

Résumé de Cours

Géométrie dans l'espace

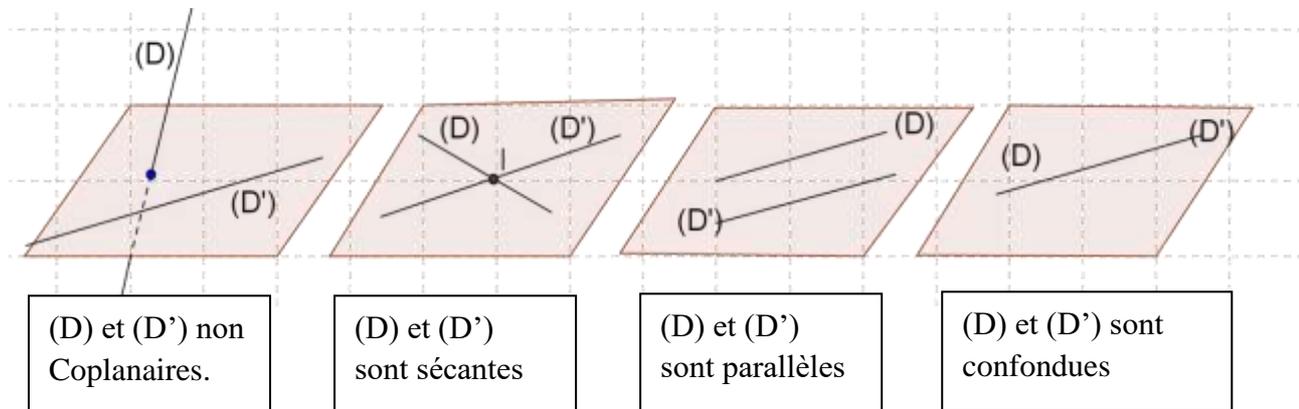
A) Axiomes sur lesquels reposent les raisonnements de géométrie dans l'espace

1. Par 2 points distincts de l'espace, il passe une et une seule droite.
2. Par 3 points non alignés de l'espace, il passe un et un seul plan.
3. Si un plan contient deux points A et B, alors ce plan contient tous les points de la droite (AB)
4. Si deux plans distincts ont un point en commun alors leur intersection est une droite passant par ce point.
5. Axiome d'Euclide : par un point A donné et une droite (D) donnée, il ne passe qu'une et une seule droite parallèle à (D).

B) Positions relatives de deux droites

Deux droites (D) et (D') de l'espace sont soit coplanaires (dans un même plan) soit non coplanaires. Dans le cas où (D) et (D') sont coplanaires alors : on a 3 cas possibles

- Ils se coupent en un point $I : (D) \cap (D') = \{I\}$ (sont sécantes)
- Pas de points communs : $(D) \cap (D') = \emptyset$ sont parallèles : $(D) \parallel (D')$
- Sont confondues $(D) = (D')$

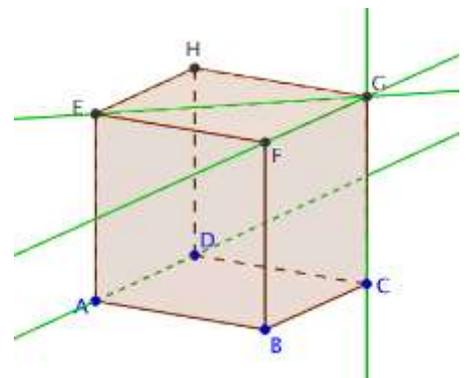


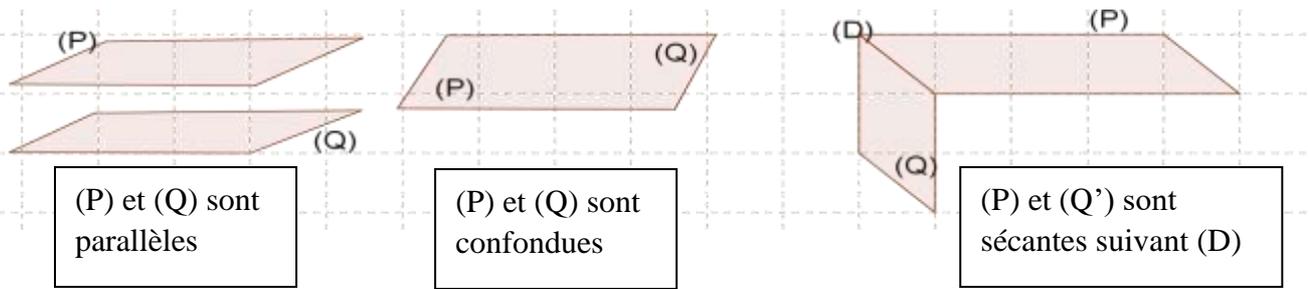
Exemples : ABCDEFGH est un cube.

- Les droites (EG) et (FG) appartiennent au même plan (EFG) et sont sécantes en G.
- Les droites (AD) et (FG) appartiennent au même plan (ADG) et sont parallèles.
- Les droites (AD) et (CG) sont non coplanaires.

3) Positions relatives de deux plans

Deux plans (P) et (Q) de l'espace sont soit sécants suivant une droite soit parallèles (confondues)





(P) et (Q) sont parallèles

(P) et (Q) sont confondues

(P) et (Q') sont sécantes suivant (D)

Exemple figure1

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle.

- Les plans (BCG) et (BCE) sont sécants suivant la droite (BC).
- Les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles

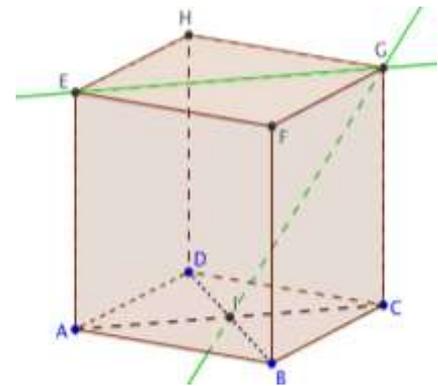
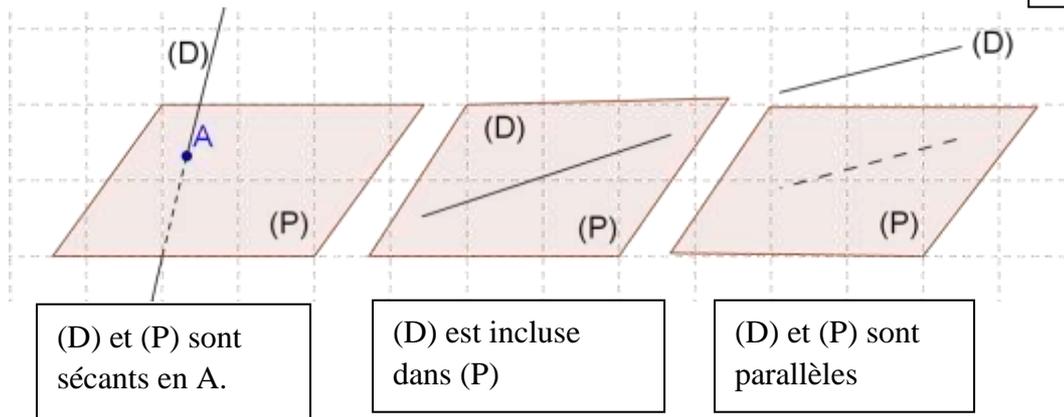


figure1

C) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.



(D) et (P) sont sécants en A.

(D) est incluse dans (P)

(D) et (P) sont parallèles

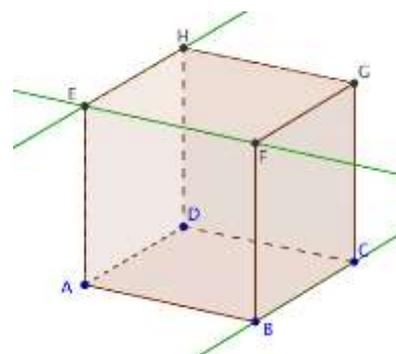
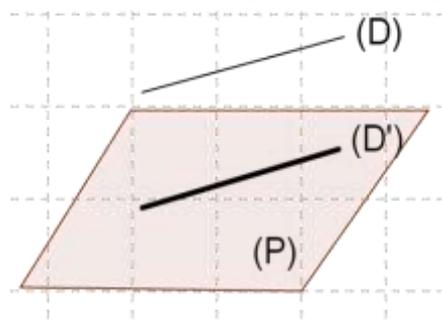
Exemple : figure1 : ABCDEFGH est un cube.

- La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.
- La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).
- La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.

D) Propriétés :

• Comment montrer qu'une droite est parallèle à un plan P ?

Une droite (D) est parallèle à un plan (P) s'il existe une droite (D') dans (P) parallèle à (D)



• Parallélisme de deux plans

Si un plan (P) contient deux droites sécantes (D) et (D') parallèles à un plan (P') alors les plans (P) et (P') sont parallèles.

• Parallélisme de deux droites

Si deux plans sont parallèles alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.

Théorème du toit : (P₁) et (P₂) sont deux plans sécants.

Si une droite (D₁) de (P₁) est parallèle à une droite (D₂) de (P₂) alors la droite d'intersection (Δ) de (P₁) et (P₂) est parallèle à (D₁) et (D₂)

E) Orthogonalité

1) Orthogonalité de deux droites

Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

Exemple : ABCDEFGH est un cube.  figure2

- Les droites (EH) et (EF) sont perpendiculaires.
- Les droites (BC) et (EF) sont orthogonales.

Remarque :

- Deux droites perpendiculaires sont coplanaires et sécantes.
- Deux droites perpendiculaires sont orthogonales. La réciproque n'est pas vraie car deux droites orthogonales ne sont pas nécessairement coplanaires et sécantes.

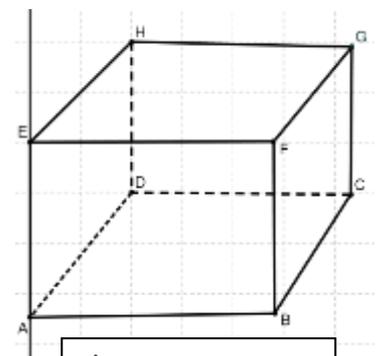


 figure2

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

- Une droite (D) est orthogonale à un plan (P) si elle est orthogonale à deux droites sécantes de (P).
- Si une droite (D) est orthogonale à un plan (P) alors elle est orthogonale à toutes les droites de (P).

Exemple : ABCDEFGH est un cube.  figure2

(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
 (AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
 Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

3) Orthogonalité de deux plans

Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale de l'autre.