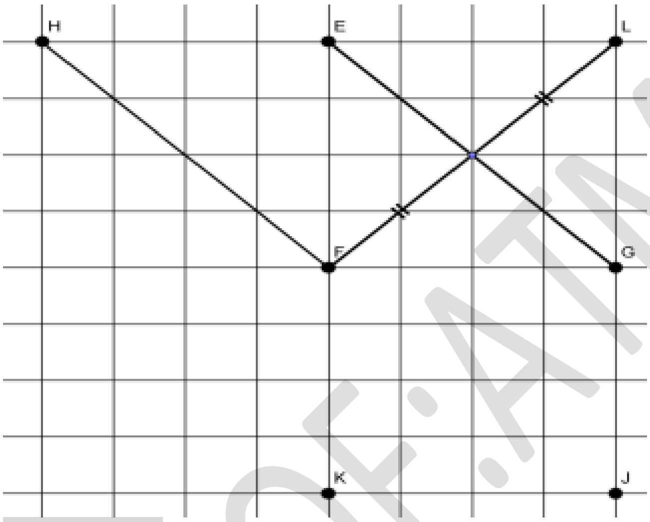
Exercices avec solutions
Les Transformations du plan

Types d'exercices :
(*)Application directe du cours (**) Difficulté moyenne (***) Demande une réflexion

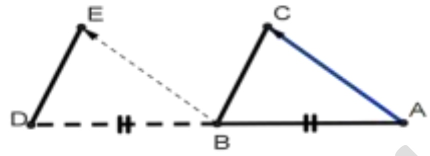
Exercice 1 : (*) (Utiliser une feuille de papier quadrillé.)
Construire un triangle EFG, rectangle en F tel que EF = FG = 4 cm.
1) Placer le point K image de E par la symétrie de centre F.
2) Placer le point image de F par la symétrie axiale d'axe (EG).
3) Placer le point J image de G par la translation de $\overrightarrow{EF}$.
4) Placer le point H tel que $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{FG}$.

Solution :1) $S_F(E) = K$ 2) $S_{(EG)}(F) = L$
3) $t_{\overrightarrow{EF}}(G) = J$



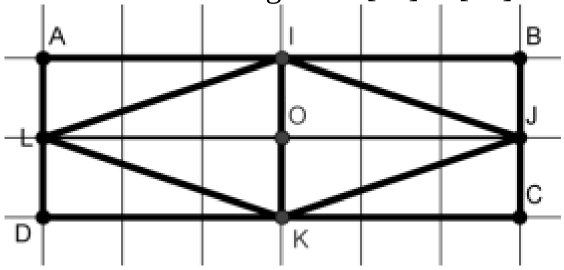
Exercice 2 : (*) ABC Un triangle et D le symétrique du point A par rapport à B
Et E l'image du point B par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$
1) Faire une figure
2) Montrer que le triangle BDE est l'image du triangle ABC par une translation dont on déterminera son vecteur.
3) En déduire que le triangle ABC est l'image du triangle BDE par une translation dont on déterminera son vecteur.

Solution :



$t_{\overrightarrow{AC}}(B) = E$ Signifie $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$
Donc : $ACEB$ est un parallélogramme
2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$
Et on a : D le symétrique du point A par rapport à B donc : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = D$
On a aussi : $ACEB$ est un parallélogramme
Donc : $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ par suite : $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = E$
Par conséquent : $t_{\overrightarrow{AB}}(ABC) = BDE$
3) On a : $t_{\overrightarrow{AB}}(ABC) = BDE$
Par suite : $t_{-\overrightarrow{AB}}(BDE) = ABC$
Le triangle ABC est l'image du triangle BDE par une translation de vecteur $\overrightarrow{BA}$
(Car : $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$ *donc* $t_{\overrightarrow{BA}}(B) = A$
Et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$ Donc : $t_{\overrightarrow{BA}}(D) = B$
Et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BA}$ Donc : $t_{\overrightarrow{BA}}(E) = C$ *)*

Exercice 3: (*) ABCD est un rectangle de centre O.
I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
AIOL, LOKD, IBJO, OJCK sont alors des rectangles et O le milieu des segments [LJ] et [IK].



1) a) Quel est le transformé du triangle AIL par la symétrie d'axe (IK)?
b) Quel est le transformé du triangle AIL par la symétrie de centre O ?
2) a) Montrer que : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.

b) Montrer que : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LK}$.

c) Quel est le transformé du triangle AIL par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$?

Solution : 1) a) $S_{(IK)}(A) = B$ et $S_{(IK)}(I) = I$

Car $I \in (IK)$ et $S_{(IK)}(L) = J$

Donc le transformé du triangle AIL par la symétrie d'axe (IK) est le triangle IBJ

Par suite : $S_{(IK)}(AIL) = IBJ$.

b) $S_O(A) = C$ et $S_O(I) = K$ et $S_O(L) = J$

Par suite : $S_O(AIL) = CKJ$.

Donc le transformé du triangle AIL par la symétrie de centre O est le triangle CKJ.

2)a) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{IO}$ car AIOL est un rectangle, donc un parallélogramme.

$\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ}$ car O est le milieu du segment [LJ]

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$ car $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{LO}$ et $\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{OJ}$

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{OJ}$ par suite : AIJO est un parallélogramme donc $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AO}$.

b) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LD}$ car L est le milieu de [AD]

$\overrightarrow{LO} = \overrightarrow{DK}$ car LOKD est un rectangle.

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LK}$ car $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{LD}$ et $\overrightarrow{LD} = \overrightarrow{OK}$

Donc: $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OK}$ et ALKO est un parallélogramme

Par suite : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{LK}$.

c)On a : $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{IJ}$ donc : $t_{\overrightarrow{IJ}}(A) = O$

et on a : $\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{IJ}$ donc : $t_{\overrightarrow{IJ}}(L) = K$

Et aussi on a : $t_{\overrightarrow{IJ}}(I) = J$ donc : $t_{\overrightarrow{IJ}}(AIL) = OJK$

Par suite le transformé du triangle AIL par la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est le triangle OJK.

Exercice 4: (*) $ABCD$ Un losange de centre O et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du Segment $[AD]$

1) Faite une figure.

2) Déterminer : $S_O(A)$ et $S_O(B)$ et $S_O(O)$

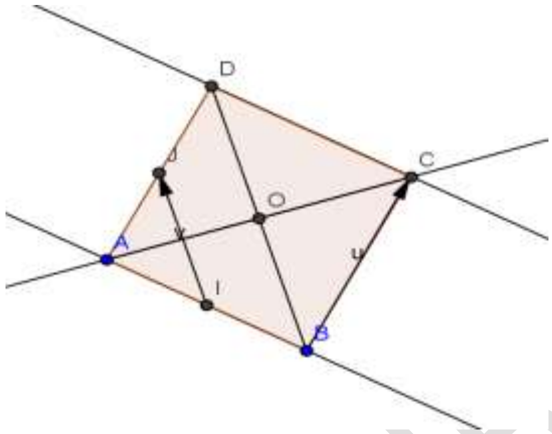
Et $S_O((AB))$

3) Déterminer $S_{(AC)}(B)$ et $S_{(AC)}(A)$ et $S_{(AC)}(O)$

Et $S_{(AC)}([AB])$ et $S_{(AC)}(I)$ et $S_{(AC)}((OI))$

4) Déterminer $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

Solution :1) La figure



2) $S_O(A) = C$ Car $OA = OC$

$S_O(B) = D$ Car $OB = OD$

$S_O(O) = O$ Car O est invariant

On a $\begin{cases} S_O(A) = C \\ S_O(B) = D \end{cases}$ donc $S_O((AB)) = (CD)$

Et on a $(AB) \parallel (CD)$ car L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.

3)

- $S_{(AC)}(B) = D$ car (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$
- $S_{(AC)}(A) = A$ car tous les points de la droite (AC) sont invariants
- $S_{(AC)}(O) = O$ car $O \in (AC)$ et tous les points de la droite (AC) sont invariants
- On a $\begin{cases} S_{(AC)}(A) = A \\ S_{(AC)}(B) = D \end{cases}$ donc $S_{(AC)}([AB]) = [AD]$
- On a I le milieu du segment $[AB]$

et $S_{(AC)}([AB]) = [AD]$ donc $S_{(AC)}(I)$ est le milieu du segment $[AD]$ donc c'est J donc $S_{(AC)}(I) = J$

- On a : $\begin{cases} S_{(AC)}(O) = O \\ S_{(AC)}(I) = J \end{cases}$ donc $S_{(AC)}((OI)) = (OJ)$

4)

- On a $ABCD$ un losange donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

Donc : $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = D$

- On a : ABD un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$

Donc : $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$ et on a O le milieu du segment $[BD]$ donc $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BO}$

Alors $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$

Donc : $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

• On a $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ et O le milieu du segment $[BD]$

Donc : $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$.

Donc $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ c'est-à-dire : $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$

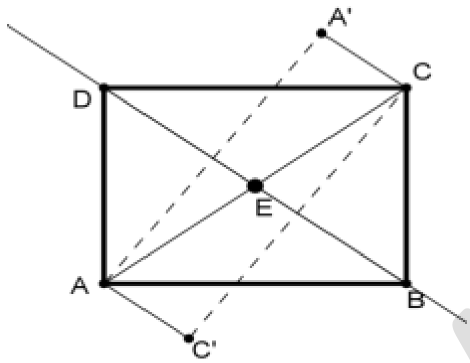
Et on a $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$ par suite : $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

Exercice 5: (**) $ABCD$ Un rectangle de centre O et $S_{(BD)}$ est la Symétrie axiale d'axe (BD)

Les points : A' , C' les images respectives des points A , C par $S_{(BD)}$

Montrer que : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

Solution :



On a : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$

Et O le milieu du segment $[AC]$.

Donc $S_{(BD)}(O)=O'$ est aussi le milieu du segment $[A'C']$ car la symétrie axiale conserve le milieu

Or : $O\in(BD)$ donc : $S_{(BD)}(O)=O$

Donc : O le milieu du segment $[A'C']$ et de $[AC]$

Donc : les segments $[A'C']$ et de $[AC]$ ont le même milieu O.

Par suite $AA'CC'$ est un parallélogramme.

Et on a aussi : $S_{(BD)}(A)=A'$ et $S_{(BD)}(C)=C'$

Donc : $AC=A'C'$ (car la symétrie axiale conserve les distances) .

Par conséquent : $AA'CC'$ est aussi un rectangle

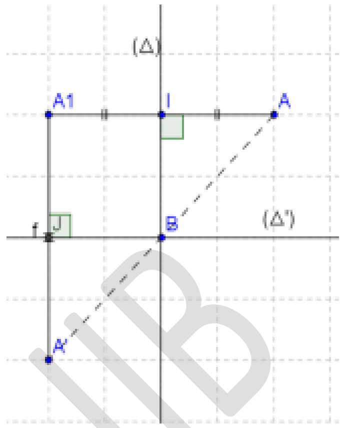
Exercice 6 : (**) On considère les droites (Δ) et (Δ') perpendiculaires en un point O

Soit A un point du plan (P) et A_1 son image par la symétrie axiale : $S_{(\Delta)}$

Et A' l'image de A_1 par la symétrie axiale : $S_{(\Delta)}$

Montrer que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$

Solution : On a :



$S_{(\Delta)}(A)=A_1$ et

$S_{(\Delta)}(A_1)=A'$

Soit I Le milieu du segment $[AA_1]$

Donc : $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OI}$

Soit I Le milieu du segment $[A_1A']$

Donc : $\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA_1}=2\overrightarrow{OJ}$

Par suite : $\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA}=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)$

Et puisque : $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\overrightarrow{OA_1}$ (car OIA_1J est un rectangle) alors : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA'}=\vec{0}$

Exercice 7 : (**) ABC Un triangle isocèle de sommet A.

On construit à l'extérieur de ABC deux triangles ABF et ACE équilatérales.

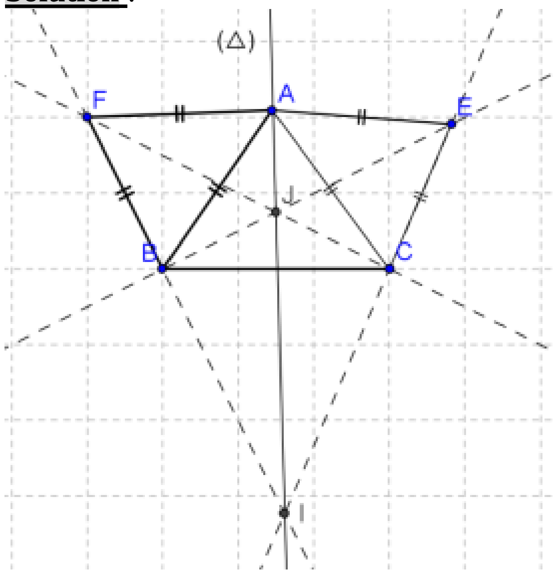
Les droites (BF) et (CE) se coupent en un point I

Et les droites (FC) et (BE) se coupent en un point J

Soit (Δ) l'axe de symétrie du triangle ABC

Montrer que les points : A , I et J sont alignés.

Solution :



Montrons que les points : A , I et J sont alignés

Soit $S_{(\Delta)}$ la symétrie axiale d'axe (Δ).

Les deux triangles ABF et ACE sont symétriques par rapport à la droite (Δ)

On a : $S_{(\Delta)}(B)=C$ et $S_{(\Delta)}(E)=F$

Donc : $S_{(\Delta)}\left(BE\right)=\left(CF\right)$

Et puisque : $(BE)\cap(CF)=\{J\}$ alors $J\in(\Delta)$

Et puisque les points :

A , I et J appartiennent à la droite (Δ) alors les points A , I et J sont alignés

Exercice 8 : (**) A , B , C et D quatre points du plan tels que : $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$

S_O Est la symétrie centrale de centre O

S_O Transforme respectivement les points :

A , B , C et D en A' , B' ; C' et D'

Montrer que : $\overrightarrow{C'D'}=4\overrightarrow{A'B'}$

Solution : $S_O(A)=A'$ et $S_O(B)=B'$

Impliquent : $\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{A'O}$ et $-\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{OB}$

Donc : $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{A'O}-\overrightarrow{OB'}=-\left(\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'}\right)$

Donc : $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{A'B'}$ (1)

De même : $S_O(C)=C'$ et $S_O(D)=D'$

Impliquent : $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{C'D'}$ (2)

Or : $\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{AB}$ donc : $-\overrightarrow{C'D'}=4\left(-\overrightarrow{A'B'}\right)$

D'après (1) et (2). Par conséquent : $\overrightarrow{C'D'}=4\overrightarrow{A'B'}$

De façon général on dit que la symétrie centrale conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Exercice 9 : (**) $ABCD$ un parallélogramme et O un point qui n'appartient pas à ces cotés.

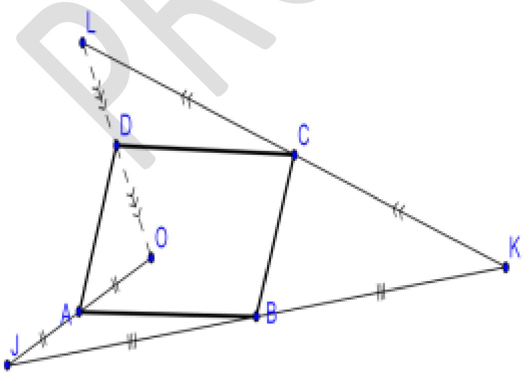
Et soient : J le symétrique de O par rapport a A

Et K le symétrique de J par rapport a B .

Et L le symétrique de K par rapport a C .

Montrer que : O est le symétrique de L par rapport a D .

Solution :



On a : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KL}$ donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OK}+2\overrightarrow{KC}$

Car C le milieu du segment $[KL]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JK}+2\overrightarrow{KC}$

Donc : $\overrightarrow{OL}=\overrightarrow{OJ}+2\overrightarrow{BK}+2\overrightarrow{KC}$

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\left(\overrightarrow{BK}+\overrightarrow{KC}\right)$

Car A le milieu du segment $[OJ]$

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{BC}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right)$

Or $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ car $ABCD$ un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{OL}=2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{OD}$

Donc : D est le milieu du segment $[IK]$

Par suite : $S_D(L)=O$

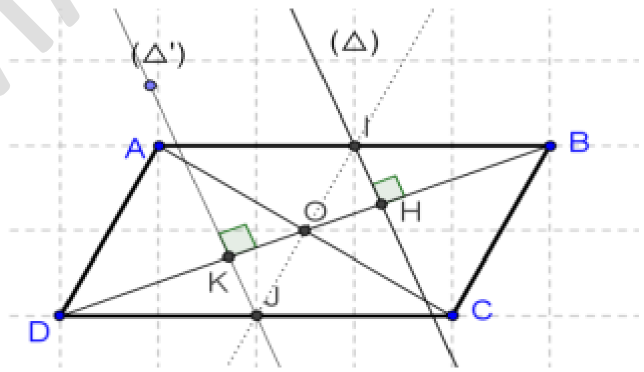
Exercice 10 : (***) $ABCD$ un parallélogramme de centre O .

Les points : I ; J sont les milieux respectives des segments $[AB]$ et $[CD]$.

Les points : H , K sont les projections orthogonales respectives des points I , J sur la droite (BD)

Montrer que : $IHJK$ est un parallélogramme.

Solution :



• On a : O est le centre de symétrie du parallélogramme $ABCD$

• On a : $S_O(A)=C$ et $S_O(B)=D$ et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[CD]$

Puisque la symétrie centrale conserve le milieu alors : $S_O(I)=J$

• Puisque $O\in(BD)$ alors $S_O((BD))=(BD)$

Soit (Δ) la droite qui passe par le point I et perpendiculaire a (BD) donc l'image de la droite (Δ) par S_O est la droite qui passe par le point J

et perpendiculaire a (Δ) (conservation de la perpendiculaire).

On a : $(BD)\cap(\Delta)=\{H\}$

Donc : $S_O((BD))\cap S_O((\Delta))=\{S_O(H)\}$

C'est-à-dire : $(BD)\cap(\Delta')=\{S_O(H)\}$

Donc : $S_O(H)=K$ par suite O le milieu du segment $[HK]$.

Et puisque : les diagonales $[IJ]$ et $[HK]$ ont le même milieu O alors: $IHJK$ est un parallélogramme.

Exercice 11 : (***) Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que : B est l'image du point A par la translation de vecteur $\vec{v}$ et D est l'image du point C par la translation de vecteur $2\vec{v}$.

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$.

2) Soit O le milieu du segment $[CD]$.

Montrer que : $ABOC$ est un parallélogramme.

Solution :1) On a: $t_{\vec{v}}(A)=B$ signifie que : $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$

Et on a : $t_{2\vec{v}}(C)=D$ signifie que : $\overrightarrow{CD}=2\vec{v}$

Donc : $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ qui signifie que : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

2) Montrons que : $ABOC$ est un parallélogramme.

On a: O le milieu du segment $[CD]$

Donc : $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ et puisque : $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

Alors : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CO}$

Par suite : $ABOC$ est un parallélogramme.

Exercice 12 : (***) Soient trois points fixes A . B et C du plan .

Soit E un point du plan tel que : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

1) Montrer que : E est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

2)a)faire une figure

b) Représenter le point : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Et Montrer que : C est le milieu $[EF]$

Solution :1) On a : $\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$

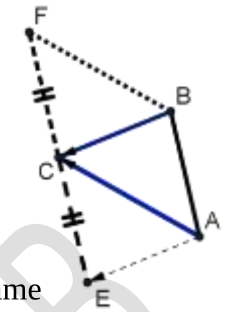
Signifie que : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$

Signifie que : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ c'est-à-dire $BCEA$ est un parallélogramme

Par suite : $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=E$

2)a) La figure.



On a : F est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$

Donc : $t_{\overrightarrow{AC}}(B)=F$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BF}$

Donc $ACFB$ est un parallélogramme

Par suite : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CF}$ (1)

On a aussi : $BCEA$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AB}$ (2)

De (1) et (2) on obtient : $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{CF}$.

Par conséquent : C est le milieu $[EF]$.

Exercice 13 : (***) Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$

Soit I le milieu du segment $[CD]$ et J un point tel que : $ACJD$ est un parallélogramme

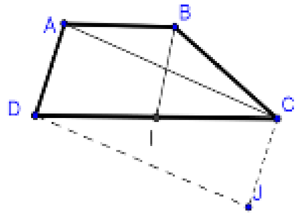
On considère la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ de vecteur $\overrightarrow{AD}$

1) Déterminer les images des points A et C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

3) En déduire que : $(IJ)\,||\,(BC)$

Solution :



• Déterminons $t_{\overrightarrow{AB}}(A)$?

Soit A' est l'image du point A par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$

Cela signifie que : $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}$

C'est-à-dire $A'=D$ donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(A)=D$

• Déterminons $t_{\overrightarrow{AD}}(C)$?

Soit C' est l'image du point C par la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ cela signifie que : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD}$

Et puisque : $ACJD$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CJ}$

Alors : $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CJ}$ c'est-à-dire $C'=J$

Donc : $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=J$

2) Montrer que : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

On a : $\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{AB}$ et I le milieu du segment $[CD]$

Donc : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DI}$ Par suite $ABID$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AD}$ et par suite : $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$

3) Déduction que : $(IJ)\parallel(BC)$?

Puisque : $t_{\overrightarrow{AD}}(C)=J$ et $t_{\overrightarrow{AD}}(B)=I$ d'après la propriété caractéristique de la translation

On a : $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IJ}$ et par suite : $(IJ)\parallel(BC)$.

Exercice 14 : (***) Soit ABC un triangle ; I et J et K les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[AC]$ et $[AB]$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

2) Soit M le point du plan .
Représenter les points E et F les images du point M respectivement par les translations : $t_{\overrightarrow{KC}}$ et $t_{\overrightarrow{BJ}}$

3) Déterminer la translation qui transforme E en F

Solution : 1) Montrons que : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

Soit G Le centre de gravité du triangle ABC

Alors on sait que :

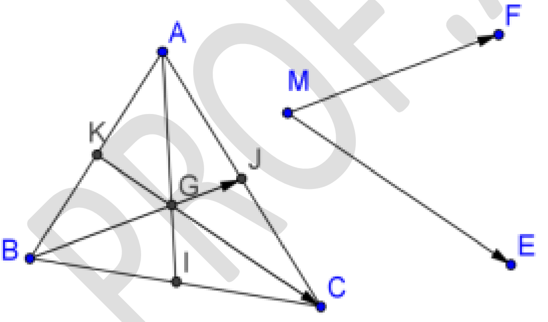
$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}$

Donc :

$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}\right)=\vec{0}$$

car $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

3) Représentation des points E et F :



3) On a : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MF}$ donc : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{BJ}$

Et puisque : $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{CK}=-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IA}$

Donc : $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{IA}$ par suite : $t_{\overrightarrow{IA}}(E)=F$

Par conséquent la translation qui transforme E en F est $t_{\overrightarrow{IA}}$ c'est-à-dire : la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$

Exercice 15: (*) Soit $ABCD$ un quadrilatère
Représenter les images des points :
A ; B ; C et D

1) Par l'homothétie h de centre A et de rapport $k=\frac{2}{3}$

2) Par l'homothétie h' de centre B et de rapport $k=-\frac{1}{3}$

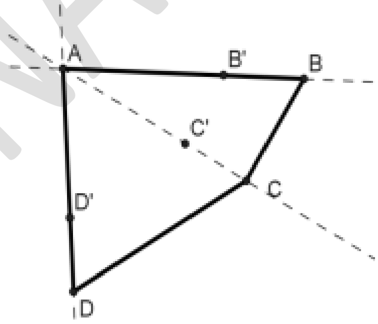
Solution : 1) Soit l'homothétie $h_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}$

On a : $h(M)=M'$ Equivaut à : $\overrightarrow{AM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$

$h(B)=B'$ Equivaut à : $\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$h(C)=C'$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$h(A)=A$ car A est le centre de l'homothétie $h_{\left(A,\frac{2}{3}\right)}$



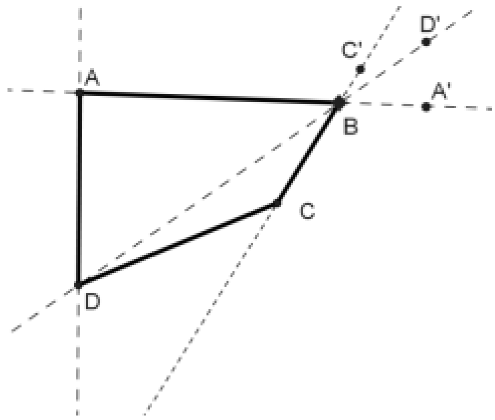
2) Soit l'homothétie $h'_{\left(B,-\frac{1}{3}\right)}$

On a : $h'(M)=M'$ Equivaut à : $\overrightarrow{BM'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BM}$

$h'(B)=B$ Car B est le centre de l'homothétie $h'_{\left(B,-\frac{1}{3}\right)}$

$h'(A)=A'$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$h'(C)=C'$ Equivaut à : $\overrightarrow{BC'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$



Exercice 16: (*) Écrire l'expression vectorielle suivante : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ en utilisant une homothétie

Solution : Soit l'homothétie $h_{\left(I,-\frac{2}{3}\right)}$

On a : $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ Equivaut à : $h(B)=C$

Exercice 17 : (**) Déterminer dans les cas suivants le rapport k de l'homothétie h de centre A qui transforme B en C

1) $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ 2) $\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ 4) $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$

Solution: Soit $h(A,k)$ l'homothétie h de centre A et de rapport k et $h(A)=B$

$h(B)=C$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

1) $3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=-\frac{2}{3}$ donc $h\left(A,-\frac{2}{3}\right)$

2) $\overrightarrow{CA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=\frac{2}{3}$ donc $h\left(A,\frac{2}{3}\right)$

3) $3\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$ Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Équivaut à : $k=\frac{3}{2}$ donc $h\left(A,\frac{3}{2}\right)$

4) $\overrightarrow{BC}=-3\overrightarrow{AB}$ Equivaut à : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $k=-2$ donc $h(A,-2)$

Exercice 18 : (**) Écrire les expressions vectorielles suivantes en utilisant une homothétie :

1) $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

2) $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ Avec Ω un point donné

3) $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

Solution : $h(I,k)$

1) $h(A)=B$ Equivaut à : $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$

Equivaut à : $2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $-\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ donc : $h\left(I,\frac{1}{3}\right)$

2) $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ Equivaut à : $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}$

Equivaut à : $2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$ donc : $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{AB}$

Equivaut à : $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$;donc $h(\Omega,-1)$

3) $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Equivaut à : $3\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$

Equivaut à : $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Equivaut à : $8\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{IB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I,\frac{8}{5}\right)$.

Exercice 19 : (**) On considère deux points : A et B et une homothétie h qui transforme A en A' et laisse invariant le point B de sorte que : $\overrightarrow{A'A}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Trouver le rapport k de cette homothétie.

Solution : Nous avons : $h(A)=A'$ et $h(B)=B'=B$

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie

On a ; $\overrightarrow{A'B}=k\overrightarrow{AB}$ (1)

D'autre part nous avons :

$\overrightarrow{A'A}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Équivaut à : $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{A'B}=-3\overrightarrow{AB}$ (2)

De (1) et (2) nous déduisons : $k=-3$.

Exercice 20 : (**) Soit un point fixe A du plan Soit h une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $3\overrightarrow{MM'}+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

Montrer que : h est une homothétie et Trouver le centre et le rapport k de cette homothétie

Solution : pour chaque point M du plan nous avons :

$h(M)=M'$ Équivaut à : $3\overrightarrow{MM'}+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

Équivaut à : $3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AM'}\right)+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$

Équivaut à : $-\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{AM'}=\vec{0}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AM'}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$

Cela veut dire que : h est une homothétie de centre A et de rapport $k=\frac{1}{3}$

Exercice 21 : (***) Soient A et B deux points fixes du plan .soit T une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Montrer que T est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$et déterminer son rapport k

Solution : pour chaque point M du plan nous avons : $T(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IM'}=2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{MI}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=3\overrightarrow{MI}+2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$ or on a : I le milieu du segment $[AB]$ donc : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{IM'}=-3\overrightarrow{IM}$

Cela veut dire que : h est une homothétie de centre I le milieu du segment $[AB]$ et de rapport $k=-3$

Exercice 22 : (**) Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $(AB)\parallel(CD)$ et tels que : $AB=2$ et $CD=4$

1) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h qui transforme A en D et transforme B en C.

2) Déterminer le centre et le rapport k de l'homothétie h' qui transforme A en C et transforme B en D

Solution :1) Soit $h(E,k)$: on a : $h(A)=D$

Donc : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$

Donc : les points E ; A et D sont alignés

Par suite : $E\in(AD)$

Et on a : $h(B)=C$ donc : $\overrightarrow{EC}=k\overrightarrow{EB}$

Donc : les points E ; B et C sont alignés

Par suite: $E\in(BC)$

Donc le centre de l'homothétie h est le point E d'intersection des droites (AD)et(BC)

Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC

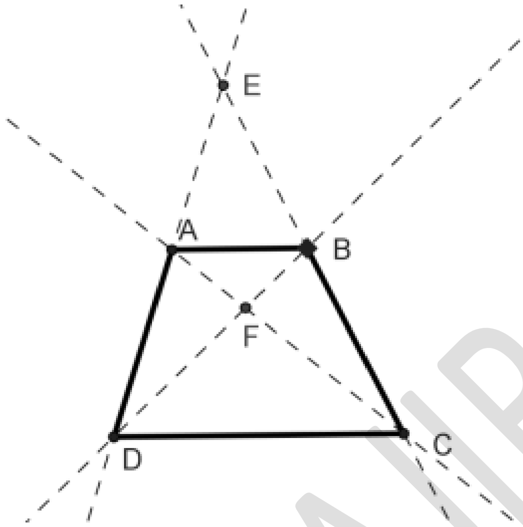
On a : $\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{EC}{EB}=\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{4}{2}=2$

Et puisque : $\overrightarrow{ED}=k\overrightarrow{EA}$ alors : $\left\|\overrightarrow{ED}\right\|=\left\|k\overrightarrow{EA}\right\|$

C'est-à-dire : $ED=|k|EA$ donc : $\dfrac{ED}{EA}=|k|$

Et par suite : $|k|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le même sens alors : $k=2$

Par conséquent : $h(E,2)$



2) Soit $h'(F,k')$

On a : $h'(A)=C$ donc : $\overrightarrow{FC}=k'\overrightarrow{FA}$

Donc : les points F ; A et C sont alignés par suite : $F\in(AC)$

Et On a : $h'(B)=D$ donc : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$

Donc : les points F ; B et D sont alignés par suite: $F\in(BD)$

Donc le centre de l'homothétie h' est le point F d'intersection des droites (AC)et(BD)

Et puisque : $(AB)\parallel(CD)$ donc d'après le théorème de Thalès dans le triangle EDC

On a : $\dfrac{FD}{FA}=\dfrac{FC}{FB}=\dfrac{DC}{AB}=\dfrac{4}{2}=2$

Et puisque : $\overrightarrow{FD}=k'\overrightarrow{FB}$ alors : $\left\|\overrightarrow{FD}\right\|=\left\|k'\overrightarrow{FB}\right\|$

c'est-à-dire : $FD=|k'|FB$ donc : $\dfrac{FD}{FB}=|k'|$

Et par suite : $|k'|=2$ et puisque : $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{EA}$ ont le sens contraire alors : $k'=-2$

Par conséquent : $h'(F,-2)$

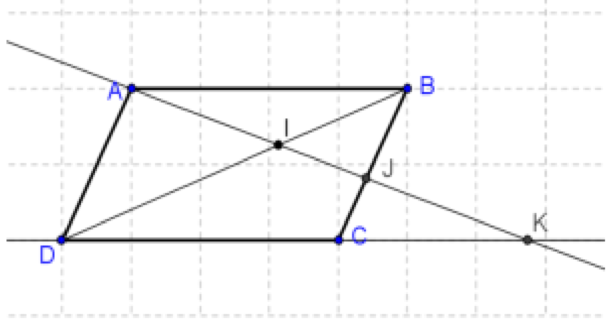
Exercice 23 : (***) Soit $ABCD$ un parallélogramme et I un point fixe qui appartient a $[BD]$ et J le point d'intersection des droites (AI) et (BC)et soit K le point d'intersection des droites (AI) et (CD)

Soit h l'homothétie de centre I et qui transforme B en D .

1) Déterminer $h(A)$et $h(J)$.

2) Montrer que : $IA^2=IJ\times IK$.

Solution :1) a)Déterminons $h(A)$?



On a : $h(B)=D$ et puisque l'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle Alors : l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par D est parallèle à (AB) c'est-à-dire : (DC)

Par suite : $h((AB))=(CD)$

Et on a : $I\in(AI)$ donc : $h((AI))=(AI)$

Et puisque : $A\in(AI)\cap(AB)$

Alors : $h(A)\in h((AI))\cap h((AB))$

C'est-à-dire : $h(A)\in(AI)\cap(CD)$

Et on a : $(AI)\cap(CD)=\{K\}$

Donc : $h(A)=K$

b) Déterminons $h(J)$?

On a : $h((AI))=(AI)$ et $h(B)=D$

Donc : l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par D est parallèle à (BC) c'est-à-dire (AD)

Par suite : $h((BC))=(AD)$

Et puisque : $J\in(BC)\cap(AI)$

Alors $h(J)\in h((BC))\cap h((AI))$

C'est-à-dire : $h(J)\in(AD)\cap(AI)$

Et on a : $(AD)\cap(AI)=\{A\}$ Donc : $h(J)=A$

2) Soit $h(I,k)$: On a : $h(A)=K$

Équivaut à : $\overrightarrow{IK}=k\overrightarrow{IA}$ donc : $IK=|k|IA$ (1)

Et on a : $h(J)=A$ Équivaut à : $\overrightarrow{IA}=k\overrightarrow{IJ}$

Donc : $IA=|k|IJ$ (2)

De (1) et (2) on déduit que :

$\frac{IK}{IA}=\frac{IA}{IJ}=|k|$ et par suite : $IA^2=IJ\times IK$

Exercice 24 : (***) Soient deux points fixes différents A et B du plan .soit f une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

1) $\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{M'A}$.

2) $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

3) $7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Montrer que f est une translation et Trouver son vecteur dans chaque cas : 1) et2) et3).

Solution :1) Pour chaque point M du plan nous avons : $f(M)=M'$ Équivaut à : $\overrightarrow{M'B}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{M'A}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{M'A}$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'M}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $t_{\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

2) Pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M)=M'$ Équivaut à :

$\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=-2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Équivaut à : $t_{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}(M)=M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

3) Pour chaque point M du plan nous avons :

$f(M)=M'$ Équivaut à : $7\overrightarrow{MB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}-7\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)=\vec{0}$

Équivaut à : $\frac{2}{3}\overrightarrow{M'M}+7\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$

Équivaut à : $t_{\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}}(M)=M'$ Cela veut dire que : f est une translation de vecteur $\frac{21}{2}\overrightarrow{BA}$.

Exercice 25 : (***) $ABCD$ un parallélogramme I et J deux points tels que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

1) Faite une figure.

2) Monter que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3) Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C.

a) Montrer que $h((AB))=(CD)$

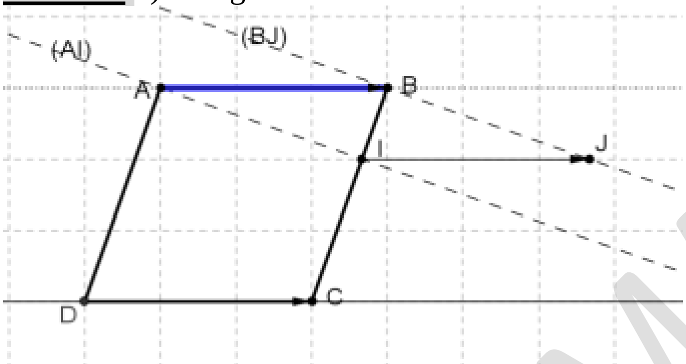
a) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-2$

4) Soit le point K tel que : $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J)=K$

b) Montrer que $AI=\frac{1}{2}CK$.

Solution :1) La figure



2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$ ؟؟؟؟؟

On a $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

On donc $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

Déduction : On sait que L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc $(AI)\parallel(BJ)$

3)a) On a $h(B)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B

C'est-à-dire : C donc $h((AB))=(CD)$

3)b) On a $h(B)=C$ donc $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que : $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc : $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$

Donc : $3\overrightarrow{CI}=2(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB})$

C'est-à-dire : $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

Donc : $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$

Par suite : $k=-2$

4)a) $h(J)=K$ ؟؟؟؟؟

On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$

Donc : $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$ Par suite : $h(J)=K$

4)b) On a $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc : $\|\overrightarrow{CK}\|=\|-2\overrightarrow{BJ}\|$ c'est-à-dire : $\|\overrightarrow{CK}\|=|-2|\|\overrightarrow{BJ}\|$

Donc $CK=2BJ$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABJI$ parallélogramme

Donc $BJ=AI$.

Donc $CK=2AI$ par suite : $AI=\frac{1}{2}CK$.

Exercice 26 : (***) ABC un triangle et D un point tel que : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et I est le point d'intersection des droites (BD) et (AC) (Voir la figure)

On considère l'homothétie h de centre I qui transforme le point A en C.

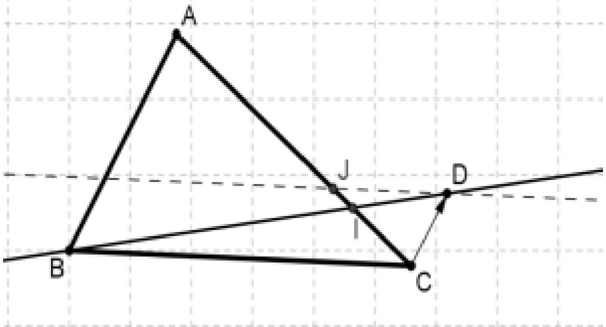
1) a)Déterminer l'image du point B par l'homothétie h

b) En déduire le rapport k de l'homothétie h.

2) La droite qui passe par D et parallèle à (BC) coupe la droite (AI) en J.

Montrer que $h(C)=J$.

Solution :



1)a) On a de I qui transforme le point A en C

Et on a : $h((BI))=(BI)$ car $I\in(BI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(A)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle donc l'image de la droite (AB) est la droite qui passe par l'image de A qui est

C et parallèle a (AB)

Donc : $h((AB))=(CD)$

On a : $B\in(BI)\cap(AB)$

Donc : $h(B)\in h((BI))\cap h((AB))$

C'est-à-dire : $h(B)\in(BI)\cap(CD)$

Et puisque : $(BI)\cap(CD)=\{D\}$ alors : $h(B)=D$

b) Déduction du rapport k de l'homothétie h ?

On a $\begin{cases} h(A)=C \\ h(B)=D \end{cases}$ donc d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$

Et puisque : $\overrightarrow{CD}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc $k=-\frac{1}{4}$

2) On a : $h((CI))=(CI)$ car $I\in(CI)$ et I est le centre l'homothétie h

On a aussi : $h(B)=D$ donc l'image de la droite (BC) est la droite qui passe par l'image de B qui est D et parallèle a (BC)

Donc : $h((BC))=(DJ)$

On a : $C\in(BC)\cap(CI)$

Donc : $h(C)\in h((BC))\cap h((CI))$

C'est-à-dire : $h(C)\in(DJ)\cap(CI)$

Et puisque : $(DJ)\cap(CI)=\{J\}$ alors : $h(C)=J$

Exercice 27 : (***) ABC un triangle tel que : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et m un paramètre réel

On considère une transformation T du plan qui transforme chaque point M en M' tel que :

$$\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$$

1) Montrer que pour tout réel m on a T est une translation dont on déterminera son vecteur.

2) Déterminer l'image de la droite (BC) par la translation T et en déduire l'image de la droite (AB) par T .

Solution :1) Soit M un point M du plan:

$T(M)=M'$ Équivaut à :

$$\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+\left(m+\frac{4}{3}\right)\overrightarrow{MB}-4\left(m+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MM'}=3m\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}+\frac{4}{3}\overrightarrow{MB}-4m\overrightarrow{MC}-\frac{4}{3}\overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-4\overrightarrow{MC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$$

$$\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$$

$$\overrightarrow{MM'}=m\left(3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}\right)$$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=m\left(\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}\right)+\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

Et puisque : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ alors : $\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

Donc : $\overrightarrow{MM'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(M)=M'$

Donc : $T=t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$ est la translation de vecteur $\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

2) Déterminons l'image de la droite (BC) par la translation $T=t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}$

On a : $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc les points A et B et C sont des points alignés.

Posons : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(B)=B'$ signifie que : $\overrightarrow{BB'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

donc : $B'\in(BC)$

De même $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(C)=C'$ signifie que : $\overrightarrow{CC'}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}$

donc : $C'\in(BC)$

Donc : $(B'C')=(BC)$ et par suite : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(BC)=(BC)$

Et puisque : points A et B et C sont des points alignés alors : $(AB)=(BC)$

Par suite : $t_{\frac{4}{3}\overrightarrow{CB}}(AB)=(BC)$

Exercice 28 : (***) A et B deux points fixes

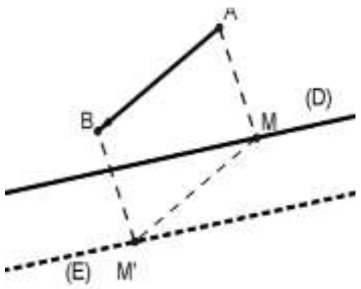
1) Soit une droite (D) et M un point qui varie sur la droite (D)

Déterminer l'ensemble (E) des points M' tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

2) (C) Est un cercle et M un point qui varie sur le cercle (C)

Déterminer l'ensemble (F) des points M' tel que : $MABM'$ est un parallélogramme

Solution : 1)



On a : $MABM'$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$

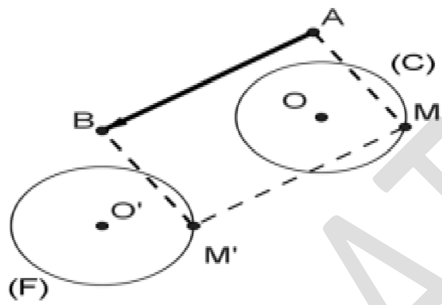
Donc : M' est l'image M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque M un point qui varie sur la droite (D) alors son image M' varie sur l'image de la droite (D).

Et puisque l'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle

Donc : l'ensemble (E) des points M' est la droite qui passe par M' est parallèle à la droite (D)

2)



On a : $MABM'$ est un parallélogramme

Donc : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ signifie que : $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M'$

Donc : M' est l'image M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Et puisque M un point qui varie sur le cercle (C) alors son image M' varie sur l'image du cercle (C)

Et puisque l'image d'un cercle par une translation est un cercle

Donc : l'ensemble (F) des points M' est l'image du cercle (C) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Exercice 29 : (***) Soit $ABCD$ un trapèze tel que : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ et tels que les points A et B sont fixes et $AB = 2$ et les points C et D sont variables avec : $AD = 3$ et E un point tel que : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$

1) Déterminer l'ensemble (E) des points D

2) Déterminer l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)

3) Représenter les ensemble (E) et (F)

Solution : 1) Déterminons l'ensemble (E) des points D

On a : $D \in (E)$ signifie que : $AD = 3$

Et par suite l'ensemble (E) est le cercle de centre A est de Rayon : $r = 3$

2) Déterminons l'ensemble (F) des points C lorsque D varie dans l'ensemble (E)

On a : $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{AB}$ cela signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(D) = C$

Et puisque l'ensemble (E) des points D est le cercle de centre A est de rayon $r = 3$

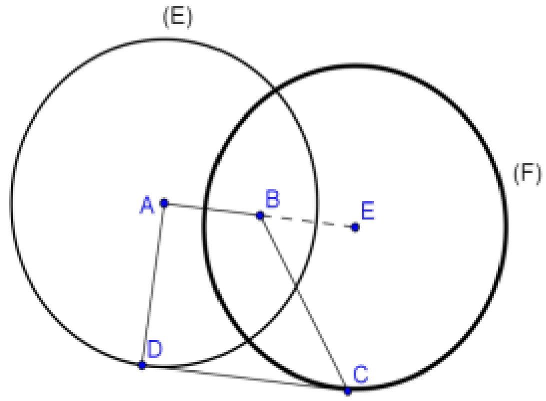
Alors (F) est l'image (E) par la translation $t_{2\overrightarrow{AB}}$

Par suite (F) est le cercle de centre $t_{2\overrightarrow{AB}}(A)$ est de rayon $r = 3$

Or on a : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$ cala signifie que : $t_{2\overrightarrow{AB}}(A) = E$

Par conséquent : (F) est le cercle de centre E est de rayon $r = 3$

4) Voir la figure



Exercice 30 : (***) Soit (C) un cercle de centre I est de rayon $r = 2$ et A et B des points fixes du plan

Et soit M un point variable sur le cercle (C) et soit N un point tel que : $AMNB$ est un parallélogramme

Déterminer l'ensemble (E) des points N lorsque M varie dans le cercle (C).

Solution : Déterminons l'ensemble (E) : On a : $AMNB$ est un parallélogramme

Cela signifie que : $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}$

Alors N est l'image de M par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Lorsque M varie dans le cercle (C) alors N varie dans l'image du cercle (C) par la Translation $t_{\overrightarrow{AB}}$

Par suite : l'ensemble (E) est le cercle de centre $t_{\overrightarrow{AB}}(I)$ est de rayon $r=2$

Exercice 31 : (***) Soit ABC un triangle

On associe à chaque point M du segment $[BC]$ le point M' tel que M le milieu du segment $[AM']$

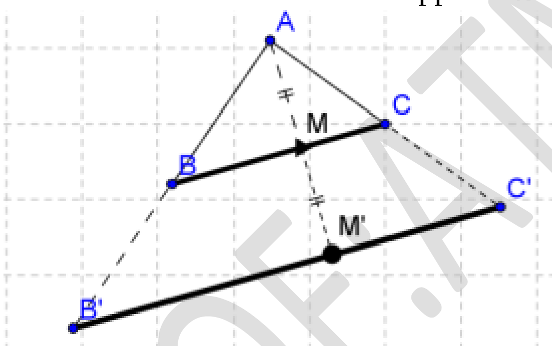
1) Montrer qu'il existe une homothétie h tel que : $h(M)=M'$ pour tous point du segment $[BC]$

2) En déduire l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$

Solution : 1) On a M le milieu du segment $[AM']$

donc : $\overrightarrow{AM'}=2\overrightarrow{AM}$

C'est-à-dire : M' est l'image du point M par l'homothétie h de centre A et de rapport : $k=2$



2) Si le point M varie sur Le segment $[BC]$ alors son image M' varie sur l'image du segment $[BC]$ par 'homothétie h de centre A et de rapport : $k=2$

C'est-à-dire : M' varie sur le segment $[B'C']$ avec : $h(B)=B'$ et $h(C)=C'$

($\overrightarrow{AB'}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AC}$)

Donc l'ensemble (E) des points M' lorsque M varie sur le segment $[BC]$ est le segment $[B'C']$

Exercice 32 : (*) On considère deux points A et B tels que : $AB=3cm$.

Et nous considérons la translation $t_{\vec{u}}$ qui transforme respectivement les points : A , B, C et D en A' , B' ; C' et D' et sachant que : $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$

Calculer : $C'D'$.

Solution : On a : $\overrightarrow{CD}=-2\overrightarrow{AB}$ et la translation $t_{\vec{u}}$ transforme respectivement les points : A , B, C et D en A' , B' ; C' et D' et puisque : la translation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Alors : $\overrightarrow{C'D'}=-2\overrightarrow{A'B'}$

Donc : $C'D'=2A'B'$

D'autre part puisque : $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=A'$ et $t_{\overrightarrow{AB}}(B)=B'$

Alors d'après la propriété caractéristique de la translation on a : $A'B'=AB=3cm$

Par suite : $C'D'=2\times 3cm=6cm$.

Exercice 33 : (**) A , B, C et D sont quatre points du plan deux a deux distincts .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs fixés.

Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ qui transforme A en D et C en B.

Soit $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}$ qui transforme B en A .

Déterminer la translation qui transforme C en D .

Solution : Nous avons : $t_{\vec{u}}(A)=D$

Équivaut à : $\overrightarrow{AD}=\vec{u}$ et $t_{\vec{u}}(C)=B$

Équivaut à : $\overrightarrow{CB}=\vec{u}$

Et on a : $t_{\vec{v}}(B)=A$ Équivaut à : $\overrightarrow{BA}=\vec{v}$

On a : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$ donc : $\overrightarrow{CD}=\vec{u}+\vec{v}+\vec{u}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{CD}=2\vec{u}+\vec{v}$

Par suite : la translation qui transforme C en D est la translation $t_{\vec{w}}$ de vecteur : $\vec{w}=2\vec{u}+\vec{v}$.

Exercice 34 : (**) Soient deux points fixes distincts A et B du plan.

Soit T une transformation du plan qui transforme chaque point M en M' tel que : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

1) On utilisant la propriété caractéristique d'une translation montrer que T est une translation

2) Déterminer un vecteur de la translation T

Solution :1) Soient M et N deux points du plan nous avons : $T(M)=M'$

Équivaut à : $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$ (1)

$T(N)=N'$ Équivaut à: $\overrightarrow{N'A}-\overrightarrow{N'B}+5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$ (2)

$(2)-(1)$ Donne :

$\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{N'A}+\overrightarrow{N'B}-5\overrightarrow{NN'}=\vec{0}$

Équivaut à :

$\overrightarrow{M'A}+\overrightarrow{AN'}+\overrightarrow{N'B}+\overrightarrow{BM'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à :

$\overrightarrow{M'N'}+\overrightarrow{N'M'}+5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $5\overrightarrow{MM'}+5\overrightarrow{N'N}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{NN'}$

Et d'après la propriété caractéristique d'une translation cela veut dire que T est une translation

2) Déterminons un vecteur de la translation T :

$T(M)=M'$ Équivaut à: $\overrightarrow{M'A}-\overrightarrow{M'B}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{BA}+5\overrightarrow{MM'}=\vec{0}$

Équivaut à : $\overrightarrow{MM'}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ c'est-à-dire : $t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}(M)=M'$

Par suite : T est la translation de vecteur $\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

C'est-à-dire : $T=t_{\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}}$.

Exercice 35 : (***) ABC un triangle équilatéral.

M , N et P sont les milieux des segments $[AB]$; $[AC]$ et $[BC]$ et I est le point d'intersection des médianes : $(AP);(BN)$ et (CM)

A' , B' et C' sont respectivement les images des points : A , B et C par l'homothétie h de centre I et de rapport $k=\frac{1}{2}$

1) Faite une figure.

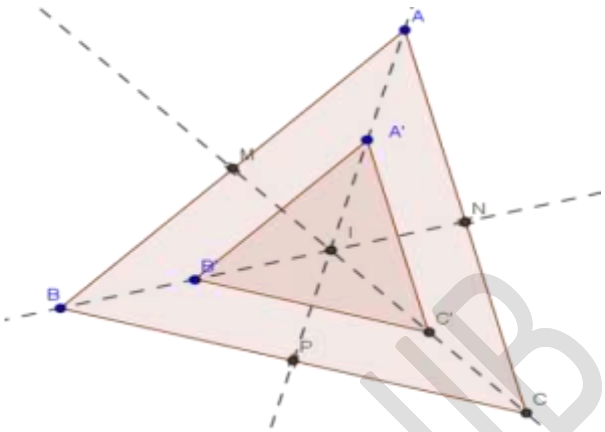
2) Monter que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

3) Monter que le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

4) Monter que : $\frac{L}{L'}=2$ .sachant que L est le périmètre du triangle ABC et L' est le périmètre du triangle $A'B'C'$

5) Monter que : $\frac{S}{S'}=4$ .sachant que S est la surface du triangle ABC et S' est la surface du triangle $A'B'C'$

Solution :1)



2) Montrons que : $\frac{AB}{A'B'}=2$.

On a $\begin{cases} h(A)=A' \\ h(B)=B' \end{cases}$ donc : d'après la propriété caractéristique de l'homothétie on a : $\overrightarrow{A'B'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\left\|\overrightarrow{A'B'}\right\|=\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right\|$ par suite : $A'B'=\frac{1}{2}AB$

D'où : $\frac{AB}{A'B'}=2$

3) Montrons que : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

On a : $A'B'=\frac{1}{2}AB$

De même on montre que : $A'C'=\frac{1}{2}AC$ et aussi $B'C'=\frac{1}{2}BC$

Et puisque : $AB=AC=BC$ alors :

$A'B'=A'C'=B'C'$ D'où : le triangle $A'B'C'$ est équilatéral

4) Montrons que : $\frac{L}{L'}=2$?

On a : $\frac{AB}{A'B'}=2$ et $\frac{AC}{A'C'}=2$ et $\frac{BC}{B'C'}=2$

Donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=2$

Donc : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB+AC+BC}{A'B'+A'C'+B'C'}=\frac{L}{L'}$

Donc : $\frac{L}{L'}=\frac{AB}{A'B'}=2$

5) Montrons que : $\frac{S}{S'}=4$? On a : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$

et $C=C'$ car l'homothétie conserve la mesure des angles

Or : la surface du triangle ABC est :

$S=\frac{1}{2}AC\times BC\times\sin C$ et la surface de $A'B'C'$ est :

$S'=\frac{1}{2}A'C'\times B'C'\times\sin C'$

Par conséquent :

$\frac{S}{S'}=\frac{AC\times BC\times\sin C}{A'C'\times B'C'\times\sin C'}=\frac{AC\times BC}{A'C'\times B'C'}=\frac{AC}{A'C'}\times\frac{BC}{B'C'}=2\times2=4$

Exercice 36 : (***) (C) un cercle de centre I et de rayon $R=1,5cm$.

Soit h l'homothétie de centre I et de rapport $k=2$

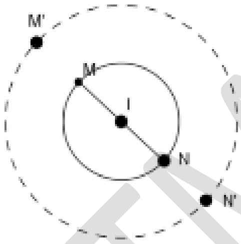
M , N sont deux points de (C) diamétralement opposés. M' et N' sont leurs images par h

1) Faite une figure et monter que : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$.

2) Monter que : $\overrightarrow{N'M}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$.

3) Quelle est l'image du cercle (C) par l'homothétie h

Solution :1) La figure :



Montrons que : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$?

$h(M)=M'$ Equivaut à : $\overrightarrow{IM'}=2\overrightarrow{IM}$

D'autre part : $\overrightarrow{M'M}=\overrightarrow{M'I}+\overrightarrow{IM}$ (relation de chasles)

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-\overrightarrow{IM'}+\overrightarrow{IM}$

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-2\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IM}$

Donc ; $\overrightarrow{M'M}=-\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{MI}$ et puisque I le milieu du segment $[MN]$ D'où : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

3) Montrons que : $\overrightarrow{N'M}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$?

On a : $\overrightarrow{N'M}=\overrightarrow{N'M'}+\overrightarrow{M'M}$ (relation de chasles)

Or on a : $\begin{cases}h(M)=M'\\h(N)=N'\end{cases}$ donc $\overrightarrow{N'M'}=2\overrightarrow{NM}$

D'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Et on aussi : $\overrightarrow{M'M}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ donc :

$\overrightarrow{N'M}=2\overrightarrow{NM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NM}$

4) puisque : $h(I)=I$ car c'est le centre de l'homothétie h

L'image du cercle (C) par l'homothétie h est le cercle (C') de centre I et de rayon :

$R'=2\times1.5cm=3cm$

Exercice 37 : (***) A , B , C trois points du plan tel que B est le milieu du segment $[AC]$

Soit la droite (Δ) qui passe par A et différent de la droite (AB) et non perpendiculaire a (AB)

B' et C' les projections orthogonales respectivement des points B et C sur la droite (Δ)

I le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$

Soit h l'homothétie de centre I et transforme B en C'

1) Déterminer l'image du point B' par l'homothétie h et déterminer le rapport k de l'homothétie h

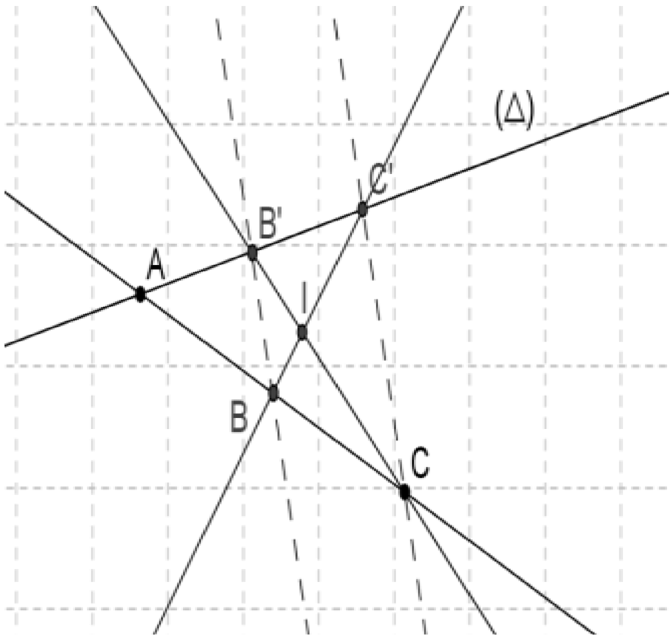
2) a) Déterminer le nombre réel x tel que : $\overrightarrow{BI}=x\overrightarrow{BC'}$

b) Déterminer l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie

c) Déterminer l'ensemble (F) des points I lorsqu'elle varie sur (Δ)

d) Faire une figure sachant que : $AB=4cm$

Solution :1)



h L'homothétie de centre I et $h(B)=C'$

On a : $h(B)=C'$ donc : $\overrightarrow{IC'}=k\overrightarrow{IB}$

Et puisque : $(BB')\parallel(CC')$ donc d'après le théorème de Thalès on a : $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB'}$

Donc : $h(B')=C$

Donc: d'après la propriété caractéristique d'une homothétie on a $\overrightarrow{CC'}=k\overrightarrow{B'B}$

Donc: $CC'=|k|B'B$ par suite : $\frac{CC'}{B'B}=|k|$

On considère le triangle ACC'

On a : B est le milieu du segment $[AC]$ et $(BB')\parallel(CC')$

Donc: B' est le milieu du segment $[AC']$ et $CC'=2B'B$

Par suite : $\frac{CC'}{B'B}=2$

Donc : $2=|k|$ et puisque : $\overrightarrow{B'B}$ et $\overrightarrow{CC'}$ ont le même sens contraire Alors : $-2=k$

2)a) On a : $h(B)=C'$ donc : $\overrightarrow{IC'}=-2\overrightarrow{IB}$

C'est-à-dire : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC'}=-2\overrightarrow{IB}$

Donc : $3\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{BC'}$

Par suite : $\overrightarrow{IB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $x=-\frac{1}{3}$

2)b) On a : $AC'C$ est un angle droit et A et C deux points fixes .

Donc lorsque la droite (Δ) varie le point C' varie sur le cercle (Γ) de diamètre $[AC]$.

Mais le point C' est tel que : $C'\neq A$ et $C'\neq C$

Donc l'ensemble (E) des points C' lorsque (Δ) varie est le (Γ) de diamètre $[AC]$ privé des points A et C.

C'est-à-dire : $(E)=(\Gamma)-\{A;C\}$

2)c) On a : $\overrightarrow{IB}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$ donc : $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC'}$

C'est-à-dire : I est l'image du point C' par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$

Donc lorsque le point C' varie su le cercle (Γ) alors le point I varie su le cercle (Γ') l'image du cercle (Γ) par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$ privé des points A' et I tel que : $h'(A)=A'$

Et on a le rayon du cercle (Γ') est : $r'=\frac{1}{3}\times r$ avec r le rayon du cercle (Γ).

Le centre du cercle (Γ') est : l'image du centre du cercle (Γ)

Par l'homothétie $h'_{\left(B;\frac{1}{3}\right)}$

Par suite : $(F)=(\Gamma')-\{A';I\}$

d) La figure sachant que : $AB=4cm$