Exercices avec solutions TRIGONOMÉTRIE2

Partie 2 : Equations et inéquations trigonométriques

Types d'exercices : Application directe du cours (*) Difficulté moyenne (**) Demande une réflexion (***)

Exercice 1 : (*) A l'aide d'un cercle trigonométrique seulement, donner toutes les valeurs possibles de x vérifiant les conditions données.

1) $\cos x=\frac{1}{2}$ et $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec : $x\in]-\pi,\pi]$

2) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ avec : $x\in]-\pi,\pi]$

3) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin x=-\frac{1}{2}$ avec : $x\in[-\pi,3\pi]$

4) $\cos x=0$ et $\sin x=-1$ avec : $x\in[-2\pi,3\pi]$

Solution: 1) $x=-\frac{\pi}{3}$ 2) $x=\frac{\pi}{4}$

3) $x\in\left\{-\frac{5\pi}{6};\frac{7\pi}{6}\right\}$ 4) $x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$

Exercice 2: (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

a) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos x=-\frac{1}{2}$ c) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$

Solution: a) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

On sait que : $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a : $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\cos x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x=-\cos\frac{\pi}{3}$

Équivaut à: $\cos x=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

C'est-à-dire : $\cos x=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$

Sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;-\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\cos^2 x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos^2 x-\frac{1}{2}=0$

Équivaut à : $\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

Équivaut à : $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C'est-à-dire : $\cos x=\cos\frac{\pi}{4}$ ou $\cos x=\cos\frac{3\pi}{4}$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+2k\pi;\frac{3\pi}{4}+2k\pi;-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right\}$

avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 3: (*) (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\sin x=-\frac{1}{2}$ c) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$

Solution: a) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\sin x=\sin\frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

C'est-à-dire : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{2\pi}{3}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) $\sin x=-\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x=-\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ et

$\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$

Sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{7\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

c) $\sin^2 x=\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin^2 x-\frac{1}{2}=0$

Équivaut à : $\left(\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$

Équivaut à : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

C'est-à-dire : $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$ ou $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

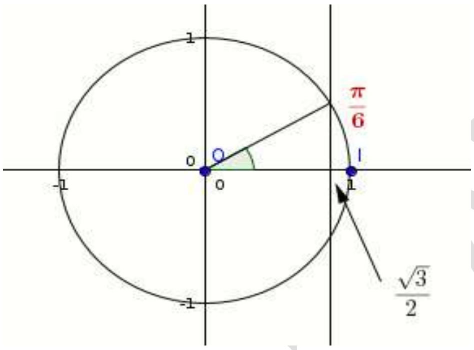
Ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$: $k \in \mathbb{Z}$

Ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$

avec $k \in \mathbb{Z}$

Exercice 4: (*) (**) Résoudre dans $]-\pi, \pi]$ l'équation : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution: Étape 1 : Utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de retrouver une valeur dont le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$:Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses



On peut dire que : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ est le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ par exemple.

Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme " $\cos U = \cos V$ "

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{6}$

On applique alors la propriété

Donc on a : $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité, j'obtiens

$x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \mathbb{Z}$

- Étape3 :Mais il ne va falloir garder que les valeurs de x dans l'intervalle imposé c'est à dire dans $]-\pi, \pi]$

on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs a k

Pour la première série de valeurs $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ avec k dans **Z**

Prenons par exemple la valeur $k = -2$ et remplaçons on obtient $x = \frac{\pi}{12} - 2\pi$; cette valeur n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$; il est donc évident que des valeurs de k inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis $k = -1$:

On a : $x = \frac{\pi}{12} - \pi$; cette valeur appartient à $]-\pi, \pi]$.

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de k telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour $k = -1$ $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 0$ $x_2 = \frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k = 1$ $x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour $k = 1$, la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de k)

Faisons de même pour la deuxième série de valeurs $x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$ avec k' dans **Z**

pour $k' = -1$ $x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 0$: $x_3 = -\frac{\pi}{12}$ convient car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 1$ $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$ convient pas car appartient à $]-\pi, \pi]$

pour $k' = 2$: $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi$ ne convient pas car n'appartient pas à $]-\pi, \pi]$

Donc L'ensemble solution de l'équation dans $\left]-\pi,\pi\right]$ est donc: $S=\left\{-\frac{11\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{11\pi}{12}\right\}$

Exercice 5: (*) Soit l'équation : $-\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$

Trouvez les solutions de l'équation dans l'intervalle [0,4π] .

Solution: On isole l'expression trigonométrique.

$-2\sin x-\sqrt{2}=0$ Équivaut à : $-2\sin x=\sqrt{2}$

C'est-à-dire : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Équivaut à : $\sin x=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ (on utilise le tableau)

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

(On peut aussi utiliser le cercle trigonométrique)

Ainsi: $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

On s'intéresse maintenant aux solutions situées dans l'intervalle [0,4π]

Pour obtenir toutes les solutions demandées

On remplace k par 0 et par 1:

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans [0,4π] est donc $S=\left\{\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{13\pi}{4};\frac{15\pi}{4}\right\}$

(On peut aussi faire des encadrements pour trouver toutes les solutions demandées).

Exercice 6: (*) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : b $\tan x=\sqrt{3}$.

2) Résoudre dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'équation suivante :

$\tan x=\sqrt{3}$.

Solution:1) On a : $\tan x=\sqrt{3}$ est définie dans $\mathbb{R}$

Équivaut à : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec ; $k\in\mathbb{Z}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ donc : $\tan x=\tan\frac{\pi}{3}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc L'ensemble de solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ l'équation: $\tan x=\sqrt{3}$

$\tan x=\sqrt{3}$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$

Donc les seules valeurs dans $\left]-\pi\,;\pi\right]$ sont :

$x=\frac{\pi}{3}$ et $x=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$

Par suite : $S=\left\{-\frac{2\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$

Exercice 7: (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\sin^2 x=1$

Solution: On effectue la racine carrée de chaque côté de l'égalité et on obtient:

$\sin x=1$ ou $\sin x=-1$

En regardant dans le cercle trigonométrique, on trouve que:

$\sin x=1$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

$\sin x=-1$ Équivaut à : $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$

Donc L'ensemble solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}$ *avec* $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 8 : (*) (**) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $4\tan x+4=0$

2) Résoudre dans $\left[-\pi,\pi\right[$ l'équation suivante :

$2\cos 2x+\sqrt{3}=0$

3) Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ l'équation suivante :

$2\sqrt{2}\sin x+2=0$

Solution:1) On a $4\tan x+4=0$ est définie dans $\mathbb{R}$

Équivaut à : $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$

$4\tan x+4=0$ Équivaut à : $\tan x=-1$

Équivaut à : $\tan x=-\tan\frac{\pi}{4}$

C'est-à-dire : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$

Sont : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

2) $2\cos 2x+\sqrt{3}=0$ Equivaut à : $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Équivaut à : $\cos 2x = -\cos\frac{\pi}{6}$

C'est-à-dire : $\cos 2x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x = \frac{5\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x = -\frac{5\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$ avec: $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$:

$-\pi \le \frac{5\pi}{12}+k\pi<\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Equivaut à: $-1\le \frac{5}{12}+k<1$ donc : $-1-\frac{5}{12}\le k<1-\frac{5}{12}$

C'est-à-dire : $-\frac{17}{12}\le k<\frac{7}{12}$

Par suite: $k=0$ ou $k=-1$

Si $k=0$ alors: $x=\frac{5\pi}{12}+0\pi=\frac{5\pi}{12}$

Si $k=-1$ alors: $x=\frac{5\pi}{12}-1\pi=\frac{-7\pi}{12}$

- Encadrement de : $x=-\frac{5\pi}{12}+k\pi$:

$-\pi\le -\frac{5\pi}{12}+k\pi<\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Equivaut à: $-1\le\frac{-5}{12}+k<1$ donc : $-\frac{7}{12}\le k<\frac{17}{12}$

Par suite: $k=0$ ou $k=1$

Si $k=0$ alors: $x=-\frac{5\pi}{12}+0\pi=-\frac{5\pi}{12}$

Si $k=1$ alors: $x=-\frac{5\pi}{12}+1\pi=\frac{7\pi}{12}$

Finalement: $S=\left\{-\frac{7\pi}{12};-\frac{5\pi}{12};\frac{5\pi}{12};\frac{7\pi}{12}\right\}$

3) $2\sqrt{2}\sin x+2=0$ Équivaut à : $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C'est-à-dire : $\sin x=-\sin\frac{\pi}{4}$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

L'équation a pour solutions :

$-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ et $\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{4}+2k\pi$:

$-\frac{\pi}{2}\le-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2}\le-\frac{1}{4}+2k\le\frac{5}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\le 2k\le\frac{5}{2}+\frac{1}{4}$

Donc $-\frac{1}{8}\le k\le\frac{11}{8}$

C'est-à-dire : $-0,12\le k\le 1,37$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve $x_1=-\frac{\pi}{4}+2\times0\pi=-\frac{\pi}{4}$

Pour $k=1$ on trouve $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\times1\pi=\frac{7\pi}{4}$

- Encadrement de $\frac{5\pi}{4}+2k\pi$:

$-\frac{\pi}{2}\le\frac{5\pi}{4}+2k\pi\le\frac{5\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $-\frac{1}{2}\le\frac{5}{4}+2k\le\frac{5}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}\le2k\le\frac{5}{2}-\frac{5}{4}$

Donc : $-\frac{7}{8}\le k\le\frac{5}{8}$ c'est-à-dire : $-0,8\le k\le0,6$

et $k\in\mathbb{Z}$ donc : $k=0$

Pour $k=0$ on trouve : $x_3=\frac{5\pi}{4}+2\times0\pi=\frac{5\pi}{4}$

Donc $S=\left\{-\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right\}$

Exercice 9: (*) (**) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **1)** $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) $\sin(2x)=\cos(3x)$ **3)** $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$

Solution: 1) on a : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Équivaut à : $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Équivaut à : $2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a : $\sin(2x)=\cos(3x)$

Équivaut à : $\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5} / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) On a : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\sqrt{3}$ équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=-\frac{\pi}{3}+k\pi$

Équivaut à : $-x=-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+k\pi$ donc : $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{7\pi}{12}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 10: (*) (**) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$ (E)

2) En déduire dans $[-\pi\,;2\pi[$ les solutions de l'équation (E)

Solution: 1) On a : $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{2}$

Équivaut à : $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $\frac{\pi}{4}-x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{4}-x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Équivaut à : $-x=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $-x=\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ ou $x=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{7\pi}{12}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) Résolution dans $[-\pi\,;2\pi[$ de l'équation (E)

- Encadrement de : $\frac{\pi}{12}+2k\pi$:

$-\pi\leq\frac{\pi}{12}+2k\pi<2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\leq\frac{1}{12}+2k<2$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{12}\leq 2k<\frac{23}{12}$

Cela signifie que : $-\frac{13}{24}\leq k<\frac{23}{24}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{\pi}{12}$

- Encadrement de : $-\frac{7\pi}{12}+2k\pi$:

$-\pi\leq-\frac{7\pi}{12}+2k\pi<2\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1\leq\frac{-7}{12}+2k<2$ alors : $-1+\frac{7}{12}\leq 2k<2+\frac{7}{12}$

C'est-à-dire : $-\frac{5}{24}\leq k<\frac{31}{24}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve : $x_2=\frac{-7\pi}{12}$

et Pour $k=1$ on trouve $x_3=\frac{17\pi}{12}$

Donc $S_{[-\pi\,;2\pi[}=\left\{\frac{-7\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{17\pi}{12}\right\}$

Exercice 11: (**) Soit x un réel tel que : $\sin x\times\cos x=\frac{1}{2}$ (E)

Montrer alors que : $\sin x=\cos x$ et déterminer tous les réels x qui vérifient l'égalité (E)

Solution: 1) on a : $\sin x\times\cos x=\frac{1}{2}$

Équivaut à : $2\sin x\times\cos x=1$

Or on a : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ donc :

$\sin^2 x+\cos^2 x=2\sin x\times\cos x$

Donc : $\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\times\cos x=0$

Équivaut à : $(\sin x-\cos x)^2=0$

Équivaut à : $\sin x-\cos x=0$

C'est-à-dire : $\sin x=\cos x$

Équivaut à : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $0=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ qui est impossible Donc : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : les réels x qui vérifient l'égalité (E)

Sont : $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 12: (*) (**) Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1) $\cos 2x=\cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[\pi\,;5\pi]$

2) $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi\,;2\pi]$

3) $\cos 3x=-\cos x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-2\pi\,;\pi]$

4) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $[4\pi\,;6\pi]$

5) $\sin(3x)=\cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

Solution: 1) On a : $\cos 2x=\cos\left(\frac{8\pi}{2}\right)$

Équivaut à : $\cos 2x=\cos(4\pi)$

Équivaut à : $\cos 2x=\cos(0)$

Équivaut à : $2x=0+2k\pi$ Équivaut à : $x=k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\{k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\}$

Pour la résolution dans : $[\pi\,;5\pi]$ on va encadrer :

Encadrement de $k\pi$: $\pi\le k\pi\le 5\pi$

Équivaut à : $1\le k\le 5$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{1;2;3;4;5\}$ par suite :

$x_1=\pi$; $x_2=2\pi$; $x_3=3\pi$; $x_4=4\pi$; $x_5=5\pi$

Donc : $S_{[\pi\,;5\pi]}=\{\pi;2\pi;3\pi;4\pi;5\pi\}$

2) on a : $\sin\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Équivaut à : $x-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{5}+2k\pi$ ou $x-\frac{2\pi}{3}=-\frac{\pi}{5}+2k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{13\pi}{15}+2k\pi$ ou $x=\frac{22\pi}{15}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{13\pi}{15}+2k\pi;\frac{22\pi}{15}+2k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Pour la résolution dans : $[-2\pi\,;2\pi]$ on va encadrer :

- Encadrement de $\frac{13\pi}{15}+2k\pi$:

$-2\pi\le\frac{13\pi}{15}+2k\pi\le 2\pi$ Équivaut à : $\frac{-43\pi}{15}\le 2k\pi\le\frac{17\pi}{15}$

Équivaut à : $\frac{-43}{30}\le k\le\frac{17}{30}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-1;0\}$ ce qui donne : $x_1=-\frac{17\pi}{15}$;

$x_2=\frac{13\pi}{15}$

- Encadrement de $\frac{22\pi}{15}+2k\pi$:

$-2\pi\le\frac{22\pi}{15}+2k\pi\le 2\pi$ Équivaut à : $\frac{-52}{30}\le k\le\frac{8}{30}$

$k\in\mathbb{Z}$ Donc : $k\in\{-1;0\}$ ce qui donne :

$x_3=-\frac{8\pi}{15}$; $x_4=\frac{22\pi}{15}$

Finalement : $S_{[-2\pi\,;2\pi]}=\left\{-\frac{17\pi}{15};\frac{13\pi}{15};\frac{-8\pi}{15};\frac{22\pi}{15}\right\}$

3) on a : $\cos 3x=-\cos x$ Équivaut à :

$\cos 3x=\cos(\pi-x)$

Équivaut à : $3x=\pi-x+2k\pi$ ou $3x=-(\pi-x)+2k\pi$

Équivaut à : $4x=\pi+2k\pi$ ou $2x=-\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ ou $x=-\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};-\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

Pour la résolution dans : $[-2\pi\,;\pi]$ on va encadrer :

- Encadrement de $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$:

$-2\pi\le\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\le\pi$ Équivaut à : $\frac{-9\pi}{4}\le\frac{k\pi}{2}\le\frac{3\pi}{4}$ $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\frac{-9}{2}\le k\le\frac{3}{2}$ $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k\in\{-4;-3;-2;-1;0;1\}$ ce qui donne :

$x_1=-\frac{7\pi}{4}$; $x_2=\frac{-5\pi}{4}$; $x_3=\frac{-3\pi}{4}$; $x_4=\frac{-\pi}{4}$; $x_5=\frac{\pi}{4}$; $x_6=\frac{3\pi}{4}$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{2}+k\pi$:

$-2\pi \le -\frac{\pi}{2}+k\pi \le \pi$ Équivaut à : $-\frac{3\pi}{2} \le k\pi \le \frac{3\pi}{2}$

C'est-à-dire : $\frac{-3}{2} \le k \le \frac{3}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Donc : $k \in \{-1;0;1\}$ ce qui donne :

$x_7 = -\frac{3\pi}{2}$; $x_8 = -\frac{\pi}{2}$; $x_9 = \frac{\pi}{2}$

Finalement :

$S_{[-2\pi\,;\,\pi]} = \left\{-\frac{7\pi}{4};\frac{-5\pi}{4};\frac{-3\pi}{4};\frac{-\pi}{4};\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{-3\pi}{2};\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$

4) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin x$ Équivaut à: $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin(-x)$

Équivaut à : $2x+\frac{\pi}{4}=-x+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4}=\pi-(-x)+2k\pi$

Équivaut à : $3x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

C'est-à-dire : $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3};\frac{3\pi}{4}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

• Encadrement de $-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}$:

$4\pi \le -\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3} \le 6\pi$ Équivaut à : $\frac{49\pi}{12} \le \frac{2k\pi}{3} \le \frac{73\pi}{12}$

Équivaut à : $\frac{49}{8} \le k \le \frac{73}{8} \quad k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k \in \{7;8;9\}$ ce qui donne :

$x_1 = \frac{55\pi}{12}$; $x_2 = \frac{63\pi}{12}$; $x_3 = \frac{71\pi}{12}$

• Encadrement de $\frac{3\pi}{4}+2k\pi$:

$4\pi \le \frac{3\pi}{4}+2k\pi \le 6\pi$ Équivaut à : $\frac{13\pi}{4} \le 2k\pi \le \frac{21\pi}{4}$

$k\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $\frac{13}{8} \le k \le \frac{21}{8} \quad k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=2$ ce qui donne : $x_4 = \frac{19\pi}{4}$

Finalement : $S_{[4\pi\,;\,6\pi]} = \left\{\frac{55\pi}{12};\frac{63\pi}{12};\frac{71\pi}{12};\frac{19\pi}{4}\right\}$

5) $\sin(3x)=\cos(2x)$ dans $\mathbb{R}$

$\sin(3x)=\cos(2x)$ Équivaut à : $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos(2x)$

Équivaut à : $\frac{\pi}{2}-3x=2x+2k\pi$ ou $\frac{\pi}{2}-3x=-2x+2k\pi$

Équivaut à : $5x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

C'est-à-dire : $x=\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2}$ ou $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2};\frac{\pi}{2}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 13: (*) (**) **1)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos 2x = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'équation suivante :

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation suivante :

$\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$

Solution: 1) On a : $\cos 2x = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $2x=x-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x=-\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $2x-x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $2x+x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

équivaut à : $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi;\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3} \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) On a $\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

Équivaut à :

$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}-x+2k\pi$ ou $2x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{4}+x+2k\pi$

Équivaut à : $3x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+2k\pi$

Donc $x=\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$ ou $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

• Encadrement de $\frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3}$: $0 \le \frac{7\pi}{36}+\frac{2k\pi}{3} \le \pi$

Donc $0\le \frac{7}{36}+\frac{2k}{3}\le 1$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{24}\le k\le \frac{29}{36}$

Cela signifie que : $-0,29\le k\le 1,2$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=1$

Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{7\pi}{36}$

Pour $k=1$ on trouve : $x_2=\frac{7\pi}{36}+\frac{2\pi}{3}=\frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de : $x=\frac{13\pi}{12}+2k\pi$

$0\le \frac{13\pi}{12}+2k\pi\le \pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $0\le \frac{13}{12}+2k\le 1$ c'est-à-dire : $-\frac{13}{24}\le k\le -\frac{1}{24}$

Cela signifie que : $-0,54\le k\le -0,04$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc k n'existe pas

- Donc $S_{[0.\pi]}=\left\{\frac{7\pi}{36};\frac{31\pi}{36}\right\}$

3) On a $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=1$ est définie

Équivaut à : $2x-\frac{\pi}{5}\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$

Équivaut à : $2x\ne\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

Équivaut à : $2x\ne\frac{7\pi}{10}+k\pi$ cela signifie que :

$x\ne\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2}$, donc $D=\mathbb{R}-\left\{\frac{7\pi}{20}+\frac{k\pi}{2};k\in\mathbb{Z}\right\}$

Or on sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Équivaut à : $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Donc : $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi$ équivaut à : $2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi$

Équivaut à : $x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

Encadrement de : $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2}\prec\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}\prec\frac{\pi}{2}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-\frac{1}{2}\prec\frac{9}{40}+\frac{k}{2}\prec\frac{1}{2}$ c'est-à-dire: $-\frac{29}{40}\prec\frac{k}{2}\prec\frac{11}{40}$

Donc : $-\frac{29}{40}\prec\frac{k}{2}\prec\frac{11}{40}$ donc : $-\frac{29}{20}\prec k\prec\frac{11}{20}$

Donc $-1,45\prec k\prec 0,55$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ ou $k=-1$

Pour $k=0$ on trouve : $x_1=\frac{9\pi}{40}$

Pour $k=-1$ on trouve : $x_2=\frac{9\pi}{40}-\frac{\pi}{2}=-\frac{11\pi}{40}$

Donc $S=\left\{-\frac{11\pi}{40};\frac{9\pi}{40}\right\}$

Exercice 14: (*) (**) Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1) $\tan x=\sin x$; $I=\mathbb{R}$

2) $\tan x=-\tan\frac{\pi}{12}$; $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

3) $\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; $I=\mathbb{R}$

4) $\tan x\times\tan 2x=1$; $I=\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

Solution: 1) On a $\tan x=\sin x$ est définie

Équivaut à : $x\ne\frac{\pi}{2}+k\pi$ Avec : $k\in\mathbb{Z}$

$\tan x=\sin x$ Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x=0$

Équivaut à : $\frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x)=0$

Équivaut à : $\tan x(1-\cos x)=0$

Équivaut à : $\tan x=0$ ou $1-\cos x=0$

C'est-à-dire : $\tan x=0$ ou $\cos x=1$

Équivaut à : $x=k\pi$ ou $x=2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}\cup\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}=\{k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$

2) $\tan x=-\tan\frac{\pi}{12}$; $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Équivaut à : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

Or on a : $-\frac{\pi}{2}\prec x\prec\frac{\pi}{2}$ donc : $-\frac{\pi}{2}\prec-\frac{\pi}{12}+k\pi\prec\frac{\pi}{2}$

Donc : $-\frac{1}{2}\prec-\frac{1}{12}+k\prec\frac{1}{2}$ c'est-à-dire: $\frac{1}{12}-\frac{1}{2}\prec k\prec\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$

Donc : $-\frac{5}{12}\prec k\prec\frac{7}{12}$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire: $k=0$ et par suite : $x=-\frac{\pi}{12}+0\times\pi=-\frac{\pi}{12}$

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation dans : $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est : $S=\left\{-\frac{\pi}{12}\right\}$

3) $\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1$; $I=\mathbb{R}$

Équivaut à : $\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

C'est à dire : $\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Qui signifie que : $2x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k\pi$

Équivaut à : $2x=\frac{5\pi}{12}+k\pi$

Donc : $x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}$ Avec : $k\in\mathbb{Z}$

Par suite l'ensemble des solutions de l'équation Dans $\mathbb{R}$ est : $S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4) $\tan x\times\tan 2x=1$; $I=\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$

Équivaut à : $\tan 2x=\frac{1}{\tan x}$

C'est à dire : $\tan 2x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

Équivaut à : $2x=\frac{\pi}{2}-x+k\pi$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

C'est à dire : $3x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec : $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$ avec : $-\frac{\pi}{4}\prec x\prec\frac{\pi}{4}$

Donc : $-\frac{\pi}{4}\prec\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\prec\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{1}{4}\prec\frac{1}{6}+\frac{k}{3}\prec\frac{1}{4}$

Donc : $-\frac{3}{2}\prec 1+2k\prec\frac{3}{2}$ c'est-à-dire : $-\frac{5}{2}\prec 2k\prec\frac{1}{2}$

Donc : $-\frac{5}{4}\prec k\prec\frac{1}{4}$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $k=0$ ou $k=-1$

Par suite : $x=\frac{\pi}{6}$ et $x=-\frac{\pi}{6}$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation dans $I=\left]-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right[$ est : $S=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$

Exercice 15: (**)

1) Montrer que : si $x\in\mathbb{R}$

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+11\pi\right)-1=\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)$$

2) Résoudre dans $]-\pi\,;\pi]$ l'équation suivante :

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+11\pi\right)-1=0 \quad (E)$$

3) Placer sur le cercle les solutions de l'équation (E).

4) Soient A ; B ; C les points trouvés dans la question 3)

Montrer que : ABC est un triangle équilatérale.

Solution: 1) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+11\pi\right)-1$

$=2\left(\cos x\right)^2-\cos\left(x+10\pi+\pi\right)-1$

$=2\left(\cos x\right)^2-\cos\left(x+\pi\right)-1$

$=2\left(\cos x\right)^2+\cos x-1$

Et on a $\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)=2\left(\cos x\right)^2+\cos x-1$

Donc :

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+11\pi\right)-1=\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)$$

2) $2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(x+11\pi\right)-1=0$

Équivaut à : $\left(\cos x+1\right)\left(2\cos x-1\right)=0$

Équivaut à : $\cos x+1=0$ ou $2\cos x-1=0$

C'est-à-dire : $\cos x=-1$ ou $\cos x=\frac{1}{2}$

Équivaut à : $\cos x=-1$ ou $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $x=\left(2k+1\right)\pi$ ou $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ ou

$x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

• Encadrement de $\left(2k+1\right)\pi$: $-\pi<\left(2k+1\right)\pi\leq\pi$

Donc $-1<2k+1\leq 1$ c'est-à-dire : $-2<2k\leq 0$

Équivaut à : $-1<k\leq 0$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et on trouve $x_1=\pi$

• Encadrement de $\frac{\pi}{3}+2k\pi$: $-\pi<\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{1}{3}+2k\leq1$

Donc $\frac{-4}{3}<2k\leq\frac{2}{3}$ c'est-à-dire : $\frac{-2}{3}<k\leq\frac{1}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et on trouve $x_2=\frac{\pi}{3}$

• Encadrement de $-\frac{\pi}{3}+2k\pi$:

On a : $-\pi<-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

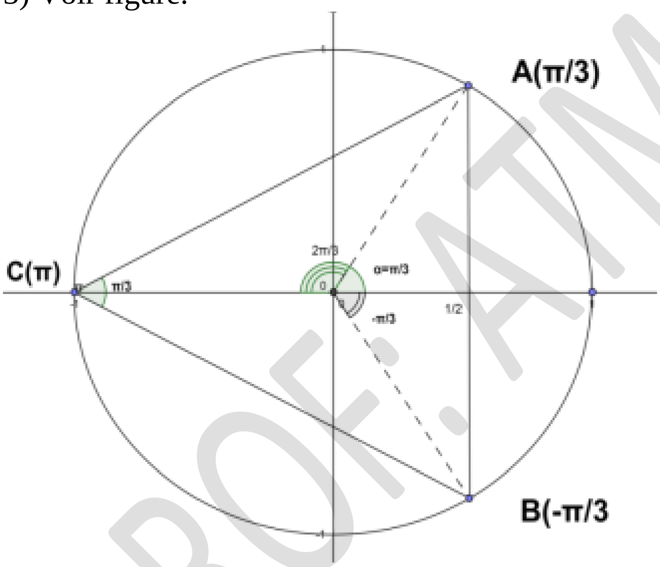
Donc $-1<-\frac{1}{3}+2k\leq1$ équivaut à : $\frac{-2}{3}<2k\leq\frac{4}{3}$

C'est-à-dire : $\frac{-1}{3}<k\leq\frac{2}{3}$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=0$ et on trouve $x_3=-\frac{\pi}{3}$

Donc $S_{]-\pi\,;\,\pi]}=\left\{\pi;\frac{\pi}{3};\frac{-\pi}{3}\right\}$

3) Voir figure.



4) Montrons que : ABC est un triangle équilatérale :
On a : $OA=OB=OC$ donc les triangles : OAB ; OAC ; OBC sont des triangles isocèles de sommet O

Exemple dans le triangle OAB on a : $AOB=\frac{2\pi}{3}$

Donc : $OAB=OBA=\frac{\pi}{6}$

De même on déduit que :

$OBC=OCB=OAC=OCA=\frac{\pi}{6}$

Équivaut à $ABC=BAC=ACB=\frac{\pi}{3}$

Par suite : ABC est un triangle équilatérale .

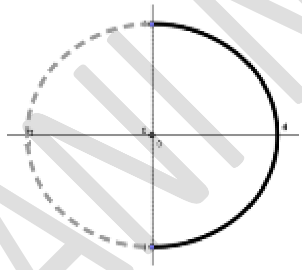
Exercice 16: (*) (**) Représenter sur un cercle trigonométrique l'ensemble des points du cercle associés aux réels x vérifiant :

1) $0\leq\cos(x)\leq1$ 2) $\cos(x)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$

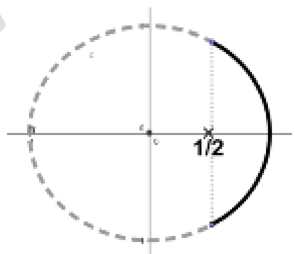
3) $-1<\sin(x)<0$ 4) $-\frac{1}{2}\leq\sin(x)\leq1$

5) $\sin(x)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[$ 6) $\cos(x)\in\left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

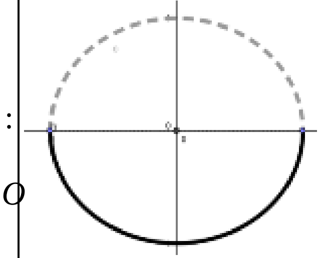
Solution: 1) $0\leq\cos(x)\leq1$



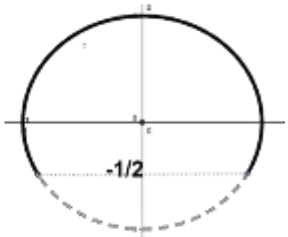
2) $\cos(x)\in\left[\frac{1}{2};1\right]$



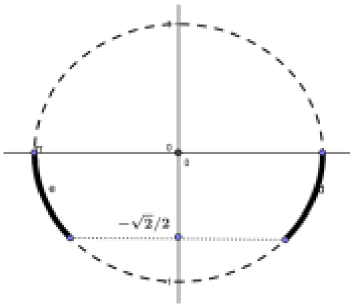
3) $-1<\sin(x)<0$



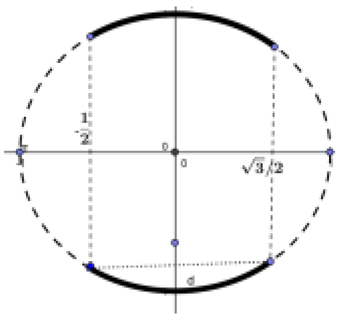
4) $-\frac{1}{2}\leq\sin(x)\leq1$



5) $\sin(x) \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right[$



6) $\cos(x) \in \left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$



Exercice17 : (**) Résoudre dans $[0,2\pi[$

l'inéquation suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

Solution : $\sin x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\frac{\pi}{6}$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

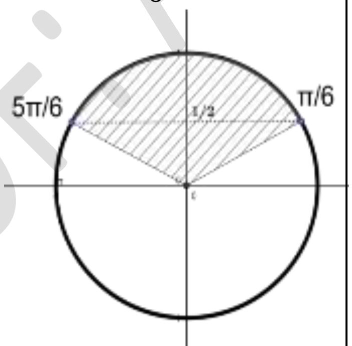
Équivaut à :

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$

alors : $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$



On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $\frac{1}{2}$ dans $[0,2\pi[$

On trouve que : $\sin x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à :

$x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$ Donc : $S = \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

Exercice18 : (**) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$

l'inéquation suivante : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

Solution: $\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

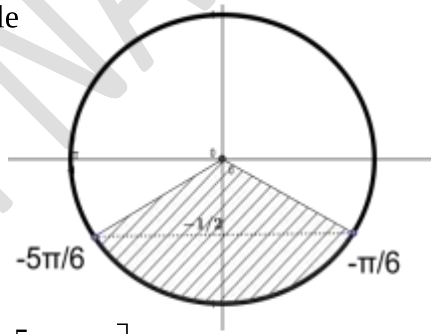
Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$

$\sin x \leq -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x \leq -\sin\frac{\pi}{6}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$



On trouve que : $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

Équivaut à : $x \in \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

Donc $S = \left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{6}\right]$

Exercice19 : (**) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$

l'inéquation suivante : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

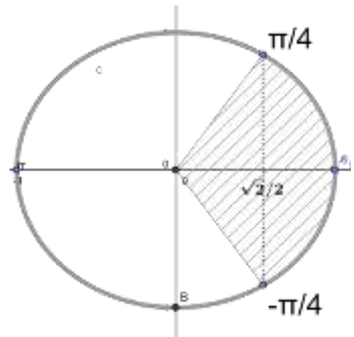
Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = -\frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4}$

$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à :

$\cos x \geq \cos\frac{\pi}{4}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\cos x$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$



On trouve que : $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à :

$x \in \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Donc : $S = \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

Exercice20: (**) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$

l'inéquation suivante : $\cos x \leq \frac{1}{2}$

Solution : $\cos x = \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$ alors : $x = -\frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

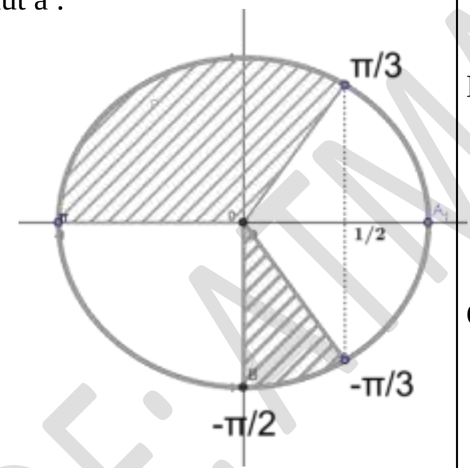
$\cos x \leq \frac{1}{2}$ Équivaut à :

$\cos x \leq \cos\frac{\pi}{3}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare :

$\cos x$ et $\frac{1}{2}$

Dans $\left]-\frac{\pi}{2};\pi\right]$



On trouve que :

$S = \left]-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$

Exercice21: (**) Résoudre dans $[0;2\pi]$

l'inéquation suivante : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

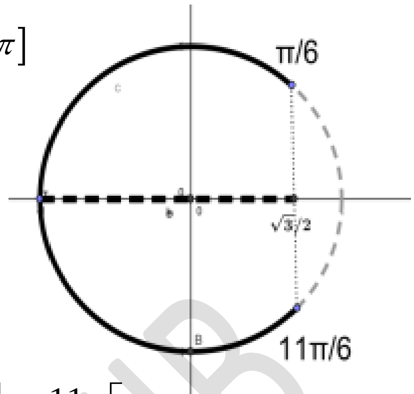
Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{11\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$

(on utilisant les encadrements)

$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x < \cos\frac{\pi}{6}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\cos x$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi]$



On trouve que : $S = \left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[$

Exercice22: (**) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$

l'inéquation suivante : $\cos x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\cos x = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

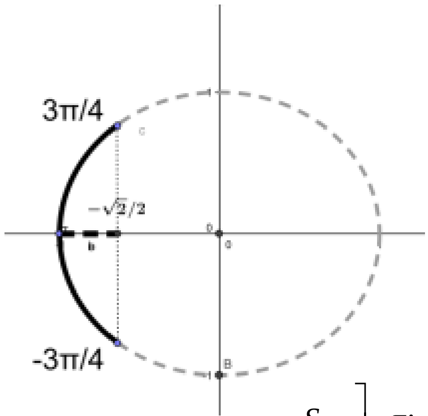
Équivaut à : $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque: $x \in]-\pi;\pi]$ alors : $x = \frac{3\pi}{4}$ ou $x = -\frac{3\pi}{4}$

$\cos x \leq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $\cos x \leq \cos\frac{\pi}{3}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare

$\cos x$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Dans : $]-\pi;\pi]$ on trouve que :



$S = \left]-\pi;-\frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Exercice23 : (**) Résoudre dans $[0;2\pi]$

l'inéquation suivante : $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à : $\sin x = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

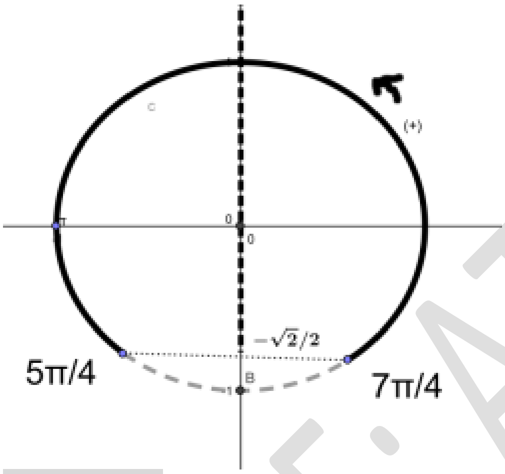
Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\sin x$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0;2\pi]$

On trouve que :

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ Équivaut à : $x \in \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Donc : $S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$



Exercice24: (**) Résoudre dans $]-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes : 1) $\cos x \leq 0$ 2) $\sin x \geq 0$

Solution : On utilise le cercle trigonométrique

1) $S = \left]-\pi,-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

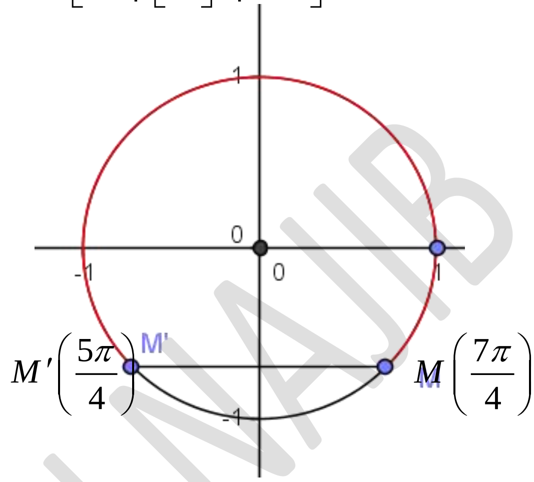
2) $S = [0,\pi]$

Exercice25: (**) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution: On sait que: $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

L'arc MM' en rouge correspond à tous les points $M(x)$ tel que : x Vérifie $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $S = \left[0;\frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$



Exercice26 : (**) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x - 1 \geq 0$

Solution : $\tan x - 1 \geq 0$ Équivaut à : $\tan x \geq 1$

- l'inéquation $\tan x - 1 \geq 0$ est définie si et seulement si : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$ alors : $x \neq \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{3\pi}{2}$

- Résolution de l'équation : $\tan x = 1$

$\tan x = 1$ Équivaut à :

$\tan x = \tan\frac{\pi}{4}$

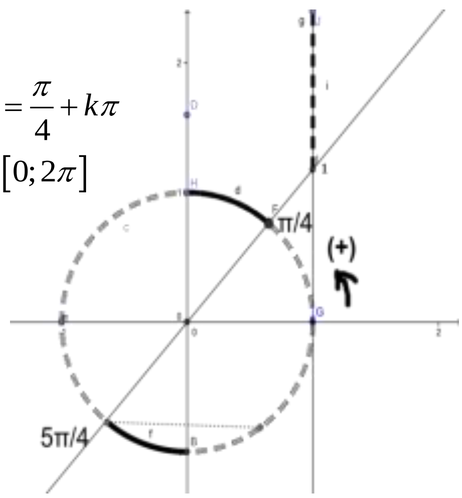
Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Et puisque : $x \in [0;2\pi]$

Alors : $x = \frac{5\pi}{4}$

ou $x = \frac{\pi}{4}$

On utilisant le cercle trigonométrique On compare $\tan x$ et 1 dans $[0;2\pi]$.



On trouve que : $\tan x \geq 1$

Équivaut à : $x \in \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

Donc : $S=\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{5\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[$

Exercice27 : (**) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'inéquation suivante : $\tan x \succ -1$

Solution :

• l'inéquation $\tan x \succ -1$ est définie si et seulement si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x\neq\frac{\pi}{2}$ et $x\neq\frac{3\pi}{2}$

• Résolution de l'équation : $\tan x=-1$

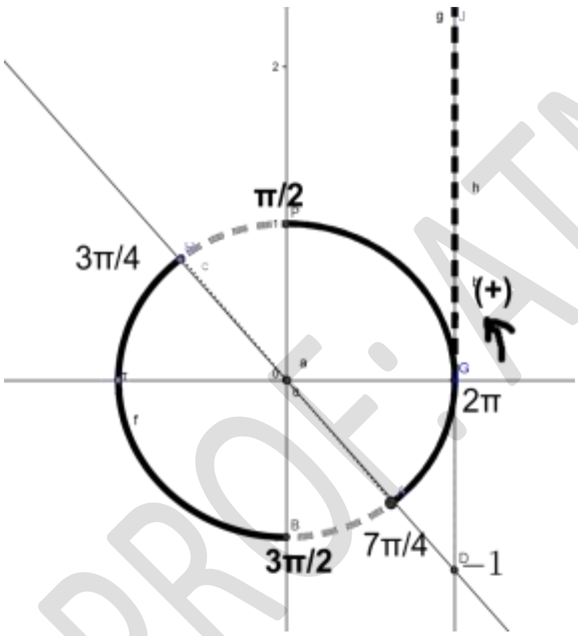
$\tan x=-1$ Équivaut à :

$\tan x=-\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[0;2\pi]$ alors : $x=\frac{7\pi}{4}$ ou $x=\frac{3\pi}{4}$

On utilisant le cercle trigonométrique



On compare $\tan x$ et -1 dans $[0;2\pi]$

On trouve que : $\tan x\succ -1$ Équivaut à :

$x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Donc : $S=\left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

Exercice28 : (**) Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ l'inéquation suivante : $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$

Solution :

• l'inéquation $3\tan x-\sqrt{3}\geq 0$ est définie si et seulement si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[-\pi;\pi]$ alors : $x\neq\frac{\pi}{2}$ et $x\neq-\frac{\pi}{2}$

• Résolution de l'équation : $3\tan x-\sqrt{3}=0$

On a : $3\tan x-\sqrt{3}=0$ Équivaut à : $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que : $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

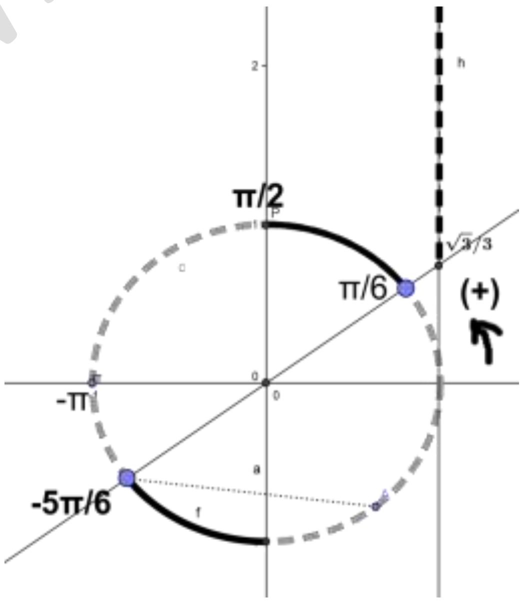
$\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Et puisque : $x\in[-\pi;\pi]$ alors : $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=-\frac{5\pi}{6}$

On utilisant le cercle trigonométrique on compare $\tan x$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$ dans $[-\pi;\pi]$

On trouve que :

$\tan x\succ\frac{\sqrt{3}}{3}$ Équivaut à : $x\in\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$



Donc : $S=\left[-\frac{5\pi}{6};-\frac{\pi}{2}\right[\cup\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$

Exercice29 : (***) **1)** a)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivantes : $2\sin^2 x-9\sin x-5=0$ et en déduire les solutions dans $[0;2\pi]$

b) Résoudre dans $\left[0\,;2\pi\right]$ l'inéquation suivante :

$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$

2) Résoudre dans $\left[0\,;\pi\right]$ l'inéquation suivante :

$(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \ge 0$

Solution:1) a) On pose $t = \sin x$ et l'équation $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$ devient :

$2t^2 - 9t - 5 \le 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 9t - 5$:

Calcul du discriminant :

$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$

Les racines sont : $t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2\times 2} = -\frac{1}{2}$ et

$t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2\times 2} = 5$ Donc $\sin x = -\frac{1}{2}$ et $\sin x = 5$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

$\sin x = -\frac{1}{2}$ Équivaut à : $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Donc : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Équivaut à : $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi ; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$:

$0 \le -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \le -\frac{1}{6} + 2k \le 2$ équivaut à : $\frac{1}{12} \le k \le \frac{13}{12}$

C'est-à-dire : $0{,}08 \le k \le 1{,}02$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 1$

Pour $k = 1$ on remplace on trouve

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

- Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$: $0 \le \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi$

Donc $0 \le \frac{7}{6} + 2k \le 2$ c'est-à-dire : $-\frac{7}{12} \le k \le \frac{5}{12}$

Donc $-0{,}5 \le k \le 0{,}41$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

Donc $S_{[0\,;2\pi]} = \left\{\frac{11\pi}{6} ; \frac{7\pi}{6}\right\}$

1) b) $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \le 0$ ssi

$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$

Or on sait que $-1 \le \sin x \le 1$ donc $-1 \le \sin x \le 1 < 5$

c'est-à-dire : $\sin x - 5 < 0$

Puisque $\sin x - 5 < 0$ et $2 > 0$ alors

$2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \le 0$

Équivaut à : $\sin x + \frac{1}{2} \ge 0$

Équivaut à : $\sin x \ge -\frac{1}{2}$ équivaut à : $\sin x \ge \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

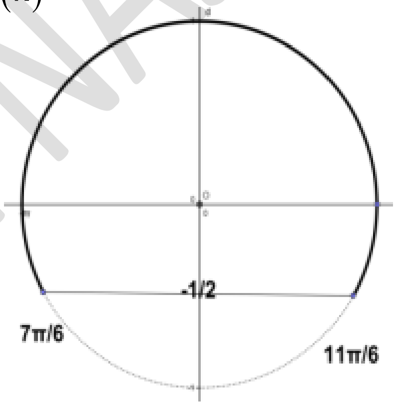
L'arc en trait plein correspond

à tous les points $M(x)$

Tel que : x vérifie

$\sin x \ge -\frac{1}{2}$

Donc



$S = \left[0 ; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$

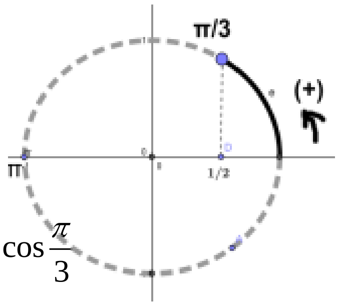
2) l'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \ge 0$ est définie dans $\left[0\,;\pi\right]$ si et seulement si : $x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi$

Donc $D = \left[0\,;\pi\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

$2\cos x - 1 \ge 0$

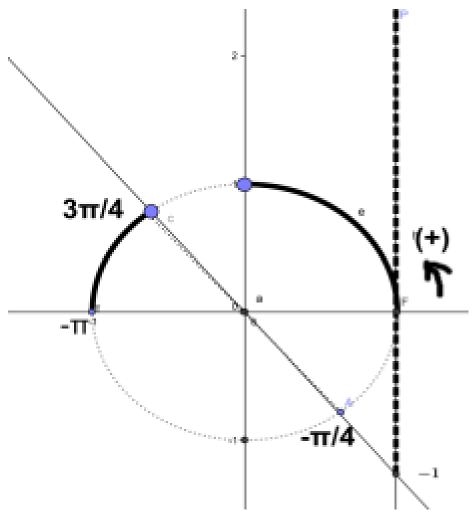
Équivaut à : $\cos x \ge \frac{1}{2}$

Si et seulement si : $\cos x \ge \cos\frac{\pi}{3}$



$\tan x + 1 \ge 0$ Équivaut à : $\tan x \ge -1$

Si et seulement si : $\tan x \ge \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$



Donc :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$2\cos x-1$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$-$	
$\tan x+1$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
produit		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$S=\left[0;\frac{\pi}{3}\right]\cup\left]\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice30: (***) On pose :

$E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$ avec $x\in\mathbb{R}$

1) Calculer : $E(0)$ et $E(\pi)$

2) Montrer que : $E(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: (E) $E(x)=-\sqrt{2}$

4) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation: (I) :

$E(x)\le-\sqrt{2}$

Solution:1) $E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

1) Calcul de : $E(0)$ et $E(\pi)$

$E(0)=\sin\left(2\times0+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times0+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$E(0)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

$E(\pi)=\sin\left(2\times\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\times\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

Car $\sin(2\pi+x)=\sin x$ et $\cos(2\pi+x)=\cos x$

2) Démontrons que : $E(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

pour tout $x\in\mathbb{R}$?

$E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)$

Donc :

$E(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\left(-\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

3) Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $E(x)=-\sqrt{2}$

$E(x)=-\sqrt{2}$ Équivaut à : $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$

Si et seulement si : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Équivaut à :

$2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ ou $2x+\frac{\pi}{4}=\pi-\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Par conséquent : $S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

4) Résolution dans $[0;\pi]$ de l'inéquation (I) :

$E(x)\le-\sqrt{2}$ Équivaut à : $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le-\sqrt{2}$

Équivaut à : $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\le-\frac{\sqrt{2}}{2}$

On pose : $2x+\frac{\pi}{4}=X$

On a : $0\le x\le\pi$ donc : $0\le2x\le2\pi$

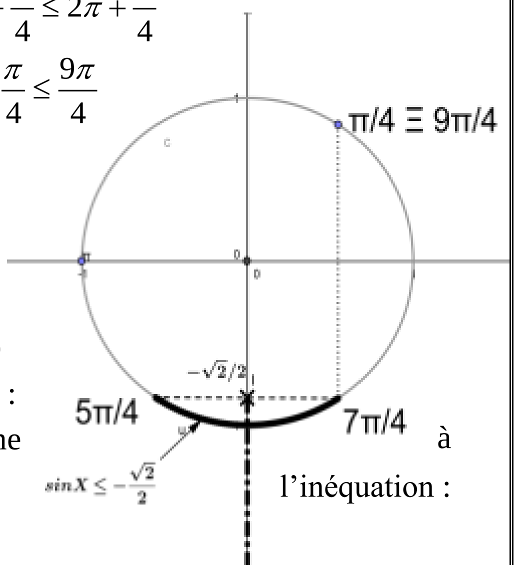
Donc : $\frac{\pi}{4}\le2x+\frac{\pi}{4}\le2\pi+\frac{\pi}{4}$

c à d : $\frac{\pi}{4}\le2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{9\pi}{4}$

Donc :

$\frac{\pi}{4}\le X\le\frac{9\pi}{4}$

Et par suite la résolution de l'inéquation (I) dans l'intervalle : $[0;\pi]$ se ramène à la résolution de l'inéquation :



$\sin X \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Dans l'intervalle : $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right]$

(Voir figure)

$\sin X \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\frac{5\pi}{4} \leq X \leq \frac{7\pi}{4}$

C'est-à-dire : $\frac{5\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$

Équivaut à : $\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \leq 2x \leq \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$ d'où : $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$

Par conséquent : $S_{[0\,;\,\pi]} = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$

Exercice31: (***) On pose :

$F(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$ avec $x \in [0;\pi]$

1) Calculer : $F(0)$ et $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

2) Montrer que : $F(\pi - x) = F(x)$ pour tout $x \in [0;\pi]$

3) En déduire : $F(\pi)$ et $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

4) Ecrire $F(x)$ en fonction $\tan x$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}$

5) Résoudre dans $[0\,;\pi]$ l'équation: $F(x) = \frac{4}{7}$;(E)

6) Résoudre dans $[0;\pi]$ l'inéquation: $F(x) > \frac{4}{7}$; (I)

Solution:1) $F(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x}$ avec $x \in [0;\pi]$

$$F(0) = \frac{1}{\cos^2 0 + 2\sin^2 0} = \frac{1}{1^2 + 2\times 0} = 1$$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4} + 2\sin^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{6} + 2\sin^2\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

2) Montrons que :

$F(\pi - x) = F(x)$ pour tout $x \in [0;\pi]$?

$$F(\pi - x) = \frac{1}{\cos^2(\pi - x) + 2\sin^2(\pi - x)}$$

$$F(\pi - x) = \frac{1}{(-\cos x)^2 + 2\sin^2 x} = F(x)$$

$$F(\pi - x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = F(x)$$

3) Déduction de : $F(\pi)$ et $F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$F(\pi) = F(\pi - \pi) = F(0) = 1$

$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = F\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$

et $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = F\left(\pi - \frac{5\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{5}$

4) Ecriture de $F(x)$ en fonction $\tan x$:

$$F(x) = \frac{1}{\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x\left(1 + 2\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{1 + 2\tan^2 x}$$

$F(x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + 2\tan^2 x}$ Car : $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

Par suite : $F(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{1 + 2\tan^2 x}$

5) Résolution dans $[0\,;\pi]$ de l'équation: $F(x) = 0$

$F(x) = \frac{4}{7}$ Équivaut à : $\frac{1 + \tan^2 x}{1 + 2\tan^2 x} = \frac{4}{7}$

Équivaut à : $7(1 + \tan^2 x) = 4(1 + 2\tan^2 x)$

Équivaut à : $7 + 7\tan^2 x = 4 + 8\tan^2 x$

Équivaut à : $\tan^2 x = 3$

Équivaut à : $\tan x = \sqrt{3}$ ou $\tan x = -\sqrt{3}$

Équivaut à : $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ou $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

- Encadrement de $\frac{\pi}{3} + k\pi$: $0 \leq \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq \frac{1}{3} + k \leq 1$ équivaut à : $-\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$

Donc $k = 0$ on remplace on trouve $x_1 = \frac{\pi}{3}$

- Encadrement de $-\frac{\pi}{3} + k\pi$: $0 \leq -\frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$

et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $0 \leq -\frac{1}{3} + k \leq 1$ équivaut à : $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{4}{3}$

Donc $k = 1$ on remplace on trouve $x_2 = \frac{2\pi}{3}$

Donc $S_{[0\,;\,\pi]} = \left\{ \frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right\}$

6) Résolution dans $\left[0\,;\,\pi\right]$ de l'inéquation: (I)

$F(x) > \frac{4}{7}$ Équivaut à : $\frac{1+\tan^2 x}{1+2\tan^2 x} > \frac{4}{7}$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right) > 4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7\left(1+\tan^2 x\right) > 4\left(1+2\tan^2 x\right)$

Équivaut à : $7+7\tan^2 x > 4+8\tan^2 x$

Équivaut à : $-\tan^2 x > -3$

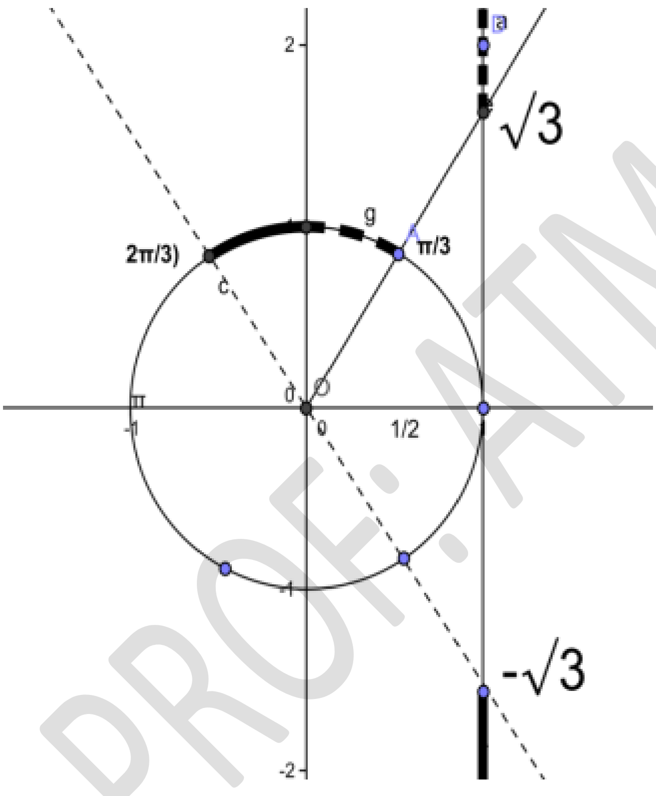
Équivaut à : $\tan^2 x < 3$ Équivaut à : $\tan^2 x - \sqrt{3}^2 < 0$

Équivaut à : $\left(\tan x - \sqrt{3}\right)\left(\tan x + \sqrt{3}\right) < 0$

$\tan x - \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\tan x < \sqrt{3}$

$\tan x - \sqrt{3} > 0$ Équivaut à : $\tan x > \sqrt{3}$

$\tan x + \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\tan x < -\sqrt{3}$



Donc le tableau de signes suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\tan x-\sqrt{3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$		$-$	
$\tan x+\sqrt{3}$		$+$		$+$	‖	$-$	0	$+$	
produit		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

$S = \left]0 ; \frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3} ; \pi\right]$

Exercice32 : (***)1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x + 3 = 0 \quad (E_1)$

2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \quad (E_2)$

3) $\sqrt{3}\tan^2 x + \left(\sqrt{3}-1\right)\tan x - 1 = 0 \quad (E_3)$

Solution:1) $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\cos x + 3 = 0 \quad (E_1)$

On utilise un changement de variable : on pose $t = \cos x$

L'équation (E_1) devienne : $2t^2 - 3\sqrt{3}t + 3 = 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2 - 3\sqrt{3}t + 3$:

Calcul du discriminant réduit :

$\Delta = \left(-3\sqrt{3}\right)^2 - 4\times 2\times 3 = 3$

Les racines sont : $t_1 = \frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Et $t_2 = \frac{-\left(-3\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou : $\cos x = \sqrt{3}$

(qui n'a pas de solution car $\sqrt{3} \succ 1$)

Donc : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \quad (E_2)$

On utilise un changement de variable :

On pose $t = \sin x$

L'équation (E_2) devienne : $2t^2 - 3t + 1 = 0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:
Calcul du discriminant réduit : $\Delta=(-3)^2-4\times2\times1=1$

Les racines sont : $t_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{4}=\frac{4}{4}=1$

Et $t_2=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Donc : $\sin x=1$ et $\sin x=\frac{1}{2}$

Donc : $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

ou $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$ sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $\sqrt{3}\tan^2 x+\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-1=0 \quad (E_3)$

L'équation (E_3) est définie dans si et seulement si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

On utilise un changement de variable :
On pose $t=\tan x$
L'équation (E_2) devienne : $\sqrt{3}\,t^2+\left(\sqrt{3}-1\right)t-1=0$

On cherche les racines du trinôme $2t^2-3t+1$:
Calcul du discriminant réduit :

$\Delta=\left(-\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^2-4\times\sqrt{3}\times(-1)=4+2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$

Les racines sont :

$t_1=\frac{-\sqrt{3}+1+\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

et

$t_2=\frac{\sqrt{3}-1-\left|\sqrt{3}+1\right|}{2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=-1$

Donc : $\tan x=-1$ et $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Donc : $\tan x=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\tan x=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ ou $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans $\mathbb{R}$
Sont :

$S_{\mathbb{R}}=\left\{-\frac{\pi}{4}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice33 : (***)**1)** a)Vérifier que :
$5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

b) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'équation suivante :
$4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{6}=0 \ (E)$

2) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ les inéquations suivantes : $2\cos x-\sqrt{2}>0$ et $2\cos x-\sqrt{3}<0$

3) Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'inéquation suivante:
$4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{6}\geq0$

Solution:1) a)
$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=3-2\sqrt{6}+2=5-2\sqrt{6}$

b) $4\cos^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x+\sqrt{6}=0$

On utilise un changement de variable :
On pose $t=\cos x$
L'équation devienne : $4t^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{6}=0$

On cherche les racines du trinôme
$t^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)t+\sqrt{6}$:

Calcul du discriminant réduit :

$\Delta'=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}$

$\Delta'=3+2\sqrt{6}+2-4\sqrt{6}=5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$

Les racines sont :

$t_1=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

et

$t_2=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|}{4}=\frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

• $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ Équivaut à : $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Équivaut à : $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Avec $k\in\mathbb{Z}$ et $x\in[0\,;2\pi]$

Après avoir encadré ces solutions on va trouver :
$x_1=\frac{\pi}{6}$ et $x_1=\frac{11\pi}{6}$

• $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Équivaut à : $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

Avec : $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in [0\,;2\pi]$

Après avoir encadré ces solutions on va trouver :

$x_2 = \frac{\pi}{4}$ et $x_4 = \frac{7\pi}{4}$

Finalement on a : $S_{[0\,;2\pi]} = \left\{\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{4};\frac{11\pi}{6};\frac{7\pi}{4}\right\}$

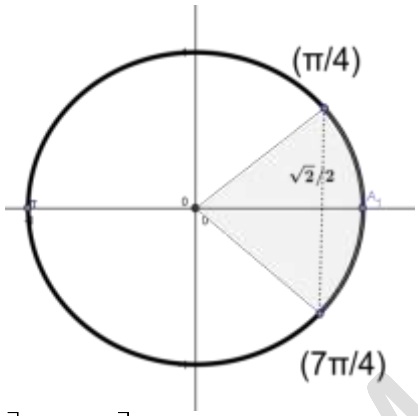
2) a)Résolution dans $[0\,;2\pi]$ de l'inéquation:

$2\cos x - \sqrt{2} > 0$

$2\cos x - \sqrt{2} > 0$

Équivaut à :

$\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

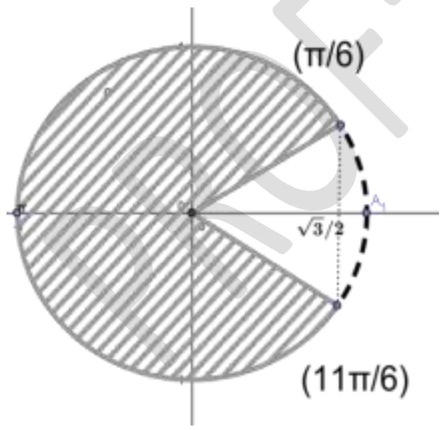


Donc $S = \left[0;\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$

2) b) Résolution dans $[0\,;2\pi]$ de l'inéquation:

$2\cos x - \sqrt{3} < 0$

$2\cos x - \sqrt{3} < 0$ Équivaut à : $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$



Donc $S = \left]\frac{\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right[$

3) Résolution dans $[0\,;2\pi]$ de l'inéquation:

$4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} \geq 0$

$4\cos^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\cos x + \sqrt{6} \geq 0$

Équivaut à : $4\left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \geq 0$

Équivaut à : $\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)\left(2\cos x - \sqrt{2}\right) \geq 0$

Et par suite le tableau suivant :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2\cos x-\sqrt{2}$		+		+	0	−	0	+		+	
$2\cos x-\sqrt{3}$		+	0	−		−		−	0	+	
produit		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Donc : $S = \left[0;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right[$