L'ordre dans $\mathbb{R}$ et opérations

I) L'ordre dans $\mathbb{R}$: Comparer deux nombres réels *a* et *b*, c'est chercher à savoir quel est le plus grand (Ou s'ils sont égaux).

1) Soient a et b deux réels : $a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^{+}$ ou $b-a \geq 0$.

$b \geq a$ se lit « b supérieur ou égal à a » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^{+}$ ou $b-a \geq 0$.

a < b se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a>0$.
a > b se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a<0$.
Ainsi, comparer *a* et *b* revient à étudier le signe de : *a* – *b*.

2) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$.

a) Soient a et b et c trois nombres réels.

- ✓ Si $a \leq b$ Alors $a+c \leq b+c$ et $a-c \leq b-c$
- ✓ Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a+c \leq b+d$

b) $ab \geq 0$ Signifie que : $a \geq 0$ et $b \geq 0$ ou $a \leq 0$ et $b \leq 0$
(Le produit de deux réels de même signe et toujours positif)

c) Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors : $ac \leq bc$
Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors : $ac \geq bc$

d) si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$.
Si $0 \leq a \leq b$ alors : $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.

e) Si $a \leq b \leq 0$ alors : $a^2 \geq b^2$.

f) Si $ab > 0$ et $a \leq b$ on a : alors : $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

3) La valeur absolue : La valeur absolue d'un nombre x se note entre deux barres verticales : | x | et se lit : valeur absolue de x

Si $x \geq 0$ alors : $|x| = x$ et Si $x \leq 0$ alors : $|x| = -x$

Exemples : | 4 | = 4 car 4 > 0 et : | -5 |= -(-5)=5 car -5 < 0

Remarque : Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

c) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soient A et B les points d'abscisses respectives a et b sur un axe normé (gradué)

La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note : $AB = |a-b|$ et on a : $|a-b| = |b-a|$

c) Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^{*}$ et $a \in \mathbb{R}^{+}$ alors on a : $|x| \geq 0$; $|-x| = |x|$; $|x^2| = |x|^2 = x^2$; $-|x| \leq x \leq |x|$

$\sqrt{x^2} = |x|$; $|x \times y| = |x| \times |y|$; $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$ si $y \neq 0$ et $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Inégalité du Triangle)

$|x| = a$ Équivaut à dire que : $x = a$ ou $x = -a$

$|x| = |y|$ Équivaut à dire que : $x = y$ ou $x = -y$

Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que : $x = 0$

4) Intervalles et inégalités

Les intervalles réels sont des parties de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
Leur représentation sur la droite numérique est un segment ou une droite dont les extrémités peuvent être exclues. C'est d'ailleurs ce qui fait qu'un intervalle est ouvert ou fermé.

→ La notation +∞ se lit "plus l'infini". Contrairement à ce que l'on pourrait croire, +∞ n'est pas un nombre. C'est juste un symbole pour désigner le "bout positif et infiniment grand" de l'ensemble des réels.

→ La notation -∞ se lit elle "moins l'infini".

a)Les différents types d'intervalles :

Dans le tableau ci-dessous, a et b sont deux réels tels que : $a \leq b$.

Notation	Représentation sur la droite réelle	Ensemble des réels x tels que	Appellation
[a ; b]		$a \leq x \leq b$	**Intervalle fermé borné**
[a ; b[		$a \leq x < b$	**Intervalle semi -ouvert (fermé en a et ouvert en b)**
]a ; b]		$a < x \leq b$	**Intervalle semi-ouvert (ou ouvert à gauche et fermé à droite)**
]a ; b[		$a < x < b$	**Intervalle ouvert borné.**
]-∞ ; b]		$x \leq b$	**Intervalle non borné fermé en b (ou fermé à droite)**
]-∞ ; b[		$x < b$	**Intervalle non borné ouvert en b (ou ouvert à droite)**
[a ; +∞ [		$a \leq x$	**Intervalle non borné fermé en a (ou fermé à gauche)**
]a ; +∞ [		$a < x$	**Intervalle non borné ouvert en a (ou ouvert à gauche)**

b) Quelques remarques sur ce tableau :

La notation {x tels que a < x < b} désigne l'ensemble des réels x tels que a < x < b (sous-entendu qui sont strictement plus grand que a et strictement inférieur à b).

Le fait de dire qu'un intervalle est par exemple ouvert en b signifie que le réel b ne fait pas partie de celui-ci. Par contre, s'il y avait été fermé alors il en aurait fait partie.

Du côté de -∞ et de +∞, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi :]-∞ ; +∞[.

$\mathbb{R}^{+} = [0,+\infty[$ et $\mathbb{R}^{-} =]-\infty,0]$ et $\mathbb{R}_{+}^{*} =]0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_{-}^{*} =]-\infty,0[$

<u>c) Réunion et intersection d'intervalles et milieu et amplitude et rayon .</u>

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombres réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

d) <u>Milieu et amplitude et rayon d'un intervalle :</u> Soient a, b deux nombres réels tels que : $a \leq b$.

On pose $I = [a;b]$ ou $I =]a;b[$ ou $I = [a;b[$ ou $I =]a;b]$.

Le réel $\frac{a+b}{2}$ est le **milieu** de l'intervalle I et Le réel $b-a$ est **l'amplitude** de l'intervalle I

Le réel $\frac{b-a}{2}$ est le **rayon** de l'intervalle I

e) Les intervalles et la valeur absolue : $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$

$|x| \leq r$ Signifie que : $-r \leq x \leq r$ signifie que : $x \in [-r;r]$

$|x| \geq r$ Signifie que : $x \geq r$ ou $x \leq -r$

5) L'encadrement et la valeur approchée

5-1) Encadrement : Réaliser un encadrement du réel x, c'est trouver deux nombres assez proche a et b

Tel que, $a < x < b$ ou $a \leq x \leq b$ ou $a < x \leq b$ ou $a \leq x < b$

Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude : b-a

Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

a s'appelle une approximation du réel x par défaut à b-a près (ou avec la précision b-a)

b s'appelle une approximation du réel x par excès à b-a près (ou avec la précision b-a)

5-2) Encadrements et opérations.

- Encadrements et additions : Considérons deux réels x et y tels que : $a < x < b$ et $c < y < d$

Alors on a : $a+c < x+y < b+d$.

Remarque : Pour encadrer le résultat d'une différence a-b

On commencera par encadrer - b avant…

-Encadrements et multiplications : Considérons deux nombres réels **positifs** x et y tels que :

$0 < a < x < b$ et $0 < c < y < d$.

Le produit xy est alors encadrée par ac et bd c'est-à-dire : $ac < xy < bd$.

Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy.

Remarque : *Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).*

5-3) Valeur approchée d'un nombre.

a) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque : $|x-a| \leq r$.

b) Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif.

On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r), par défaut, lorsque : $a \leq x \leq a+r$.

On dit que : a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque : $a-r \leq x \leq a$.

Exemples : 1) On a $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,40-0,02 < \sqrt{2} < 1,40+0,02$

$-0,02 < \sqrt{2}-1,40 < 0,02$ Donc : $\left|\sqrt{2}-1,40\right| < 0,02$

Donc : $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) On a $1,40 \leq \sqrt{2} < 1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3) On a $1,42-0,02 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

5-4) Approximation décimale : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

Si $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ alors :

$N \times 10^{-p}$ S'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près.

$(N+1) \times 10^{-p}$ S'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près.

Exemple : On a $0,333333 < \frac{1}{3} < 0,333334$ donc $333333 \times 10^{-6} < \frac{1}{3} < (333333+1) \times 10^{-6}$

333333×10^{-6} Est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1) \times 10^{-6}$ Est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près