Résumé de Cours : **Fonctions** - *Généralités*

1) Définitions et Domaine de définitions

Une fonction : est une relation qui a un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y :

On note : $x \overset{f}{\mapsto} y$ ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore y = f(x)

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

Domaine de définition : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f que l'on notera D_f

Egalité de deux fonctions : Soient f et g deux fonctions, D_f et D_g leurs domaines de définitions respectifs.

On dit que f et g sont égaux et on écrit f=g si et seulement si : $D_f = D_g$ et pour tout : $x \in D_f$ (ou $x \in D_g$)

On a : f(x)=g(x)

Représentations graphiques : Soit f une fonction, D_f son domaine de définition

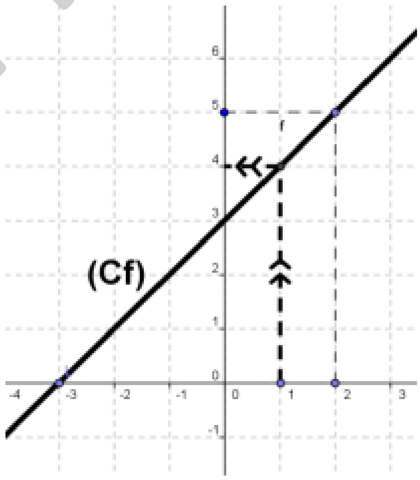
a) L'ensemble des points M (x, f (x)) forment la courbe représentative de la fonction f, souvent notée C_f.

$C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$.

b) Utilisation d'une courbe pour obtenir une image

Pour obtenir l'**image d'un nombre** a par une fonction f, on lit graphiquement l'ordonnée du point de la courbe de f ayant pour abscisse a.

Exemple : Voici la représentation graphique d'une fonction f :



Pour déterminer l'image de 1 par f, on doit partir de l'abscisse 1, puis on lit l'ordonnée du point de la courbe correspondant :

Par lecture, on obtient 4. Donc : l'image de 1 par f est 4.

Pour déterminer l'image de 2 par f, on doit partir de l'abscisse 2, puis on lit l'ordonnée du point de la courbe correspondant.

Par lecture, on obtient 5 : l'image de 2 par f est 5.

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

a) Fonction paire : On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

- Pour tout x de D_f si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel x de D_f On a**: f(-x) = f(x)**.

b) Fonction impaire :

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

- Pour tout x de D_f si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$
- Pour tout réel x de D_f, on a : **f(-x) = -f(x)**

c) Le graphe et la parité de la fonction.

- La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.
- La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

3) Les variations d'une fonction numérique.

a)Définitions :

a) Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tel que : $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \prec f(x_2)$ $\left(f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I

(décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 \prec x_2$ alors $f(x_1) \succ f(x_2)$ $\left(f(x_1) \geq f(x_2)\right)$

Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que : si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tel que : $x_1 \prec x_2$ alors : $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

- On dit que f est constante sur I si et seulement si : il existe un réel k tel que : $f(x)=k$ pour tout $x \in I$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante (croissante) sur I si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ On a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \succ 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \geq 0\right)$

• On dit que f est strictement décroissante (décroissante) sur I si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ On a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \prec 0$ $\left(\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq 0\right)$

• On dit que f est constante sur I si et seulement si pour tout $x_1 \in I$ et $x_é \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = 0$.

c) les variations et la parité : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

❖ Si f est paire alors :

• f Est croissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'.

• f Est décroissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'.

❖ Si f est impaire alors :

• f est croissante sur I si et seulement si f est croissante sur I'

• f est décroissante sur I si et seulement si f est décroissante sur I'

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

4) Les extremums d'une fonction numérique.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➢ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) si et seulement si pour tout que $x \in I$: $f(x) \leq f(a)$

➢ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) si et seulement si pour tout $x \in I$: $f(x) \geq f(a)$

5) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} ax^2$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=ax^2$; $a \in \mathbb{R}^*$ on a : $D_f = \mathbb{R}$

f est une fonction paire .

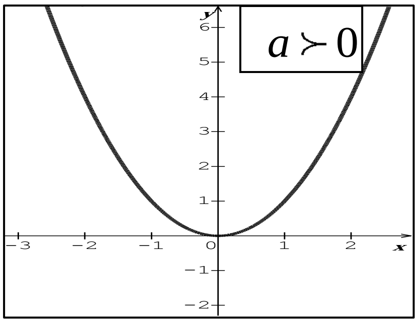
<u>Tableau de variations de f si</u> $a \succ 0$

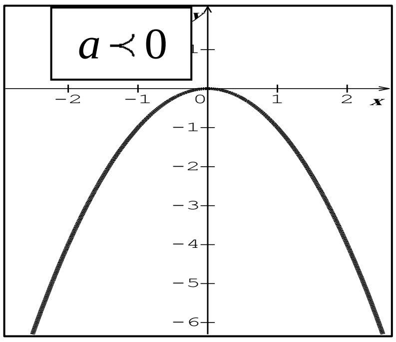
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↗

<u>Tableau de variations de f si</u> $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

Dans un Repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques sont son sommet qui est l'origine du repère et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées





6) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} ax^2+bx+c$

Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$

a) On a f est une fonction polynôme donc $D_f=\mathbb{R}$

b) Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=a(x-\alpha)^2+\beta$

Avec $\Delta=b^2-4ac$ et $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}$ et s'appelle la forme canonique de $f(x)$

Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha;\beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x=\alpha$

3° Les variations de f

Si $a\succ 0$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ β $\nearrow$

Si $a\prec 0$

x	$-\infty$ α $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ β $\searrow$

7) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}\ (a\in\mathbb{R}^*)$ avec $a\in\mathbb{R}^*$

a) Tableau de variations de f

si $a\succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

si $a\prec 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

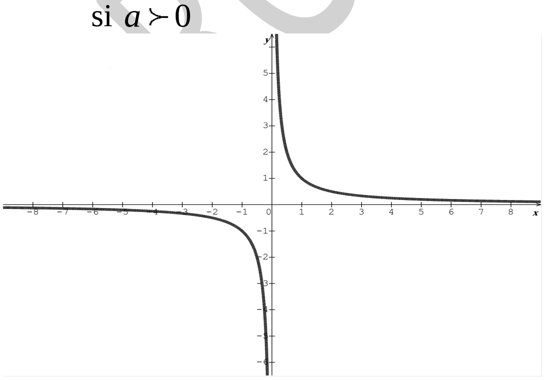
b) la courbe représentative de la fonction f s'appelle une hyperbole

c)Les éléments caractéristiques sont :

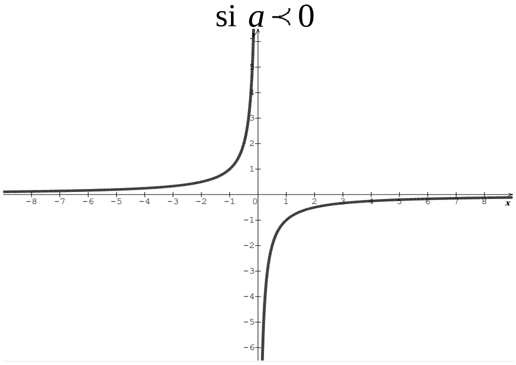
-Son centre de symétrie est l'origine du repère

- Ces deux asymptotes sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

si $a\succ 0$



si $a\prec 0$



8) Etude et représentation graphique des fonctions homographiques :

$x \xrightarrow{f} \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

f est une fonction homographique

- Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ on a $f(x) = \beta + \dfrac{\gamma}{x-\alpha}$ dite forme réduite de $f(x)$
- Soit $W(\alpha;\beta)$ donc dans le repère $(W;\vec{i};\vec{j})$ l'équation de (C_f) est $Y = \dfrac{\gamma}{X}$ avec $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$
- (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées
- Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations

respectives $x = \alpha$ **et** $y = \beta$

1iér cas : Si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \succ 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	‖	$\nearrow$

2iér cas : Si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \prec 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	‖	$\searrow$

9) Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle (s).

a)Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g .

- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points D'intersection de (C_f) et de (C_g)
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g)
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au- dessous de (C_g)

b) Position relative de deux courbes et intersection

Pour étudier la position relative de deux courbes (C_f) et (C_g) on étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$

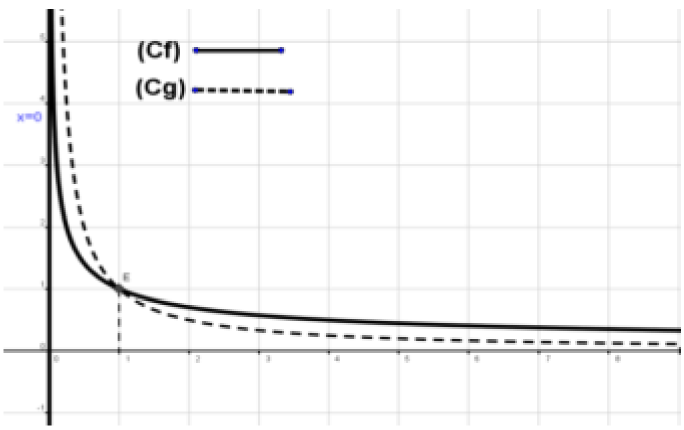
- Dans le cas où $f(x) - g(x) \succ 0$ on en déduit que $f(x) \succ g(x)$ et par conséquent (C_f) est au-dessus de (C_g)

- Dans le cas où $f(x) - g(x) \prec 0$ on en déduit que $f(x) \prec g(x)$ et par conséquent (C_f) est au-dessous de (C_g)

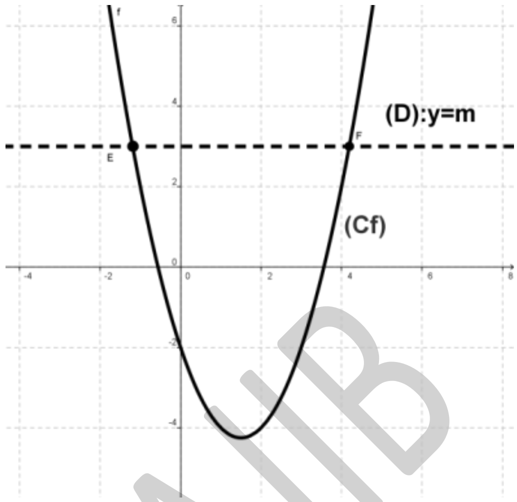
- Dans le cas où $f(x) - g(x) = 0$ on en déduit qu'il y a intersection

Exemple1: On a représenté ci-dessous (C_f) et (C_g) les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur$]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Graphiquement : on constate que (C_f) est au-dessus de (C_g) sur $]0;1[$ et que (C_f) est en-dessous de (C_g) sur $]1;+\infty[$



c) Equation : $f(x)=m$ **et inéquation** $f(x)\geq m$



• Les solutions de l'équation $f(x)=m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y=m$

• Les solutions de l'inéquation $f(x)\geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y=m$.