P un polynôme et soit $a\in\mathbb{R}$.
On dit que a est racine du polynôme P si et seulement si $P(a)=0$

c) Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $a\in\mathbb{R}$; a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x-a$.