Exercices avec corrections sur la TRIGONOMÉTRIE 1: partie2

Types d'exercices :

Application directe du cours (*) Difficulté moyenne (**) Demande une réflexion (***)

Exercice1 : 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 30°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

3) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 135°.

4) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure 1rad

5) Convertir en radians les mesures suivantes :
0° ; 30° ; 45° ; 60° ; 90° ; 180°; 360°

Solution : 1) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ implique $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{30}{180}$

$\alpha=30\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{6}$ rad.

2) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ implique $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$

C'est-à-dire : $\alpha\times180=\beta\times\pi$

$\beta=\frac{\alpha\times180}{\pi}=\frac{3\pi}{8}\times\frac{180}{\pi}=67,5°$

3) On a : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ équivalent à : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{135}{180}$

Équivalent à : $\alpha=135\times\frac{\pi}{180}=\frac{3\pi}{4}$ rad.

4) $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$ équivalent à : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$

C'est-à-dire : $\alpha\times180=\beta\times\pi$

$\beta=\frac{1\times180}{\pi}=\frac{180}{\pi}=57,29579143...\text{deg}\simeq57,2^{\circ}$

5) De la même manière (on appliquant : $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\beta}{180}$)

Nous obtenons les mesures remarquables que Résume le tableau suivant :

En degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
En radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Exercice2 : Calculer la longueur L de l'arc AB d'un cercle (C) de rayon $R=3cm$ et tel que :

$\alpha=\left(\overline{AOB}\right)=\frac{\pi}{3}rad$

Solution : On a : $L=R\times\alpha=3\times\frac{\pi}{3}cm=\pi cm$

Exercice3: Calculer la longueur L de l'arc AB d'un cercle (C) de rayon $R=60cm$ et tel que :

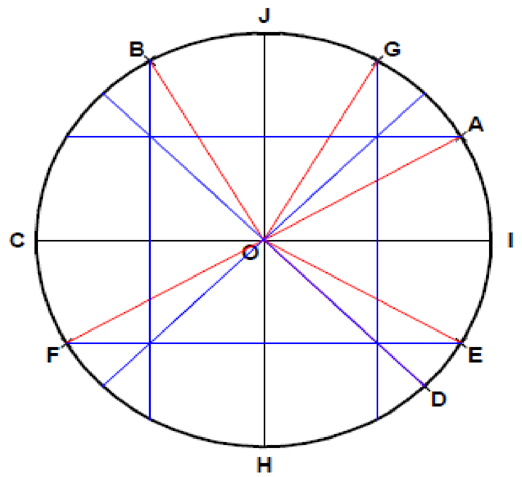
$\alpha=\left(\overline{AOB}\right)=70gr$

Solution : D'abord on va convertir $70gr$ en radian:

$\alpha=70\times\frac{\pi}{200}=\frac{7\pi}{20}$ rad.

Donc : $L=R\times\alpha=60\times\frac{7\pi}{20}cm=21\pi cm\simeq65,94cm$

Exercice4 : Sur le cercle trigonométrique ci-contre, déterminer les abscisses curvilignes associés aux points : $A;\ B\ ;\ C\ ;D\ ;\ E\ ;\ F\ ;G\ ;\ H\ ;I\ ;\ J$



Solution : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $B\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; $C(\pi)$; $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
$E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; $F\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; $G\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $H\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $I(0)$
$J\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Exercice5 :1) Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des abscisses suivantes

7π , $\frac{110\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{131\pi}{3}$, $-\frac{217\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points :

$A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$;$D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$

$H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;$G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Solution :

▪ $x=7\pi$ Soit α l'abscisse curviligne principale associée a x.

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$

C'est-à-dire : $\alpha=7\pi+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<7\pi+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $\pi-7\pi<2k\pi\le\pi-7\pi$

Équivalent à : $-8<2k\le-6$

Équivalent à : $-4<k\le-3$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-3$ et donc : $\alpha=7\pi+2(-3)\pi=7\pi-6\pi=\pi$

Donc l'abscisses curviligne principale associée à $x=7\pi$ est $\alpha=\pi$

▪ $x=\frac{110\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$

C'est-à-dire : $\alpha=\frac{110\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<\frac{110\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi-\frac{110\pi}{3}<2k\pi\le\pi-\frac{110\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{113\pi}{3}<2k\pi\le-\frac{107\pi}{3}$

Équivalent à : $-\frac{113}{6}<k\le-\frac{107}{6}$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $-18.83<k\le-17.83$et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=-18$ et donc

$\alpha=\frac{110\pi}{3}+2k\pi=\frac{110\pi}{3}+2(-18)\pi=\frac{110\pi-108\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à :

$x=\frac{110\pi}{3}$ est $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

▪ $x=\frac{19\pi}{4}$: On a :

$\frac{19\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=4\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\times2\pi$

Et $\frac{3\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$ donc l'abscisse curviligne principale associée à $\frac{19\pi}{4}$ est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

▪ $x=-\frac{131\pi}{3}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$

Équivalent à : $\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<-\frac{131\pi}{3}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi+\frac{131\pi}{3}<2k\pi\le\pi+\frac{131\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{128\pi}{3}<2k\pi\le\frac{134\pi}{3}$

Équivalent à : $\frac{128}{6}<k\le\frac{134}{6}$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $21.33<k\le22.33$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=22$ et donc

$\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi=-\frac{131\pi}{3}+2(22)\pi=\frac{-131\pi+132\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $x=-\frac{131\pi}{3}$ est $\alpha=\frac{\pi}{3}$

▪ $x=-\frac{217\pi}{6}$ et soit α l'abscisse curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$

C'est-à-dire : $\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

C'est-à-dire : $-\pi<-\frac{217\pi}{6}+2k\pi\le\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivalent à : $-\pi+\frac{217\pi}{6}<2k\pi\le\pi+\frac{217\pi}{6}$

Équivalent à : $\frac{211\pi}{6}<2k\pi\le\frac{223\pi}{6}$

Équivalent à : $\frac{211}{12}<k\le\frac{223}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $17.58<k\le18.58$ et $k\in\mathbb{Z}$

Alors $k=18$ et donc :

$\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi=-\frac{217\pi}{6}+2(18)\pi=\frac{-217\pi+216\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$

Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $x=-\frac{217\pi}{6}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{6}$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points

▪ $x=\frac{7\pi}{2}$ On a : $\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\times 2\pi$

et $-\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ Donc : l'abscisse curviligne principale associée à $x=\frac{7\pi}{2}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

▪ $x=\frac{2007\pi}{4}$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve $501,75$

On prend le nombre entier proche ex : 502

Donc : $\frac{2007\pi}{4}-502\pi=\frac{2007\pi}{4}-\frac{2008\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

$\frac{2007\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+502\pi=-\frac{\pi}{4}+2\times 251\pi$ et $-\frac{\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisse curviligne principale associée à : $x=\frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

Methode2 : $-\pi<\frac{2007\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$

Équivalent à : $-1<\frac{2007}{4}+2k\leq 1$

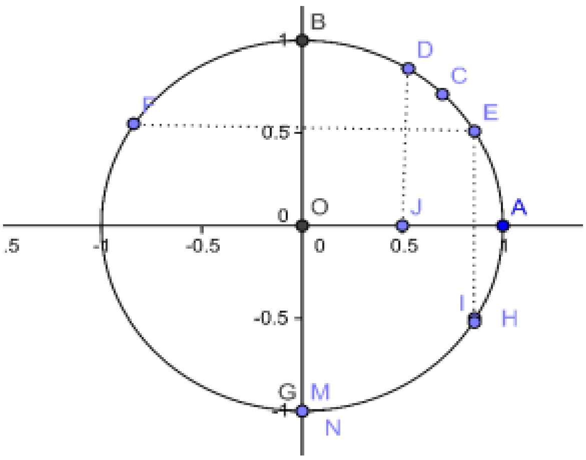
Équivalent à : $-1-\frac{2007}{4}<2k\leq 1-\frac{2007}{4}$

Équivalent à : $-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}$

Donc $-251,3\simeq-\frac{2011}{8}<k\leq-\frac{2003}{8}\simeq-250,3$

Donc $k=-251$

Par suite : $\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$



Exercice6 : Déterminer l'abscisse curviligne principale de chacune des points suivants $M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$; $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$; $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$; $M_4\left(\frac{181\pi}{6}\right)$

Solution :

▪ $x=\frac{9\pi}{2}$ *Methode1:*

$\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times 2\pi+\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Methode2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{9}{2}+2k\leq 1$

C'est-à-dire : $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\leq 1-\frac{9}{2}$

Donc : $-\frac{11}{2}<2k\leq-\frac{7}{2}$ par suite : $-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}$

Donc : $-2,7\simeq-\frac{11}{4}<k\leq-\frac{7}{4}\simeq-1,7$ et $k\in\mathbb{Z}$

c'est-à-dire : $k=-2$

Par suite : $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

Donc : l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$

▪ $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a $\frac{11\pi}{3}=\frac{12\pi-\pi}{3}=4\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\times 2\pi$

et $-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est: $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

Methode2: $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{11}{3}+2k\leq 1$

Par suite : $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\leq 1-\frac{11}{3}$

Donc : $-\frac{14}{3}<2k\leq -\frac{8}{3}$ par suite : $-\frac{7}{3}<k\leq -\frac{4}{3}$

Donc : $-2,3\simeq -\frac{7}{3}<k\leq -\frac{4}{3}\simeq -1,3$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc : $k=-2$ par suite :

$\alpha=\frac{11\pi}{3}+2(-2)\pi=\frac{11\pi}{3}-4\pi=\frac{11\pi-12\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_1 est : $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

▪ $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a

$\frac{67\pi}{3}=\frac{64\pi+3\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=16\pi+\frac{3\pi}{4}=2\times 8\pi+\frac{3\pi}{4}$

et $\frac{3\pi}{4}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

Methode2: $-\pi<\frac{67\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{67}{4}+2k\leq 1$

Donc $-1-\frac{67}{4}<-\frac{67}{4}+\frac{67}{4}+2k\leq 1-\frac{67}{4}$

Donc $-\frac{71}{4}<2k\leq -\frac{63}{4}$

C'est-à-dire : $-8,8\simeq -\frac{71}{8}<k\leq -\frac{63}{8}\simeq -7,8$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=-8$ c'est à dire :

$\alpha=\frac{67\pi}{4}+2(-8)\pi=\frac{67\pi}{4}-16\pi=\frac{67\pi-64\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

Donc l'abscisse curviligne principale du point M_2 est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

▪ $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

On a $\frac{19\pi}{3}=\frac{18\pi+\pi}{3}=\frac{18\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=6\pi+\frac{\pi}{3}=2\times 3\pi+\frac{\pi}{3}$

et $\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ Donc l'abscisses curviligne principale du point M_3 est : $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

• $M_4\left(\frac{181\pi}{6}\right)$

Methode1: On a

$\frac{181\pi}{6}=\frac{180\pi+\pi}{6}=\frac{180\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=30\pi+\frac{\pi}{6}$.

$\frac{181\pi}{6}=2\times 15\times\pi+\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

Donc : l'abscisse curviligne principale du point M_4 est : $\alpha=\frac{\pi}{6}$ avec $k=15$.

(Le nombre de tours effectués par le point est 15)

Methode2: On effectue la division euclidienne de 181 par 6 on trouve : $181=6\times 30+1$ Par suite :

$\frac{181\pi}{6}=\frac{(6\times 30+1)\pi}{6}=\frac{6\times 30\pi+\pi}{6}=\frac{6\times 30\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$

$\frac{181\pi}{6}=30\pi+\frac{\pi}{6}$ et donc l'abscisse curviligne principale du point M_4 est $\alpha=\frac{\pi}{6}$ car $\frac{\pi}{6}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$.

Exercice7 : Soit sur un cercle trigonométrique un point A d'abscisse curviligne principale $\alpha=\frac{\pi}{4}$ et ce point tourne sur ce cercle.

Quel est le nombre de tours effectués par ce point si $x=\frac{65\pi}{4}$ est son abscisse curviligne.

Solution : $\frac{65\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ avec : k le nombre de tours effectués par le point.

$\frac{65\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ Équivalent à : $2k\pi=\frac{65\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{64\pi}{4}$

Équivalent à : $2k=\frac{64}{4}$ c'est à dire : $k=\frac{64}{8}=8$

Le nombre de tours effectués par le point est $k=8$

Exercice 8 : Dans chacun des cas suivant, donner trois autres réels associés au même point sur le cercle trigonométrique :

1) $A(-\pi)$ 2) $B\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ 3) $C(10\pi)$ 4) $D\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

Solution :1) π : 3π ; 5π et plus généralement $-\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

2) $-\frac{\pi}{2}$: $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{2}$ et plus généralement $\frac{3\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

3) $0\ :\ 2\pi\ ;\ 4\pi$ et plus généralement $10\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

4) $\dfrac{7\pi}{4}\ :\ \dfrac{15\pi}{4}\ ;\ \dfrac{23\pi}{4}$ et plus généralement $-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 9: Parmi les mesures suivantes, indiquer celles qui sont associés au même point que $M\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ sur le cercle trigonométrique :

$\dfrac{47\pi}{12}\ ;\dfrac{-49\pi}{12};\dfrac{11\pi}{12};\dfrac{-241\pi}{12}\ ;\dfrac{-37\pi}{12}\ ;-\dfrac{313\pi}{12}$

Solution : $\dfrac{47\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{48\pi}{12}=4\pi$ ce qui correspond à un écart de deux tours.

$\dfrac{-49\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-\dfrac{48\pi}{12}=-4\pi$

Ce qui correspond à un écart de deux tours.

$\dfrac{11\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{12\pi}{12}=\pi$ ce qui correspond à un demi-tour.

$\dfrac{-241\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-\dfrac{240\pi}{12}=-20\pi$

Ce qui correspond à un écart de 10 tours.

$\dfrac{-37\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-\dfrac{36\pi}{12}=-3\pi$

Ce qui correspond à un tour et demi.

$-\dfrac{313\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)=-\dfrac{312\pi}{12}=-26\pi$

Ce qui correspond à un écart de 13 tours.

Finalement $\dfrac{47\pi}{12}\ ;\dfrac{-49\pi}{12};\dfrac{-241\pi}{12}\ ;-\dfrac{313\pi}{12}$ sont associés au même point que M .

Exercice10 : Placer sur un cercle trigonométrique d'origine I Les points M_k d'abscisses curvilignes : $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution :1) pour placer facilement ces points M_k sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principales de ces points $M_k\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$.

$\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$ Équivalent à : $-\pi\prec\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{k\pi}{2}\le\pi$

Équivalent à : $-1\prec\dfrac{1}{3}+\dfrac{k}{2}\le1$

Équivalent à : $-1-\dfrac{1}{3}\prec\dfrac{k}{2}\le1-\dfrac{1}{3}$

Équivalent à : $-\dfrac{4}{3}\prec\dfrac{k}{2}\le\dfrac{2}{3}$ c'est-à-dire : $-\dfrac{8}{3}\prec k\le\dfrac{4}{3}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

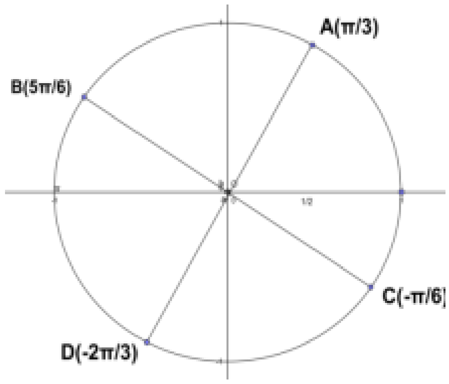
Par suite : $k=-2$ ou $k=-1$ ou $k=0$ ou $k=1$

Si $k=0$ alors : $A\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

Si $k=1$ alors : $B\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $B\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$

Si $k=-1$ alors : $C\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{1\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $C\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Si $k=-2$ alors : $D\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2\pi}{2}\right)$ c'est-à-dire : $D\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$



Exercice11 : Dans chacun des cas suivants, déterminer si x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

1) $x=\dfrac{\pi}{2}$ et $y=\dfrac{3\pi}{2}$ 2) $x=\dfrac{5\pi}{3}$ et $y=-\dfrac{21\pi}{4}$

3) $x=\dfrac{29\pi}{3}$ et $y=\dfrac{-2\pi}{3}$ 4) $x=\dfrac{43\pi}{12}$ et $y=-\dfrac{5\pi}{12}$

Solution :1) $x=\dfrac{\pi}{2}$ et $y=\dfrac{3\pi}{2}$

$x-y=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{2}=-\pi$ Donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

2) $x=\dfrac{5\pi}{3}$ et $y=-\dfrac{21\pi}{4}$

$x-y=\dfrac{5\pi}{3}+\dfrac{21\pi}{4}=\dfrac{83\pi}{12}$ Donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

3) $x=\dfrac{29\pi}{3}$ et $y=\dfrac{-2\pi}{3}$

On a : $x-y=\dfrac{29\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{31\pi}{12}$

Donc x et y ne sont pas des mesures d'un même angle orienté.

4) $x=\frac{43\pi}{12}$ et $y=-\frac{5\pi}{12}$

$x-y=\frac{43\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}=\frac{48\pi}{12}=4\pi$

Donc x et y sont des mesures d'un même angle orienté.

Exercice12: Soit sur un cercle trigonométrique d'origine I les points A ; B; C; D d'abscisses curvilignes respectifs : $\frac{85\pi}{3}$; $\frac{-139\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{6}$.

1) Placer sur le cercle trigonométrique ces points

2) En déduire les mesures des angles orientés :

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$; $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)$;

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)$

Solution :1) pour placer facilement ces points sur le cercle on cherche les abscisses curvilignes principale de ces points.

$A\left(\frac{85\pi}{3}\right)$: $\frac{85\pi}{3}=\frac{84\pi+\pi}{3}=\frac{84\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=2\times14\pi+\frac{\pi}{3}$

On a : $\frac{\pi}{3}\in]-\pi;\pi]$ donc c'est l'abscisse curviligne principale du point A

$B\left(\frac{139\pi}{6}\right)$: $\frac{-139\pi}{6}=\frac{-144\pi+5\pi}{6}=\frac{-144\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=-24\pi+\frac{5\pi}{6}$

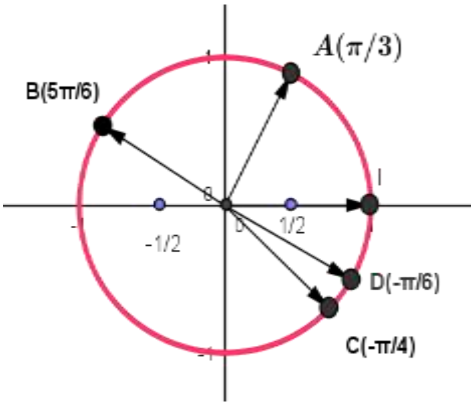
On a : $\frac{5\pi}{6}\in]-\pi;\pi]$ donc : c'est l'abscisse curviligne principale du point B

$C\left(\frac{7\pi}{4}\right)$: $\frac{7\pi}{4}=\frac{8\pi-\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=2\pi-\frac{\pi}{4}$

On a : $-\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$ donc : c'est l'abscisse curviligne principale du point C

$D\left(\frac{11\pi}{6}\right)$: $\frac{11\pi}{6}=\frac{12\pi-\pi}{6}=\frac{12\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=2\pi-\frac{\pi}{6}$

On a : $-\frac{\pi}{6}\in]-\pi;\pi]$ donc : c'est l'abscisse curviligne principale du point D



2) $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

On a : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OI}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right)[2\pi]$

Donc : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

C'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OC}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OD}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Exercice 13: ABC est un triangle dans le plan tel que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Calculer en fonction de α les mesures des angles suivants :

$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$; $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB}\right)$

Solution : $\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)+2k\pi$ Donc :

$\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)=-\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

On a d'après la relation de Chasles :

$\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\left(-\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Par suite : $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AC}\right)=\pi+\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

On a d'après la relation de Chasles :

$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BA}\right)$

Donc : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)=\pi-\alpha+2k\pi+\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Par suite : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)=2\pi-\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

C'est-à-dire : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)=-\alpha+2k'\pi$ avec $k'\in\mathbb{Z}$

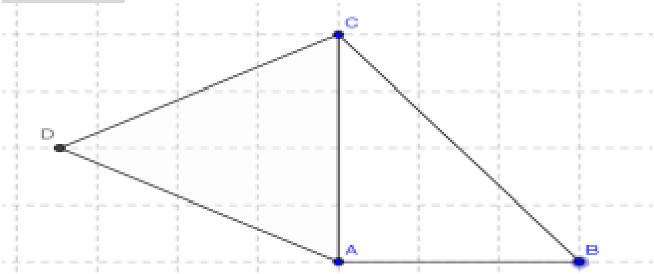
On a d'après la relation de Chasles :
$\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB}\right)=\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)$

Par suite : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{AB}\right)=\pi-\alpha+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Exercice 14 : ABC est un triangle rectangle en A direct, tel que $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\equiv-\frac{\pi}{6}[2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

1) Faire une figure.
2) Déterminer la mesure principale des angles suivant :
$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right);\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right);\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)$; $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)$

Solution :



$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$

$\equiv-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv-\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{BA}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi+\left(\overrightarrow{CD};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{5\pi}{6}[2\pi]$

Dans le triangle ABC on a : $ABC+BAC+ACB=\pi$

donc : $ACB=\pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

Donc, vue l'orientation : $\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice 15 : Sachant que : $\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

déterminer la mesure principale de :
$\left(2\vec{u};\vec{v}\right);\left(-\vec{v};2\vec{u}\right)$; $\left(3\vec{v};-2\vec{u}\right)$;

Solution : $\left(\overrightarrow{2u};\vec{v}\right)\equiv\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{-v};\overrightarrow{2u}\right)\equiv\left(\overrightarrow{-v};\vec{v}\right)+\left(\vec{v};\overrightarrow{2u}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi+\left(\vec{v};\vec{u}\right)[2\pi]\equiv\pi-\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi+\frac{3\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{7\pi}{4}[2\pi]\equiv2\pi-\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\left(\overrightarrow{3v};-\overrightarrow{2u}\right)\equiv\left(\vec{v};-\vec{u}\right)[2\pi]\equiv-\left(\overrightarrow{-u};\vec{v}\right)[2\pi]$

$\equiv\left(\pi+\left(\vec{u};\vec{v}\right)\right)[2\pi]\equiv-\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)[2\pi]\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 16 : Sachant que.
$\left(\vec{u};\vec{v}\right)\equiv-\frac{\pi}{7}[2\pi]$ et $\left(\vec{u};\vec{w}\right)\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Déterminer la mesure principale de :
$\left(\vec{v};\vec{w}\right)$; $\left(-\vec{u};\vec{v}\right)$ et $\left(-\vec{w};\vec{v}\right)$

Solution : $\left(\vec{v};\vec{w}\right)\equiv\left(\vec{v};\vec{u}\right)+\left(\vec{u};\vec{w}\right)[2\pi]$

$\equiv-\left(\vec{u};\vec{v}\right)+\left(\vec{u};\vec{w}\right)[2\pi]$

$\equiv-\left(-\frac{\pi}{7}\right)-\frac{\pi}{4}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(\vec{v};\vec{w}\right)\equiv-\frac{3\pi}{28}[2\pi]$

$\left(-\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\pi+\left(\vec{u};\vec{v}\right)[2\pi]\equiv\pi-\frac{\pi}{7}[2\pi]$

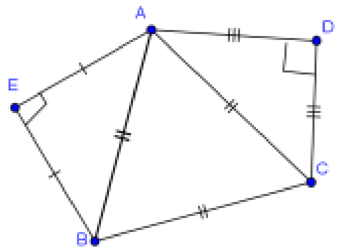
Donc : $\left(-\vec{u};\vec{v}\right)\equiv\frac{6\pi}{7}[2\pi]$

$\left(-\vec{w};\vec{v}\right)\equiv\pi+\left(\vec{w};\vec{v}\right)[2\pi]\equiv\pi-\left(\vec{v};\vec{w}\right)[2\pi]$

$\equiv\pi+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : $\left(-\vec{w};\vec{v}\right)\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Exercice17: D'après la figure suivante donner la mesure principale des angles orientés suivant :
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$; $\left(\overrightarrow{AE};\overrightarrow{AD}\right)$;$\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BE}\right)$; $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$;
$\left(\overrightarrow{EB};\overrightarrow{EA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{DA}\right)$



Solution : Le triangle : ACD est rectangle et isocèle en D et Le triangle : ABC est équilatérale

• La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$ Est $\frac{\pi}{3}$ et on écrit : $\left(\overline{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

• La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DA}\right)$

Est $-\frac{\pi}{2}$ et on écrit : $\left(\overrightarrow{DC}\,;\overrightarrow{DA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

• On a : $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CD}\right)$

Donc : La mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right)$ est : $-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $-\frac{7\pi}{12}$

• Le triangle : AEB est rectangle et isocèle en E

Donc : $\left(\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}\,;\overrightarrow{AD}\right)$

Donc : $\left(\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{AE}\,;\overrightarrow{AD}\right)$ est : $\frac{5\pi}{6}$

• On a : $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BE}\right)=\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{BA}\,;\overrightarrow{BE}\right)$

Donc : La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BE}\right)$ est : $\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire : $\frac{7\pi}{12}$

• La mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{BE}\,;\overrightarrow{EA}\right)$ est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice 18 : A ; B ; C et D sont quatre points du plan. Démontrer l'égalité :

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)\equiv 0[2\pi]$$

Solution :

$$\left(\overline{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DC}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{BA}}\right)[2\pi]$$

$$\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{AD}\,;\overrightarrow{CD}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{CD}\,;\overrightarrow{CB}}\right)+\left(\overline{\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]$$

Car : $\left(\overline{-\vec{u}\,;-\vec{v}}\right)\equiv\left(\overline{\vec{u}\,;\vec{v}}\right)[2\pi]$ et grâce à la relation de Chasles on a donc ;

$$\equiv\left(\overline{\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AB}}\right)[2\pi]\quad\equiv 0[2\pi]$$

Exercice19: Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivants :

7π , $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{35\pi}{4}$

Solution :

✓ $\cos(7\pi)=\cos(\pi+6\pi)=\cos(\pi+2\times3\pi)=\cos(\pi)=-1$

$\sin(7\pi)=\sin(\pi+6\pi)=\sin(\pi+2\times3\pi)=\sin(\pi)=0$

$\tan(7\pi)=\tan(0+7\pi)=\tan(0)=0$

✓ On a : $\frac{5\pi}{6}=\frac{6\pi-\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

✓ On a : $\frac{7\pi}{6}=\frac{6\pi+\pi}{6}=\frac{6\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi+\frac{\pi}{6}$

$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$

✓ On a : $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$

✓ On a : $\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$

$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

$\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=\cos\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{36\pi-\pi}{4}\right)=-\sin\left(9\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\left(-\frac{35\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi+8\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Exercice20 : soit $-\pi<x<\pi$; calculer :

$A=\sin\left(\frac{6\pi-x}{6}\right)+\sin\left(\frac{12\pi+2x}{12}\right)$; $B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$C=\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

$D=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$;

$E=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\cos\frac{10\pi}{3}$; $\sin\frac{53\pi}{6}$; $\cos\frac{34\pi}{3}$; $\cos\frac{13\pi}{6}$; $\tan\frac{37\pi}{4}$

Solution : On peut utiliser les résultats du tableau :

	$-x$	$\pi-x$	$\pi+x$	$\frac{\pi}{2}-x$	$\frac{\pi}{2}+x$
$\cos x$	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
$\sin x$	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
$\tan x$	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

$A=\sin\left(\frac{6\pi-x}{6}\right)+\sin\left(\frac{12\pi+2x}{12}\right)=\sin\left(\pi-\frac{x}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{x}{6}\right)$

$A=\sin\left(\frac{x}{6}\right)-\sin\left(\frac{x}{6}\right)=0$

$B=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi+2\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{3\pi-\pi}{3}\right)$

$B=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

Donc : $B=-\sin\frac{\pi}{3}-\left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}=0$

$C=\cos\left(\frac{14\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{23\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)$

$C=\cos\left(\frac{12\pi+2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{24\pi-\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{8\pi+\pi}{2}\right)$

$C=\cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$C=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$C=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$C=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2\times1=-1-2=-3$

$D=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\times\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

$D=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\times\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$D=\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\times\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$D=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$D=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{8}$

$E=\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)\times\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$E=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\times\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$E=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\times-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=1$

$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{9\pi+\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{9\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi+\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{12\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(\frac{53\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi-\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{54\pi}{6}-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(8\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{34\pi}{3}\right)=\cos\left(11\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

$\tan\frac{37\pi}{4}=\tan\left(\frac{36\pi+\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{36\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(9\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

Exercice21 : Calculer : $A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)$

$B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)$ et $C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)$

$D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Solution :

$A=\cos\left(\frac{29\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{18\pi}{4}\right)=\cos\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$A=\cos\left(6\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{2}=-\cos\frac{\pi}{4}+0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$B=\tan\left(\frac{21\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\tan\left(5\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}=1+\sqrt{3}$

$+C=\sin\left(\frac{28\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)=\sin\left(9\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$C=\sin\left(8\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+1=-\sin\frac{\pi}{3}+1$

Donc : $C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$D=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$D=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$D=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice22: Montrer que :

$1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ Si : $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Solution :

$1+(\tan x)^2=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

Et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

Exercice23: On a : $\tan x=\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) On a : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

Donc : $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc : $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ c'est-à-dire : $\cos^2 x=\frac{9}{10}$

Donc $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc $\cos x\le 0$

Et par suite : $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) On a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ donc : $\sin x=\tan x\times\cos x$

et par suite : $\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercice24: On a : $\sin x=-\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc $(\cos x)^2+\frac{16}{25}=1$ c'est à dire : $(\cos x)^2=1-\frac{16}{25}$

C'est à dire : $(\cos x)^2=\frac{9}{25}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x=\frac{3}{5}$ ou $\cos x=-\frac{3}{5}$ or $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Donc : $\cos x\ge 0$ et par suite : $\cos x=\frac{3}{5}$

Et on a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{-4}{3}$

Exercice25: 1) Sachant que : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$; calculer : $\cos x$ et $\tan x$

2) Sachant que : $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ et $\tan x=2\sqrt{3}$

Calculer : $\cos x$ et $\sin x$

3) Sachant que : $\cos x>\sin x>0$

Calculer : $\cos x+\sin x$ et $\cos x-\sin x$

Et en déduire $\cos x$ et $\sin x$

Solution :

• On a $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ c'est à dire : $\cos^2 x=1-\frac{2}{9}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{7}{9}$ par suite: $\cos x=\sqrt{\frac{7}{9}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{7}{9}}$

Or $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ donc : $\cos x<0$ donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{7}}{3}$

Et par suite : $\tan x=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}}=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{14}}{7}$

2) On a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\tan x=2\sqrt{3}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$ donc : $\cos^2 x=\frac{1}{1+12}$

Donc : $\cos^2 x=\frac{1}{13}$ donc : $\cos x=\frac{\sqrt{13}}{13}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{13}}{13}$

Or : $-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ donc $\cos x<0$ par suite : $\cos x=-\frac{\sqrt{13}}{13}$

On a : $\tan x\cdot\cos x=\sin x$

$\sin x=2\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$ et par suite : $\sin x=-\frac{2\sqrt{39}}{13}$

3) On a : $\cos x>\sin x>0$ et $\cos x\cdot\sin x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

Et on a :

$(\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x$

Signifie que :

$(\cos x+\sin x)^2=1+\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3+2\sqrt{2}}{3}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{3})^2}$

Signifie que : $\cos x+\sin x=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ (1) car

$\cos x+\sin x>0$

Et on a : $(\cos x-\sin x)^2=\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$

donc : $(\cos x-\sin x)^2=1-\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{3-2\sqrt{2}}{3}=\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{3})^2}$

Donc : $\cos x-\sin x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$ (2) car $\cos x-\sin x>0$

$(1)+(2)$ Donne : $\cos x=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$(1)-(2)$ Donne : $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 26 : Déterminer $\cos x$

Sachant que : $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ et $\sin x=-0.6$

Solution : On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Donc : $\cos^2 x=1-(-0.6)^2=1-0.36$

Donc : $\cos^2 x=0.64$

Donc : $\cos x=0.8$ ou $\cos x=-0.8$

Or $x\in\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]\subset\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ donc : $\cos x\geq 0$

Par suite : $\cos x=0.8$

Exercice27 : Sachant que :

$-\pi<x<0$ et $\tan x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

On considère un réel x tel que :

$\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

Déterminer la valeur exacte de $\cos x$ et $\sin x$

Solution : 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc : $\frac{1}{\cos^2 x}=1+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=1+(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$

Donc : $\frac{1}{\cos^2 x}=6-2\sqrt{6}$ c'est-à-dire :

$\cos^2 x=\frac{1}{6-2\sqrt{6}}=\frac{6+2\sqrt{6}}{(6-2\sqrt{6})(6+2\sqrt{6})}=\frac{6+2\sqrt{6}}{12}=\frac{18+6\sqrt{6}}{36}$

Donc : $\cos x=\sqrt{\frac{18+6\sqrt{6}}{36}}$ ou $\cos x=-\sqrt{\frac{18+6\sqrt{6}}{36}}$

Donc: $\cos x=\frac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$

Et puisque : $-\pi<x<0$ et $\tan x=\sqrt{3}-\sqrt{2}\succ 0$

Alors : $\cos x\prec 0$ et donc : $\cos x=-\frac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}$

On a aussi : $\sin x=\cos x\times\tan x$

Donc : $\sin x=-\frac{\sqrt{18+6\sqrt{6}}}{6}\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

Exercice 28 : On considère un réel x tel que :

$\sin x=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$

1) Déterminer la valeur exacte de $\cos x$

2) On sait que : $x\in\left\{-\frac{5\pi}{12};-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12};\frac{5\pi}{12}\right\}$

déterminer la valeur exacte de x

Solution : 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ donc

$\cos^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2=1-\frac{2-2\sqrt{12}+6}{16}$

$\cos^2 x=\frac{16-(8-2\sqrt{12})}{16}=\frac{8+2\sqrt{12}}{16}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2}{16}$

C'est-à-dire : $\cos^2 x=\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$

Donc : $\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ ou $\cos x=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Or comme $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x$ est positif

Par suite : $\cos x=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

2) On a $\sin x<0$ car : $\sqrt{2}\prec\sqrt{6}$

Donc $-\frac{\pi}{2}<x<0$ et de plus :

$|\cos x|=\left|\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right|\succ|\sin x|=\left|\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right|$

Donc : $-\frac{\pi}{4}<x\leq 0$ et finalement : $x=-\frac{\pi}{12}$

Exercice 29 : 1) Sachant que : $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$,

Calculer la valeur de : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$.

2) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Solution : 1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2=1-\frac{5+2\sqrt{5}+1}{16}$

C'est-à-dire : $\sin^2\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

Donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$ ou $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=-\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{16}}$

De plus on a : $\frac{9\pi}{5}\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right[$ donc : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)\prec 0$

Par suite : $\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

2) $\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{10\pi-\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

$\cos\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

De même on a :

$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{10\pi-\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{10\pi}{5}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{5}\right)$ Donc :

$\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=-\sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

Exercice30: 1) Montrer que quelque soient les réels x et y on a :

$\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x-\sin^2 y$

2) Sachant que :

$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

Calculer : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}$

Solution : 1) $\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$

$=\cos^2 x\left(1-\sin^2 y\right)-\left(1-\cos^2 x\right)\sin^2 y$

$=\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 y-\sin^2 y+\sin^2 y\cos^2 x$

$=\cos^2 x-\sin^2 y$

Donc : $\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y=\cos^2 x-\sin^2 y\ (1)$

2) On a : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{10}-\sin^2\frac{\pi}{8}$

d'après l'égalité (1)

Et puisque : $\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

Alors : $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}-\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$=\frac{10+2\sqrt{5}-8+4\sqrt{2}}{16}$

Donc: $\cos^2\frac{\pi}{10}\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{10}\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{8}$

Exercice31 : Sachant que $\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)=\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

1) Montrer que : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

2) Calculer la valeur de : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$

Solution :1) On a : $1+\tan^2\frac{\pi}{10}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{10}}$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{1}{1+\tan^2\frac{\pi}{10}}=\frac{1}{1+\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

C'est-à-dire : $\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{1}{\frac{5+5-2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{10-2\sqrt{5}}$

$\cos^2\frac{\pi}{10}=\frac{5\left(10+2\sqrt{5}\right)}{100-20}=\frac{10+2\sqrt{5}}{16}$ et puisque :

$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\geq 0$ alors : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

2) Calcul de la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$:

On a : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\times\tan\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\times\sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$

Donc : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(5-2\sqrt{5}\right)}{5}}$

C'est-à-dire : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

3) $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi-\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{10\pi}{10}-\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)$

C'est-à-dire : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\cos\frac{\pi}{10}$

Donc : $\cos\left(\frac{9\pi}{10}\right)=-\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

On a : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{10}$

Par suite : $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$.

Exercice32:1) Simplifier l'expression suivante :

$A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

2) Calculer $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

3)a) Calculer en fonction de $\sin x$ le nombre :

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}.$$

b) En déduire la valeur de A si $\tan x=3$

Solution :1)

$A(x)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-x+6\pi)+\cos(3\pi+x)+\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(2\pi+\pi+x)+\sin\left(x-4\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$A(x)=\cos^2 x-\cos x-\cos x+\cos x=\cos^2 x-\cos x$

2) Calcul de $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$: on a : $A(x)=\cos^2 x-\cos x$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)$

$A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

Calcul de $A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$:

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(-\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(\frac{10\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\cos^2\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(2\pi+\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$A\left(-\frac{10\pi}{3}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

3)a)Calcul en fonction de : $\sin x$ le nombre :

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(4\pi-x)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

$$A=\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos(-x)}{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}}=\frac{\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)}$$

$$A=\frac{\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$$

Donc : $A=\frac{\sin^2 x\cos x}{-\cos x}=-\sin^2 x$

b) Déduction de la valeur de A si $\tan x=3$

On sait que : $1+\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ et $\cos^2 x\tan^2 x=\sin^2 x$

Donc : $\sin^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}\tan^2 x$

Et puisque : $\tan x=3$ alors :

$A=-\sin^2 x=-\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=-\frac{9}{1+9}=-\frac{9}{10}$.

Exercice33: Simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

Solution :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$

$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$

$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

On a $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

Et on a $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

Et on a $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

On a $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

$H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Et on a $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

$H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{10}\right)$

Et on a : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{10}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{4\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{10}\right)$

$K=\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$

$K=\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)+\left(\cos^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{10}\right)\right)$

Donc : $K=1+1=2$

Exercice34 : On pose : $A(x)=\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$

1) Calculer : $A\left(\frac{\pi}{6}\right)$; $A\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $A\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

2) Montrer que :

Si $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ alors : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Solution :1) $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$A\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}$

$A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$A\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$

2) Soit $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$

$A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)$

Donc : $A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)$

Par suite : $A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=A\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

Exercice35 : On considère un entier relatif n (il peut être positif ou négatif).
Déterminer éventuellement en fonction de n, le cosinus et le sinus des réels :

$2n\pi$; $(2n+1)\pi$; $n\pi$; $-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi$

Solution :1)

$\cos(2n\pi)=\cos(2\pi n)=\cos(2\pi n+0)=\cos(0)=1$

$\sin(2n\pi)=\sin(2\pi n)=\sin(2\pi n+0)=\sin(0)=0$

$\cos((2n+1)\pi)=\cos(2\pi n+\pi)=\cos(2\pi n+\pi)=\cos(\pi)=-1$

$\sin((2n+1)\pi)=\sin(2\pi n+\pi)=\sin(2\pi n+\pi)=\sin(\pi)=0$

$\begin{cases}\cos(n\pi)=1..\text{si}..n..pair\\ \cos(n\pi)=-1..\text{si}..n..impair\end{cases}$ à l'aide des deux calculs précédents et $\sin(n\pi)=0$

$\cos\left(-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2n\pi+\pi\right)$

$=\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}+(2n+1)\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

Exercice 36 : Simplifier et calculer les expressions suivantes :

$A=\cos(0)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(3\frac{\pi}{4}\right)+\cos(\pi)$

$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$

$C=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)$

$D=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

$E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$

Solution : $A=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-1=1+\frac{\sqrt{2}}{2}+0-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=0$

$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$

$B=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\sin(\pi)$

Donc : $B=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0=2+\sqrt{3}$

Calcul de C :

On a $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\pi-\frac{11\pi}{30}\right)$ et $\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{60}\right)$

et $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{60}\right)$

Donc : $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)$ et $\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)$

et $\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)$

Donc :

$C=\sin\left(\frac{11\pi}{30}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{30}\right)+\sin\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\cos\left(\frac{19\pi}{60}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{60}\right)-\sin\left(\frac{19\pi}{60}\right)$

$D=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

On a : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)=\tan\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $\tan\left(\frac{4\pi}{5}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)$ et $\tan\left(\frac{3\pi}{5}\right)=-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Donc : $D=\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)+\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\tan\left(\frac{2\pi}{5}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

$E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)$

On a : $\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{14}\right)$

et $\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)=\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{14}\right)$

Donc : $\cos\left(\frac{13\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{11\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)$ et $\cos\left(\frac{9\pi}{14}\right)=-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)$

Donc :

$E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$

Donc :

$E=\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{5\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{14}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{14}\right)$

Donc : $E=\cos\left(\frac{7\pi}{14}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Exercice37 : Exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les réels suivants :

$A=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)$ $B=\sin\left(x+100\pi\right)$

$C=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)$ $D=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)$

$E=\sin\left(x-78\pi\right)$

$F=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin\left(\pi+x\right)$

$G=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos\left(-x-\pi\right)+5\sin\left(-x\right)$

Solution :

$A=\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

$B=\sin\left(x+100\pi\right)=\sin\left(x+2\times 50\pi\right)=\sin x$

$C=\cos\left(\frac{2020\pi}{2}+x\right)=\cos\left(1010\pi+x\right)=\cos\left(2\times 505\pi+x\right)=\cos x$

$D=\sin\left(\frac{2021\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\frac{2020\pi+\pi}{2}+x\right)=\sin\left(1010\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$

Donc : $D=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

$E=\sin\left(x-78\pi\right)=\sin\left(x-2\times 39\pi\right)=\sin x$

$F=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin\left(-x-\frac{\pi}{2}\right)-5\sin\left(\pi+x\right)$

$F=\sin x+4\sin\left(-\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)-5\times\left(-\sin x\right)$

$F=\sin x-4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+5\sin x=6\sin x-4\cos x$

$G=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-2\cos\left(-x-\pi\right)+5\sin\left(-x\right)$

Donc : $G=\cos x+2\cos x-5\sin x=3\cos x-5\sin x$

Exercice38 : Simplifier les expressions suivantes :

$A=\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

$C=\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{9\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Solution : 1)

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}-2\sin\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}$

On remarque que : $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{5}+\frac{4\pi}{5}=\pi$

Donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}=\pi-\frac{\pi}{5}$

Donc :

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)$

$A=\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=0$

2) $B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

On remarque que : $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ et $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$

donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

Donc :

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$B=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

Et puisque on a aussi: $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Alors :

$B=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times 1=2$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\frac{7\pi}{12}+\sin^2\frac{9\pi}{12}+\sin^2\frac{11\pi}{12}$

On remarque que : $\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12}=\pi$ donc : $\frac{11\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{12}$ Et on a : $\frac{3\pi}{12}+\frac{9\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{9\pi}{12}=\pi-\frac{3\pi}{12}$

et $\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$ donc $\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{5\pi}{12}$

Donc on a :

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$C=\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{3\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$

$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}+2\sin^2\frac{\pi}{4}$

$$C=2\sin^2\frac{\pi}{12}+2\sin^2\frac{3\pi}{12}+2\sin^2\frac{5\pi}{12}=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{5\pi}{12}\right)+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Et on remarque que : $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$

$$C=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\left(\sin^2\frac{\pi}{12}+\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)+1=2\times1+1=3$$

Exercice39: simplifier les expressions suivantes :

$$A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

$$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$$

Solution :

$$A=\sin(\pi+x)-\cos(\pi-x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x+\cos x-\cos x+\sin x=0$$

$$B=\sin(6\pi+x)-\cos(3\pi-x)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$

$$B=\sin(2\times3\pi+x)-\cos(2\pi+\pi-x)+\sin\left(-\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-\cos\left(\frac{4\pi-\pi}{2}+x\right)$$

$$B=\sin(x)+\cos(x)-\cos(x)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{2}+x\right)=\sin(x)-\cos\left(-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$$

$$B=\sin(x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)-\sin(x)=0$$

$$C=\sin(x-7\pi)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)+\sin(x+11\pi)+\cos\left(\frac{-3\pi}{2}-x\right)$$

$$C=\sin(x-\pi-6\pi)-\cos\left(\frac{4\pi+\pi}{2}+x\right)+\sin(x+1\pi+10\pi)+\cos\left(\frac{-4\pi+\pi}{2}-x\right)$$

$$C=\sin(x-\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$C=\sin(-(\pi-x))-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$$

$$C=-\sin(\pi-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin(x+\pi)+\sin x$$

$$C=-\sin(x)+\sin(x)-\sin(x)+\sin(x)=0$$

Exercice40 : simplifier les expressions suivantes :

$$A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$$
$$B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$$
$$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$$
$$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$$
$$E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$$
$$F=2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$
$$G=\sin^8 x+\cos^8 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$
$$H=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$$
$$I=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}$$

si $x\neq\frac{k\pi}{2}$ avec $k\in\mathbb{Z}$

Solution : $A=(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2$

$$A=\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-2\cos x\sin x+\sin^2 x$$
$$A=2\cos^2 x+2\sin^2 x=2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\times1=2$$

$$B=\cos^4 x-\sin^4 x+\sin^2 x-\cos^2 x$$
$$B=\cos^4 x-\cos^2 x-\sin^4 x+\sin^2 x$$

Donc : $B=\cos^2 x\left(\cos^2 x-1\right)-\sin^2 x\left(\sin^2 x-1\right)$

On a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Donc : $\cos^2 x-1=-\sin^2 x$ et $\sin^2 x-1=-\cos^2 x$

$$B=\cos^2 x\times\left(-\sin^2 x\right)-\sin^2 x\left(-\cos^2 x\right)$$
$$B=-\cos^2 x\times\sin^2 x+\sin^2 x\cos^2 x=0$$

$$C=\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x=\left(\sin^2 x\right)^2-\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x$$
$$C=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)+2\cos^2 x=\sin^2 x-\cos^2 x+2\cos^2 x$$

Donc : $C=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$D=\sin^6 x+\cos^6 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$$
$$D=\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$$
$$D=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x\right)+$$
$$+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$$
$$D=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^4 x+\sin^4 x+5\cos^2 x\sin^2 x$$
$$D=2\sin^4 x+4\sin^2 x\cos^2 x+2\cos^4 x$$
$$D=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=2\times1=2$$

$$E=(2\cos x+\sin x)^2+(\cos x-2\sin x)^2$$
$$E=4\cos^2 x+4\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-4\cos x\sin x+4\sin^2 x$$
$$E=5\cos^2 x+5\sin^2 x=5\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=5\times1=5$$

$$F=2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$
$$F=2\left(\left(\sin^2 x\right)^3+\left(\cos^2 x\right)^3\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$
$$F=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x\right)-3\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$
$$F=2\cos^4 x+2\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x-3\cos^4 x-3\sin^4 x$$
$$=-\cos^4 x-\sin^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$F=-\left(\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x\right)=-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=-1$$

$$G=\sin^8 x+\cos^8 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$
$$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\cos^4 x\sin^4 x+6\cos^4 x\sin^4 x+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2+4\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\cos^4 x+\sin^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$+2\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)\left(\cos^2 x\sin^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^6 x$

$+2\cos^6 x\sin^2 x+4\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^6 x\cos^2 x+2\cos^4 x\sin^4 x+2\cos^6 x\sin^2 x+2\cos^4 x\sin^4 x$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^4 x\cos^2 x+2\cos^4 x\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$

$G=\sin^4 x+\cos^4 x+2\cos^2 x\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)$

$G=\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2+2\cos^2 x\sin^2 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\cos^2 x}+\sqrt{\cos^4 x+4\sin^2 x}$

$H=\sqrt{\sin^4 x+4\left(1-\sin^2 x\right)}+\sqrt{\cos^4 x+4\left(1-\cos^2 x\right)}$

$=\sqrt{\sin^4 x-4\sin^2 x+4}+\sqrt{\cos^4 x-4\cos^2 x+4}$

$H=\sqrt{\left(\sin^2 x-2\right)^2}+\sqrt{\left(\cos^2 x-2\right)^2}$

$H=\left|\sin^2 x-2\right|+\left|\cos^2 x-2\right|$ Or on a $-1\le\sin x\le 1$ et $-1\le\cos x\le 1$

Donc : $0\le\sin^2 x\le 1$ et $0\le\cos^2 x\le 1$ c'est-à-dire : $\sin^2 x-2\prec 0$ et $\cos^2 x-2\prec 0$

Donc :

$H=-\left(\sin^2 x-2\right)-\left(\cos^2 x-2\right)=-\sin^2 x+2-\cos^2 x+2$

Donc : $H=-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+2+2=-1+4=3$

$$I=\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{(1-\sin x)(1-\cos x)}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\cos x(1-\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{\sin x(1-\cos x)}{\sin^2 x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{1-\sin x}{\cos x}+\frac{1-\cos x}{\sin x}+\frac{1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$

$$I=\frac{\sin x(1-\sin x)+\cos x(1-\cos x)+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$

$$I=\frac{\sin x-\sin^2 x+\cos x-\cos^2 x+1-\cos x-\sin x+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$

$$I=\frac{-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)+1+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}$$

$$I=\frac{-1+1+\sin x\cos x}{\cos x\sin x}=\frac{\sin x\cos x}{\cos x\sin x}=1$$

Exercice41: soit x un réel et on pose :

$B=6\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-9\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

1) Montrer que : **si** $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$ alors :

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$.

Et que : $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

2) En déduire que : $B=-4$

Solution :1)

$(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3-3x^2y-3xy^2$

Donc : $(x+y)^3-3xy(x+y)=x^3+y^3$

Et on a : $(x+y)^2-2xy=x^2+2xy+y^2-2xy=x^2+y^2$

2) Déduction:

$B=8\left(\cos^6 x+\sin^6 x\right)-12\left(\cos^4 x+\sin^4 x\right)$

$B=8\left(\left(\cos^2 x\right)^3+\left(\sin^2 x\right)^3\right)-12\left(\left(\cos^2 x\right)^2+\left(\sin^2 x\right)^2\right)$

$B=8\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^3-3\cos^2 x\times\sin^2 x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\right)$

$-12\left(\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)^2-2\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$B=8\left(1-3\cos^2 x\times\sin^2 x\right)-12\left(1-2\cos^2 x\sin^2 x\right)$

$B=8-24\cos^2 x\times\sin^2 x-12+24\cos^2 x\sin^2 x=-4$

Exercice42: Soit x un réel tel que $\cos x\neq 0$

Montrer les égalités suivantes :

1) $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$

2) $\sin^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

3) $\dfrac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=1$

4) A$=\dfrac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\dfrac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=2$

5) $(1+\sin x+\cos x)^2=2(1+\sin x)(1+\cos x)$

Solution :1) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x-\cos^2 x\tan^2 x$

$\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\left(1-\cos^2 x\right)$ or

$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $1-\cos^2 x=\sin^2 x$

Par suite : $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\times\sin^2 x$

2) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc **:** $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\tan^2 x\times\dfrac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc **:** $\sin^2 x=\tan^2 x\times\cos^2 x=\dfrac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$.

3) $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\frac{\sin^2 x\times\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}$

Or on a : $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ donc : $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ et $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Donc : $\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)}=\frac{\sin^2 x\times\cos^2 x}{\cos^2 x\times\sin^2 x}=1$

4) $\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{\cos x-\sin x}+\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\cos x+\sin x}=$

$=\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x-\sin x}+$

$+\frac{\left(\cos x+\sin x\right)\left(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x\right)}{\cos x+\sin x}$

Car : $a^3-b^3=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ et

$a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)$

Donc :

$A=\cos^2 x+\cos x\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x$

$=2\sin^2 x+2\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\times1=2$

5) $\left(1+\sin x+\cos x\right)^2=$

$=1+\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x$

$=1+1+2\sin x+2\cos x+2\cos x\sin x$

$=2\left(1+\sin x+\cos x+\cos x\sin x\right)$

$=2\left(\left(1+\sin x\right)+\cos x\left(1+\sin x\right)\right)$

$=2\left(1+\sin x\right)\left(1+\cos x\right)$

Exercice43: Ecrire seulement en fonction de $\tan x$ les expressions suivantes :

1) $A=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$ 2) $B=\frac{\sin^2 x+3\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

3) $C=\cos^2 x-\sin x\cos x$

Solution : 1) $A=\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$

On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $A=\frac{\tan^3 x\times\cos^3 x-\cos^3 x}{\tan x\times\cos x+\cos x}=\frac{\cos^3 x\left(\tan^3 x-1\right)}{\cos x\left(\tan x+1\right)}$

Donc : $A=\cos^2 x\frac{\tan^3 x-1}{\tan x+1}$ or on a : $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

Donc : $A=\frac{1}{\tan^2 x+1}\frac{\tan^3 x-1}{\tan x+1}=\frac{\tan^3 x-1}{\left(\tan^2 x+1\right)\left(\tan x+1\right)}$

2) $B=\frac{\sin^2 x+3\sin x\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}$

$=\frac{\tan^2 x\times\cos^2 x+3\tan x\times\cos x\cos x}{\tan^2 x\times\cos^2 x-\cos^2 x}$

$=\frac{\cos^2 x\left(\tan^2 x+3\tan x\right)}{\cos^2 x\left(\tan^2 x-1\right)}$

Et par suite : $B=\frac{\tan^2 x+3\tan x}{\tan^2 x-1}$

3) On a : $\sin x=\tan x\times\cos x$

Donc : $C=\cos^2 x-\tan x\times\cos x\cos x$

Donc : $C=\cos^2 x\left(1-\tan x\right)$ or $\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}$

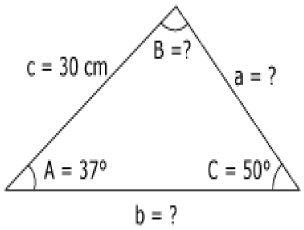
Et par suite : $C=\frac{1}{1+\tan^2 x}\left(1-\tan x\right)=\frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$

Exercice44 : A partir du triangle de la figure suivante, trouvez :

a) la valeur du côté a

b) la mesure de l'angle B ;

c) la valeur du côté b.



Solution : Nous connaissons la valeur de deux angles et d'un côté du triangle :

$A=37°$ et côté c = 30 cm et $C=50°$

a) Calcul de la valeur du côté a : il s'agit donc d'application de la loi des sinus.

La loi des sinus nous permet d'établir la relation suivante : $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin C}{c}$

Isolons-le côté a : $a=\frac{c\sin A}{\sin C}$

Donc : $a=\frac{30\sin 37^\circ}{\sin 50^\circ}\simeq\frac{30\times0,6018}{0,7660}\simeq 23,569cm$

b) Calcul de la valeur de l'angle B

Comme nous connaissons la valeur de deux des angles du triangle, il est possible de trouver la valeur du troisième : B = 180° - ($A+C$)

B = 180° - (50° + 37°) donc : B = 93 °

c) Calcul de la valeur du côté b :De la loi des sinus, nous tirons la relation suivante : $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

Isolons le côté b : $b=\frac{c\sin B}{\sin C}$

Donc : $b=\frac{30\sin 30^\circ}{\sin 50^\circ}\simeq\frac{30\times0,9986}{0,7660}\simeq 39,11cm$

C'est-à-dire :b = 39,11 cm

Exercice 45: ABC un triangle tel que :

$BC=\sqrt{3}$ et $BCA=\frac{\pi}{4}$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

1) Calculer : AB

2) a) Vérifier que : $ABC=\frac{5\pi}{12}$

b) Calculer : $\sin\frac{5\pi}{12}$ sachant que : $AC=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Et en déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$.

Solution : Nous connaissons la valeur de deux angles et d'un côté du triangle :

$BCA=\frac{\pi}{4}$ et côté $BC=\sqrt{3}$ et $BAC=\frac{\pi}{3}$

La loi des sinus nous permet d'établir la relation suivante : $\frac{\sin BAC}{BC}=\frac{\sin BCA}{AB}$

Isolons-le côté AB : $AB=\frac{BC\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{2}$

2) a)Vérifions que : $ABC=\frac{5\pi}{12}$

Comme nous connaissons la valeur de deux des angles du triangle, il est possible de trouver la valeur du troisième : On a $A+B+C=\pi$

Donc : $B=\pi-\left(A+C\right)$

Donc : $B=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$ c'est-à-dire : $B=\pi-\frac{7\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

b) Calcul de $\sin\frac{5\pi}{12}$: d'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a : $\frac{\sin B}{AC}=\frac{\sin A}{BC}$

C'est-à-dire : $\frac{\sin\frac{5\pi}{12}}{AC}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{BC}$

Donc : $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

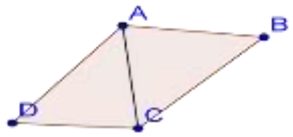
Déduction de la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$:

On a $\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Exercice46 : Calculer le périmètre et la surface d'un parallélogramme $ABCD$ tel que :

$BC=3cm$ et $ABC=\frac{2\pi}{3}$ et $AB=4cm$

Solution : Le périmètre du parallélogramme $ABCD$ est :



$P=2\left(AB+AD\right)=2\left(4+3\right)=14cm$

La surface du parallélogramme $ABCD$ est :

$S_{ABCD}=2S_{ABC}$

Et on a : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times BC\sin B$

Donc :

$S_{ABC}=\frac{1}{2}4\times 3\sin\frac{2\pi}{3}=6\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=6\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}cm^2$

Par suite : $S_{ABCD}=2\times 3\sqrt{3}=6\sqrt{3}cm^2$

Exercice47 : ABC un triangle tel que :

$BC=\sqrt{2}$ et $AC=\frac{\sqrt{2}}{3}$ et $BAC=\frac{3\pi}{4}$

1) Vérifier que : $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Calculer : $\sin ABC$ et en déduire la valeur de $\cos ABC$

Solution :1) Vérifions que $\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$:

On a : $\sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

2) D'après la loi des sinus dans le triangle ABC

On a : $\frac{\sin ABC}{AC}=\frac{\sin BAC}{BC}$

C'est-à-dire : $\frac{\sin ABC}{AC}=\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{BC}$

$\sin ABC=\frac{AC\times\sin BAC}{BC}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6}$

Et on a : $\cos^2 ABC+\sin^2 ABC=1$ donc :

$\cos^2 ABC=1-\sin^2 ABC=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2=1-\frac{2}{36}=1-\frac{1}{18}=\frac{17}{18}$

Donc : $\cos ABC=\sqrt{\frac{17}{18}}$ ou $\cos ABC=-\sqrt{\frac{17}{18}}$

Mais puisque l'angle ABC est aigu

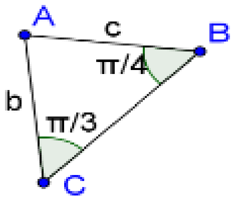
Alors : $\cos ABC = \sqrt{\frac{17}{18}}$ (Angle aigu est un angle inférieur à l'angle droit,)

Exercice 48: Soit ABC un triangle tel que :

$ACB = \frac{\pi}{3}$ et $ABC = \frac{\pi}{4}$ et $BC = 2\left(\sqrt{3}+1\right)cm$

Montrer que la surface du triangle ABC est

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sin\frac{7\pi}{12}}cm^2$$



Solution : D'après la loi des sinus dans le triangle ABC on a : $\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\left(\pi-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)} = \frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}$

Donc : $b = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}2\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}$

La surface du triangle ABC est :

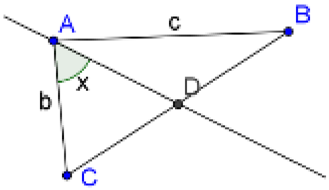
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC\times BC\sin C = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sin\frac{7\pi}{12}}\times\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$S_{ABC} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{7\pi}{12}} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\frac{7\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{\sin\frac{7\pi}{12}}cm^2$$

Exercice49 : Soit (AD) une médiane du triangle ABC tel que : $BAD = x$

(la figure)Et $AC = b$ et $BC = a$ et $AB = c$

Montrer que : $\sin\left(A-x\right) = \frac{c}{b}\sin x$



Solution : On a : $x + BDA + B = \pi$

et $A + B + C = \pi$

Donc : $x + BDA + B = A + B + C$

C'est-à-dire : $BDA = A + C - x$

D'après la loi des sinus dans le triangle ABD on a :

$$\frac{\sin\left(A+C-x\right)}{c} = \frac{\sin\left(x\right)}{\frac{a}{2}}(1)$$

D'après la loi des sinus dans le triangle ADC on a :

$$\frac{b}{\sin\left(\pi-BDA\right)} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(A-x\right)}$$

C'est-à-dire : $\frac{b}{\sin BDA} = \frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(A-x\right)}$

Donc : $\sin\left(A-x\right) = \frac{a}{2b}\sin\left(A+C-x\right)(2)$

De (1) et (2) en déduit que : $\sin\left(A-x\right) = \frac{c}{b}\sin x$