Méthodes et astuces et remarques et conseils : polynôme

La division euclidienne est la méthode de factorisation qui est certainement la plus technique

Voyons sur un exemple ce qu'est cette division euclidienne et comment factoriser un polynôme.
On considère le polynôme P défini pour tout réel x par : **P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x + 8**
Une racine de ce polynôme P est le réel **a = - 2**.
Donc il existe un polynôme Q tel que pour tout réel x : $P(x)=(x+2)\times Q(x)$ car ($x-(-2)=x+2$)

Ce polynôme $Q(x)$ est le **quotient** de la division euclidienne du polynôme P par le polynôme x + 2.
Procédons à celle-ci : Comment diviser $P(x)$ par x + 2.?
Posez la division comme d'habitude avec les nombres
Revenons sur la division euclidienne version " nombres entiers".
La division euclidienne d'un entier par un autre conduit à un quotient et à un reste.
Par exemple, divisons euclidienne de 317 par 13 :

$$\begin{array}{r|l} 317 & 13 \\ \cline{2-2} -26 & 24 \\ \cline{1-1} 57 & \\ -52 & \\ \cline{1-1} 5 & \end{array}$$

donne pour quotient 24 et pour reste 5.
On peut donc écrire que : **Dividende = Quotient** × **Diviseur + Reste** : 317 = 24.13 +5
(Le reste est toujours strictement inférieur au diviseur.)
D'une manière similaire, on définit la division des polynômes :
Démarches à suivre : Pour effectuer la division du polynôme : **P(x) = 5x^3 + 7x^2 - 2x + 8** par **x + 2 .**
Ordonnez les polynômes par degré décroissant et Posez la division comme suite:

- Par combien faut-il multiplier x pour trouver $5x^3$? Et bien c'est : $5x^2$

On reporte $5x^2$ dans la partie quotient et on effectue l'opération : $5x^2(x+2)=5x^3+10x^2$

La Soustraction de : 5x^3 + 7x^2 - 2x + 8 et $5x^3+10x^2$ donne : $-3x^2-2x+8$

$$\begin{array}{rr|l} & 5x^3+7x^2-2x+8 & x+2 \\ \cline{3-3} - & 5x^3+10x^2 & 5x^2 \\ \cline{2-2} & -3x^2-2x+8 & \end{array}$$

- On répète l'opération : Par combien faut-il multiplier x pour trouver $-3x^2$? Et bien c'est : $-3x$

On reporte $-3x$ dans la partie quotient et on effectue l'opération : $-3x(x+2)=-3x^2-6x$

La Soustraction de : $-3x^2-2x+8$ et $-3x^2-6x$ donne : $4x+8$

$$\begin{array}{rr|l} & 5x^3+7x^2-2x+8 & x+2 \\ \cline{3-3} - & 5x^3+10x^2 & 5x^2-3x \\ \cline{2-2} & -3x^2-2x+8 & \\ - & 3x^2+6x & \\ \cline{2-2} & 4x+8 & \end{array}$$

- On répète l'opération : Par combien faut-il multiplier x pour trouver $4x$? Et bien c'est : 4

On reporte 4 dans la partie quotient et on effectue l'opération : $4(x+2)=4x+8$

$$\begin{array}{rr|l} & 5x^3+7x^2-2x+8 & x+2 \\ \cline{3-3} - & 5x^3+10x^2 & 5x^2-3x+4 \\ \cline{2-2} & -3x^2-2x+8 & \\ - & 3x^2+6x & \\ \cline{2-2} & 4x+8 & \\ & 4x+8 & \\ \cline{2-2} & 0 & \end{array}$$

La Soustraction de : $4x+8$ et $4x+8$ donne : 0
L'intérêt de la division euclidienne version polynôme dans ce cas est de Factoriser :
car **R(x) = 0**
Alors on a pour tout réel x : P(x) = (x + 2). Q(x)
C'est-à-dire : $P(x)=(x+2)(5x^2-3x+4)$
(factorisation)
Comme pour les entiers, on dit alors que le polynôme **P(x)** est divisible par le polynôme **x + 2**

Remarque : Le reste R(x) a un degré qui est toujours strictement inférieur à celui du **diviseur** P(x).

$$\begin{array}{r|l} P(x) & x+2 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$