

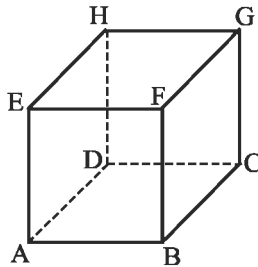
Produit scalaire – Produit vectoriel dans l'espace

I. Rappels

I. 1 Déterminants

Activité 1

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.



Soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

Le déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $\mathcal{B}$ est le réel $a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'')$.

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on note $\mathcal{B}$ la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Déterminer les coordonnées de chacun des sommets du cube.

Calculer $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$, $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$, $\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et $\mathcal{B}$ désigne la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

On considère les points $A(1, 2, 0)$,

$B(0, -1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$, $D(0, 1, 0)$ et $E(1, 2, -2)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2. Les points B, C, D et E sont-ils coplanaires ?

Soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace.

Les points A, B, C et D sont coplanaires, si et seulement si, le déterminant de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ dans la base $\mathcal{B}$ est nul.

I. 2. Produit scalaire dans l'espace

Activité 3

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.

1. Exprimer à l'aide de a les produits scalaires ci-dessous.

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}, \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DE}.$$

2. Exprimer à l'aide de a les distances AC, AF, DH et DF.

* Soit A, B et C des points de l'espace.

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel défini par

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls.

$$* \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2.$$



Propriétés (Rappel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et tous réels α et β

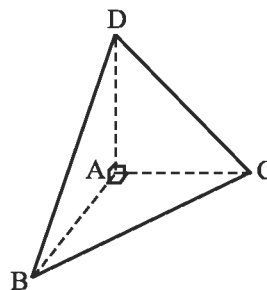
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- $(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Activité 4

Dans la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre tel que les triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles et isocèles en A.

On suppose de plus que $AB = AC = AD = 1$.

1. Montrer que le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité P du triangle ABC.
3. On désigne par G le centre de gravité du tétraèdre ABCD, c'est-à-dire le point tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Déterminer les coordonnées de G.
4. Montrer que $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DP}$.



On dit que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé si,
 $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Activité 5

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1, I et J les milieux respectifs de [FB] et [CD] et K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.

Utiliser un repère orthonormé adéquat pour répondre aux questions ci-dessous.

1. Calculer $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{IJ}$.
2. a. Calculer $\overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KC}$.
 b. En déduire la mesure en radian de l'angle $\widehat{AKC}$.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

- Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$,
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
- Pour tous points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$,
 $MM' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.



II. Produit vectoriel dans l'espace

II.1. Orientation de l'espace et d'un plan de l'espace

Orientation de l'espace

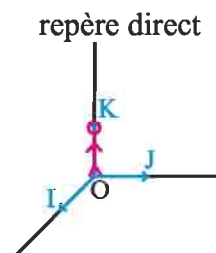
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

Considérons les points de l'espace I, J et K tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OK} = \vec{k}$.

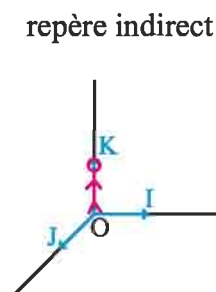
Un observateur d'Ampère pour ce repère est un personnage placé le long de (OK) , les pieds en O et qui regarde dans la direction de (OI) .

Le plan (OIK) partage l'espace en deux demi-espaces, l'un à gauche de l'observateur et l'autre est à sa droite.

- Si (OJ) est dans le demi-espace placé à gauche de l'observateur, on dit que le repère est direct.



- Si (OJ) est dans le demi-espace placé à droite de l'observateur, on dit que le repère est indirect.



Orienter l'espace c'est choisir l'un de ces repères.

On dit que l'espace est orienté dans le sens direct s'il est muni d'un repère direct.

On dit que l'espace est orienté dans le sens indirect s'il est muni d'un repère indirect.

Nous admettrons qu'étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ a toujours la même orientation quelque soit le point O de l'espace.

- On dit que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe, dans le cas où le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct.
- On dit que la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirecte, dans le cas où le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirect.
- Chaque permutation de deux vecteurs d'une base change l'orientation de cette base.
- Chaque permutation circulaire des trois vecteurs conserve l'orientation de la base.
- En remplaçant un vecteur d'une base par son opposé, on change l'orientation de cette base.



Activité 1

L'espace est muni d'un repère direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Parmi les bases ci-dessous préciser celles qui sont directes et celles qui sont indirectes.

$(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$, $(\vec{j}, \vec{k}, \vec{i})$, $(\vec{i}, -\vec{j}, \vec{k})$, $(-\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$, $(\vec{k}, \vec{i}, -\vec{j})$, $(-\vec{i}, -\vec{k}, -\vec{j})$.

Exercice résolu 1

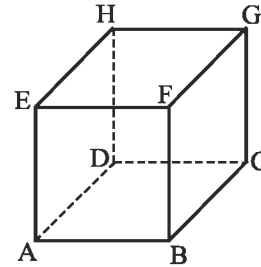
La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

On munit l'espace du repère orthonormé direct

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Dire pour chacune des bases ci-dessous si elle est directe ou indirecte.

$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{FG})$; $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC})$.

**Solution**

1. On sait que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est directe.

La base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ est obtenue à partir de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ par permutation des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$. On en déduit que la base $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ est indirecte.

2. Il est clair que $(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HD}, \overrightarrow{FG}) = (\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

La base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est obtenue par une permutation des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On en déduit que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est indirecte, puis que $(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est directe.

3. Il est clair que $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$. On en déduit que la base $(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DC})$ obtenue à partir de la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ par permutation des trois vecteurs, est directe.

Orientation d'un plan de l'espace.

Soit P un plan de l'espace orienté et O un point de P.

On considère la perpendiculaire Δ à P en O, un point C de Δ distinct de O, deux points A et B de P tels que O, A et B ne soient pas alignés.

- Le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ de P est dit direct si $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère cartésien direct de l'espace.
- Le repère cartésien $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ de P est dit indirect si $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère cartésien indirect de l'espace.



II. 2 Produit vectoriel

Théorème

Soit P un plan.

Pour toute base $(\vec{i}, \vec{j})$ de P et tout réel $d > 0$, il existe un unique vecteur $\vec{k}$ vérifiant

$\|\vec{k}\| = d$, $\vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$ et la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur défini comme suit.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v}, \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ est une base directe,} \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \alpha, \end{cases}$$

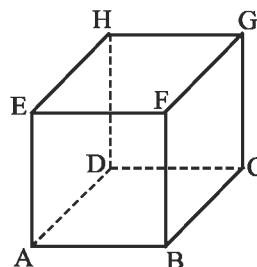
où α est la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants de même origine de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice résolu 2

L'espace est orienté dans le sens direct.

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{GH}$.



Solution

- Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et vérifie les deux conditions : la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$ est directe et $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = AB \cdot AD \sin(\widehat{BAD})$.

On en déduit que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.

- $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$.
- $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EF} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{GH} = \vec{0}$ car les vecteurs sont colinéaires.



Théorème

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$.
- $a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab(\vec{u} \wedge \vec{v})$, pour tous réels a et b .
- $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Activité 2

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté.

Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Activité 3

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace orienté.

Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

Activité 4

Soit A et B deux points distincts de l'espace orienté et I le milieu du segment $[AB]$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$.

Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée directe**Théorème**

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tous vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k}$.

Activité 5

L'espace est muni d'une repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives

$A(-1, 2, 1)$, $B(1, -6, -1)$, $C(2, 2, 2)$ et $I(0, 1, -1)$.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AI} \wedge (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI})$; $2\overrightarrow{AI} \wedge (-3\overrightarrow{BC})$.



Activité 6

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

On considère quatre points $A(1, 0, -1)$, $B(1, -2, 1)$ et $C(0, -1, 2)$ et $D(3, 1, 0)$

1. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Donner une valeur approchée, en radian, à 0.1 près de la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.
3. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) .

Activité 7 (distance d'un point à une droite)

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, A un point de l'espace et D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On considère un point M de l'espace n'appartenant pas à la droite D et H le projeté orthogonal de M sur la droite D .

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}$.

2. En déduire que $MH = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Définition

On appelle distance d'un point M à une droite D , la distance MH , où H est le projeté orthogonal de M sur D . Cette distance est notée $d(M, D)$.

Théorème

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D .

La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel $d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

Activité 8

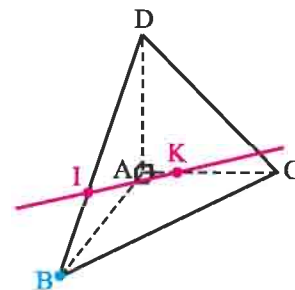
Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un tétraèdre tel que les triangles ABC , ABD et ACD sont rectangles et tels que $AB = AC = AD = 1$.

On munit l'espace du repère orthonormé

direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Soit I le point de (BD) tel que

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ et K le point (AC) tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Calculer la distance de B à la droite (IK) .



II. 3 Aires et volumes

Activité 9

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Montrer que $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace,

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

Activité 10

Soit ABCD un parallélogramme.

1. Montrer que l'aire de ABCD est égale à $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$.
2. En déduire l'aire du triangle ABD.

Théorème

- L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$.
- L'aire d'un triangle ABD est égale à $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$.

Activité 11

Soit ABCDEFGH un cube de centre O tel que le repère $R = (A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ soit direct.

On désigne par I, J, K et L les centres respectifs des faces ABFE, BCGF, CDHG et ADHE.

1. Déterminer $\vec{AB} \wedge \vec{AD}$.
2. Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.
3. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{IJ} \wedge \vec{IL}$
b. En déduire l'aire du parallélogramme IJKL.
4. Calculer le volume de la pyramide AIJKL.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égal à

$$|(\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \cdot \vec{AE}| = |\det(\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})|.$$



Démonstration

Soit M le point de l'espace tel que

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$ et K le projeté orthogonal de E sur la droite (AM).

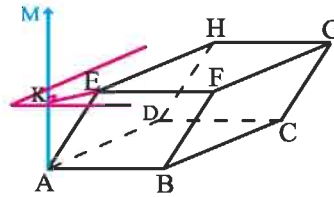
On sait que le volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède ABCDEFGH est égal au produit de l'aire du parallélogramme ABCD et de la distance AK,

D'où $\mathcal{V} = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\overrightarrow{AK}\|$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AK}$ étant colinéaires, on en déduit que $|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AK}| = \|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\overrightarrow{AK}\|$.

Par suite, $\mathcal{V} = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AK}| = |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}|$.

Le théorème en découle.



Activité 12

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(-1,3,0)$, $D(2,2,2)$, $E(3,2,2)$, $F(2,5,2)$ et $G(1,5,2)$.

1. Montrer que OABCDEFGH est un parallélépipède.
2. Calculer le volume du parallélépipède OABCDEFGH.

Activité 13

L'espace est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un tétraèdre et H le projeté orthogonal de A sur (BCD).

1. Montrer que $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{HA}$.
2. En déduire que $|(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| \cdot \|\overrightarrow{HA}\|$.
3. Montrer alors que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6} |(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}|$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

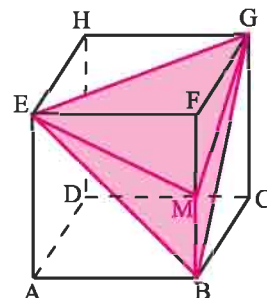
Le volume d'un tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6} |(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{6} |\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})|$.

Exercice résolu 3

L'espace est orienté dans le sens direct.

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête a et M est le milieu du segment [BF].

1. Déterminer le volume du tétraèdre MEBG.
2. En déduire le volume du solide S formé du cube privé du tétraèdre.



Solution

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$.

1. On sait que le volume du tétraèdre MEBG est égal à $\frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BM}) \right|$.

Dans le repère $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$, les points B, E, M et G ont pour coordonnées respectives $(a, 0, 0)$, $(0, 0, a)$, $\left(a, 0, \frac{a}{2}\right)$ et (a, a, a) .

Le calcul donne $\frac{1}{6} \left| \det(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BM}) \right| = \frac{1}{12} a^3$.

2. On en déduit que le volume de S est égal à $\frac{11}{12} a^3$.

Activité 14

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK})$.

On considère les points $R(1, 1, 0)$, $M(1, 1, 1)$, $N(0, 1, 1)$ et $L(1, 0, 1)$.

1. Montrer que OIRJKLMN est un cube.

2. On note A le milieu de $[IL]$ et B le point défini par $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{KN}$.

a. Déterminer les coordonnées des points A et B.

b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

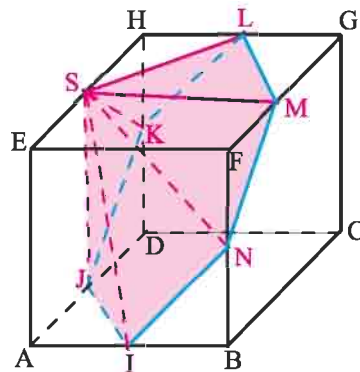
c. En déduire l'aire du triangle OAB.

3. Déterminer le volume du tétraèdre OABK.

Activité 15

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K, L, M, N et S sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AD]$, $[DH]$, $[HG]$, $[FG]$, $[FB]$ et $[EH]$.

Déterminer le volume de la pyramide SIJKLMN.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{v} = -2\vec{u}$ et $\|\vec{v}\| = 2$.

Le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à

☐ -2.

☐ 2.

☐ 4.

2. Soit A, B et C trois points non alignés. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est

☐ Normal au plan ABC.

☐ directeur du plan ABC.

☐ directeur à la droite (BC).

3. Si ABCD est un parallélogramme alors

☐ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}$.

☐ $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\|$.

☐ $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

4. Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

a. Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est égal à

☐ $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.

☐ $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DC}$.

☐ $\sqrt{2} \overrightarrow{AE}$.

b. Le vecteur $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{EG}$ est égal à

☐ $\vec{0}$.

☐ $\overrightarrow{BD}$.

☐ $\overrightarrow{BF}$.

c. Le réel $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{FH}$ est égal à

☐ 2.

☐ 0.

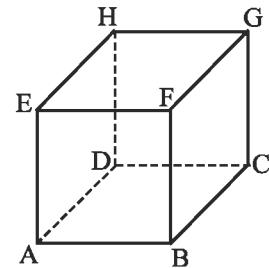
☐ $\sqrt{2}$.

d. Le volume du tétraèdre FBEG est égal à

☐ $\frac{1}{6}$.

☐ $\frac{1}{3}$.

☐ $\frac{1}{2}$.



VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.

Si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ alors la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. Pour tous vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ est liée.

3. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

a. Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{v}$ alors $\vec{v} = \vec{0}$.

b. Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ alors $\vec{v} = \vec{w}$.

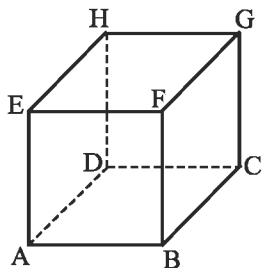
c. Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{w}$ alors $\vec{v} = \vec{w}$.



Exercices et problèmes

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- 1** Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.



En utilisant un repère orthonormé adéquat, calculer

$$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{FH} ; \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{HC} ; \overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{GB} ; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HB}.$$

- 2** Soit ABCD un tétraèdre régulier de côté 1.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
3. En déduire que deux arêtes opposées sont orthogonales.

- 3** Dans chacun des cas suivants, dire si le repère proposé est orthogonal.

- a. $(O, \vec{j} + \vec{k}, \vec{k} - \vec{j}, \vec{i})$.
- b. $(O, \vec{i} - \vec{j}, \vec{j} - \vec{k}, \vec{k} - \vec{i})$.

- 4** Soit ABC un triangle.

1. En écrivant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, montrer que

$$\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

2. Montrer que $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

3. En déduire que

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\sin \hat{C}} = \frac{\overrightarrow{AC}}{\sin \hat{B}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\sin \hat{A}}.$$

- 5** Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

- a. $\vec{u} = \vec{j} - 2\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.
- b. $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$.
- c. $\vec{u} = \vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$ et $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$.

- 6** Calculer $\vec{j} \wedge \vec{k}$; $\vec{k} \wedge \vec{i}$; $\vec{i} \wedge (-\vec{j})$; $2\vec{j} \wedge -3\vec{k}$.

- 7** Soit $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{w} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
2. Trouver un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.
Trouver tous les vecteurs $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$.
3. Trouver un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.

- 8** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs vérifiant $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 4$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$. Soit $\vec{w} = 2\vec{u} \wedge \vec{v} - 3\vec{v}$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{w}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\|\vec{w}\|$.

- 9** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires est orthogonaux et soit $\vec{w}$ un vecteur vérifiant $\vec{u} = \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{v}$.

1. Montrer que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et que sa norme vaut $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. Montrer que $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u} \wedge \vec{v}$.

- 10** Trouver dans chacun des cas ci-dessous un vecteur non nul $\vec{w}$ orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c. $\vec{u} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2-\sqrt{2} \\ 3-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

- 11** On considère les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les composantes des vecteurs

$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Que remarque-t-on ?

Produit scalaire – Produit Vectoriel dans l'espace



Exercices et problèmes

12 Soit les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-1, 2, 2)$, $D(3, 0, 0)$ et $E(-4, 3, 4)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
2. En déduire que les points A, B, C, D et E sont coplanaires.

13 Déterminer dans chacun des cas ci-dessous la distance du point A à la droite (BC).

$A(1, 1, 1)$; $B(-1, 0, 1)$ et $C(0, 0, 1)$.

$A(-1, 2, 0)$; $B(-1, 5, 0)$ et $C(-3, 7, -3)$.

$A(1, -1, 2)$; $B(1, 0, 1)$ et $C(0, 1, 2)$.

14 Soit la droite $D: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le point

$A(0, 3, -2)$.

1. a. Déterminer la distance de A à un point M de D.
- b. Pour quelle valeur de t cette distance est-elle minimale ?
- c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur D.

15 Soit les points $A(0, 0, 3)$, $B(1, 1, 0)$, $C(3, 0, 0)$ et $D(0, 3, 0)$.

1. Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
 2. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
 3. Montrer que le triangle ACD est équilatéral.
- Soit H le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD). Calculer BH.

16 Soit ABCDEFGH un cube de centre O et d'arête 1. On désigne par I le milieu du segment [AB],

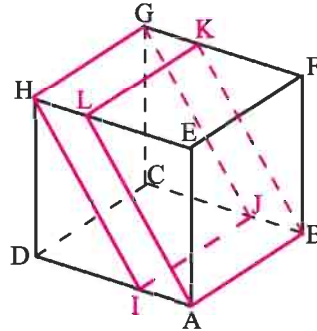
J et K les centres respectifs des faces ABFE et ABCD.

1. Montrer que O, I, J et K sont coplanaires.
2. Quelle est la nature du quadrilatère OKIJ ?
3. Quel est le volume de la pyramide BIJK ?

17 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

Soit I, J, K et L les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{HL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} \text{ et } \overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}.$$



1. Montrer que ABKLIJGH est un parallélépipède.
2. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- a. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
- b. En déduire le volume du parallélépipède ABKLIJGH.

18 Soit ABCDEFGH un cube tel que le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$ soit orthonormé direct.

On désigne par K le centre du carré ADHE et J le milieu de [BG].

Donner un représentant de chacun des vecteurs

1. $\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$.
2. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$.
3. Donner un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AJ}$.

19 Soit ABCDEFGH un cube tel que le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ soit orthonormé direct.

On désigne par I le milieu de [EF] et K le centre du carré ADHE.

1. a. Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.
- b. En déduire l'aire du triangle IGA.
2. Calculer le volume du tétraèdre ABIG.

Produit scalaire – Produit Vectoriel dans l'espace

