# Exercices avec corrections sur les :

## FONCTIONS - *Généralités*

**Types d'exercices :**
Application directe du cours (*) Difficulté moyenne (**) Demande une réflexion (***)

**Exercice1:** (*) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=3x^2-1$

1) Calculer les images de 1 et $\sqrt{2}$ et $-1$ par f.
2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f

**Solution:** 1) Calcul des images :

$f(1)=3\times1^2-1=3-1=2$ et $f(\sqrt{2})=3\times(\sqrt{2})^2-1=6-1=4$

$f(-1)=3\times(-1)^2-1=3-1=2$

2) $x$ Est l'antécédents de 2 par f signifie que 2 est l'image de $x$ par f

Équivaut à: chercher les réels $x$ tels que : $f(x)=2$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=2$

Équivaut à: $3\times x^2-1=2$

Équivaut à: $3\times x^2=2+1$ équivaut à: $3\times x^2=3$

Équivaut à: $x^2=1$

Équivaut à: $x=-1$ ou $x=1$

Finalement les antécédents de 2 par f sont $-1$ et $1$.

**Exercice2:** (*)(**) Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=-x^2+2x+2$

1) Calculer les images de $\frac{-1}{2}$ et $\sqrt{3}$ par f.
2) Montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédent de 1 par f
3) Déterminer les antécédents éventuels de 0 par f
4) Donner une interprétation géométrique du résultat de la question 3)

**Solution:** 1) Calcul des images :

$$f\left(\frac{-1}{2}\right)=-\left(\frac{-1}{2}\right)^2+2\times\left(\frac{-1}{2}\right)+2=-\frac{1}{4}-1+2=\frac{3}{4}$$

et $f(\sqrt{3})=-(\sqrt{3})^2+2\times(\sqrt{3})+2=-3+2\sqrt{3}+2=-1+2\sqrt{3}$

2) Pour montrer que : $1+\sqrt{2}$ est un antécédents de 1 par f il suffit de montrer que : $f(1+\sqrt{2})=1$ ?

$$f(1+\sqrt{2})=-(1+\sqrt{2})^2+2\times(1+\sqrt{2})+2=-(1+2\sqrt{2}+2)+2+2\sqrt{3}+2$$

$$f(1+\sqrt{2})=-3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4=1$$

Donc : $f(1+\sqrt{2})=1$ par suite : $1+\sqrt{2}$ est un antécédents de 1 par f.

3) $x$ est l'antécédents de 0 par f signifie que 0 est l'image de $x$ par f .

Équivaut à: chercher les réels $x$ tels que : $f(x)=0$

On résout alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$

Équivaut à: $-x^2+2x+2=0$

$a=-1$ et $b=2$ et $c=2$

$$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times2\times(-1)=4+8=12=(2\sqrt{3})^2>0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-2+2\sqrt{3}}{-2}=1-\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-2-2\sqrt{3}}{-2}=1+\sqrt{3}$$

Finalement les antécédents de 0 par f sont :
$1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

4) Les antécédents éventuels de 0 par f sont :
$1-\sqrt{3}$ et $1+\sqrt{3}$.

Donc : l'intersection de $(C_f)$ la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses sont les points :
$A(1-\sqrt{3};0)$ et $B(1+\sqrt{3};0)$.

**Exercice3:** (*)

**1)** On considère la fonction réelle de la variable réelle définie par : $x \overset{f}{\mapsto} \frac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

**2)** On considère la fonction définie par : $x \overset{g}{\mapsto} \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

**3)** On considère la fonction définie par : $x \overset{h}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

**Solution:** 1) 0 ; 2 ; -3 ont des images par f mais 3 n'a pas d'images par f car : $f(3)=\frac{1}{3-3}=\frac{1}{0}\notin\mathbb{R}$

2) 4 à une image par g mais 0 ; 2 ; -3 n'ont pas d'images par g car : $g(0)=\sqrt{0-3}=\sqrt{-3}\notin\mathbb{R}$

$g(2)=\sqrt{2-3}=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$ et $g(-3)=\sqrt{-3-3}=\sqrt{-6}\notin\mathbb{R}$

3)5 et -6 ont une image par h mais 9 ; 7 : n'ont pas d'images par h car :

$h(9)=\frac{1}{\sqrt{7-9}}=\frac{1}{\sqrt{-2}}\notin\mathbb{R}$ et $h(7)=\frac{1}{\sqrt{7-7}}=\frac{1}{\sqrt{0}}\notin\mathbb{R}$

**Exercice4 :** (*) et (**) : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\frac{x^3}{2x-4}$.

3) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$. 14) $f(x)=\frac{|2x-5|}{|x|-2}$.

15) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$. 16) $f(x)=\sqrt{-2x^2+3x-5}$

17) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$. 18) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

19) $f(x)=2\sin^2 x+3\cos x-1$.

20) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

21) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$.

22) $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$. 23) $f(x)=\frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

24) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$. 25) $f(x)=\frac{x+5}{x^2-5x+7}$.

26) $f(x)=\sqrt{2|x|-3}$. 27) $f(x)=\frac{2x-1}{|x|+x}$

**Solution:** Remarque : Soit $f$ une fonction réelle de la variable réelle de $E$ dans $F$

L'ensemble de définition de la fonction $f$ se note $D_f$ et on a : $D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\,est\ calculable\}$ Ou

$D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in F\}$ ou encore

$D_f=\{x\in E\,/\,f(x)\in\mathbb{R}\}$

1) $f(x)=3x^2-x+1$ $f$ est une fonction polynôme donc un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x-4\neq 0\}$

$2x-4=0$ Signifie $x=\frac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction $f$ .

3) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2-4\neq 0\}$

$x^2-4=0$ Signifie $x^2-2^2=0$

C'est-à-dire : $(x-2)(x+2)=0$

Signifie $x-2=0$ ou $x+2=0$

Signifie : $x=2$ ou $x=-2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^3-2x\neq 0\}$

$x^3-2x=0$ Signifie $x(x^2-2)=0$

Équivaut à: $x=0$ ou $x^2-2=0$

C'est-à-dire : $x=0$ ou $x^2=2$

Signifie $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,-3x+6\geq 0\}$

$-3x+6\geq 0$ Signifie $-3x\geq -6$

C'est-à-dire : $x\leq\frac{-6}{-3}$ Par suite : $x\leq 2$

Donc $D_f=]-\infty;2]$.

6) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,2x^2-5x-3\neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$ $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4\times 2\times(-3) = 25+24 = 49 = (7)^2 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times 2} = \dfrac{7+5}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$ et $x_2 = \dfrac{5-7}{4} = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2}$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / 2x^2-3x+1 \geq 0\right\}$

Soit $\Delta$ son discriminant : $a=2$

$\Delta = b^2-4ac = (-3)^2 - 4\times 2\times 1 = 9-8 = 1 > 0$

$x_1 = \dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \dfrac{4}{4} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $1/2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $D_f = \left]-\infty,\dfrac{1}{2}\right] \cup [1,+\infty[$

8) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$.

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / \dfrac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1\neq 0\right\}$

$-9x+3=0$ Signifie $-9x=-3$

C'est-à-dire : $x=\dfrac{1}{3}$ et $x+1=0$ signifie ; $x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-9x+3$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{-9x+3}{x+1}$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $D_f = \left]-1,\dfrac{1}{3}\right]$

9) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0\right\}$ $-2x^2+x+3=0$

$a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta = b^2-4ac = (1)^2 - 4\times(-2)\times 3 = 1+24 = 25 = (5)^2 > 0$

Donc : on a deux racines :

$x_1 = \dfrac{-1+5}{2\times(-2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2\times(-2)} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $D_f = \left]-1,\dfrac{3}{2}\right[$

10) $f(x) = \dfrac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x^2+1\neq 0\right\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f = \mathbb{R}$

11) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x)\in\mathbb{R}$ Signifie que : $\sqrt{|x|}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

Or on sait que $|x|\geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Par suite : $D_f = \mathbb{R}-\{0\} = \mathbb{R}^*$

12) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x+2\geq 0 \text{ et } x-1\neq 0\right\}$

Signifie : $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / x\geq -2 \text{ et } x\neq 1\right\}$

Donc : $D_f = [-2,1[ \cup ]1,+\infty[$

13) $f(x) = \sqrt{-2x^2+x+3}$

$D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / -2x^2+x+3\geq 0\right\}$ $-2x^2+x+3=0$

$a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta = b^2-4ac = (1)^2 - 4\times(-2)\times 3 = 1+24 = 25 = (5)^2 > 0$

Donc on a deux racines

$x_1 = \dfrac{-1+5}{2\times(-2)} = \dfrac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \dfrac{-1-5}{2\times(-2)} = \dfrac{-6}{-4} = \dfrac{3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $D_f = \left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$

14) $f(x) = \dfrac{|2x-5|}{|x|-2}$. $D_f = \left\{x\in\mathbb{R} / |x|-2\neq 0\right\}$

$|x|-2=0$ Signifie $|x|=2$

C'est-à-dire : $x=2$ ou $x=-2$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \{-2;2\}$

15) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2+x+1 \geq 0\right\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4\times1\times1 = -3 \prec 0$

Et puisque : $a = 1 \succ 0$ alors : $x^2+x+1 \succ 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et par suite : $D_f = \mathbb{R}$

16) $f(x) = \sqrt{-2x^2+3x-5}$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / -2x^2+3x-5 \geq 0\right\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4\times(-2)\times(-5) = -40 \prec 0$

Et puisque : $a = -2 \prec 0$ alors : $-2x^2+3x-5 \prec 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Par suite : $D_f = \varnothing$

17) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \ et \ x \neq 0\right\}$

Signifie : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \ et \ x \neq 0\right\}$

Donc : $D_f = \left]-\infty, 0\right[$

18) $f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\right\}$

$|2x-4| - |x-1| = 0$ Signifie $|2x-4| = |x-1|$

C'est-à-dire : $2x-4 = x-1$ ou $2x-4 = -(x-1)$

Signifie $2x - x = 4-1$ ou $2x-4 = -x+1$

C'est-à-dire : $x = 3$ ou $2x + x = 4+1$

Signifie : $x = 3$ ou $x = \frac{5}{3}$ Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3};3\right\}$

19) Un réel a toujours une image par $f$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

20) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0 \ et \ x^2-x-6 \neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$: Le discriminant est :

$\Delta = 2^2 - 4 \text{ x } (-2) \text{ x } 13 = 108$

Les racines sont :

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme $x^2-x-6$ : Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \text{ x } (-6) \text{ x } 1 = 25$

Les racines sont : $x_1' = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1-5}{2} = -2$

et $x_2' = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1+5}{2} = 3$

- On obtient le tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$ | | $-2$ | | $3$ | | $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+2x+13$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $x^2-x-6$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$ | | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | |

$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[ \cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

21) $f(x) = \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{6}}$ :

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + \left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x - 2\sqrt{6} \geq 0\right\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2 - 4\times1\times2\sqrt{6}$

Donc : $\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$

$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}$

$14+4\sqrt{6} = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$

Donc : $x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1} = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

et $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

Donc : $x_1 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

et $x_2 = \frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{2})x-2\sqrt{6}$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

On a donc : $D_f = \left]-\infty;-2\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{2};+\infty\right[$

22) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-x}$.

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x-2 \geq 0 \ et \ x^2-x \neq 0\right\}$

$x-2\geq 0$ Signifie : $x\geq 2$ et $x^2-x\neq 0$

Signifie : $x(x-1)\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 0$ et $x\neq 1$

Donc : $D_f=[2,+\infty[-\{0;1\}=[2,+\infty[$

23) $f(x)=\dfrac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow |x|^2+2|x|-3=0$

On pose $|x|=X$ donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont : $X_1=\dfrac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\dfrac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$ mais : $|x|=-3$ n'a pas de solution

$|x|=1\Leftrightarrow x=1$ Ou $x=-1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

24) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 \text{ et } 3-5x\geq 0\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\dfrac{1}{2} \text{ et } x\leq\dfrac{3}{5}\right\}$ Donc $D_f=\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{5}\right]$

25) $f(x)=\dfrac{x+5}{x^2-5x+7}$. Le discriminant est

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times 1\times 7=25-28=-3\prec 0$

Donc : Pas de racines par suite : $D_f=\mathbb{R}$

26) $f(x)=\sqrt{2|x|-3}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\geq 0\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\geq\dfrac{3}{2}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\dfrac{3}{2} \text{ ou } x\leq-\dfrac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\left]-\infty;-\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

27) $f(x)=\dfrac{2x-1}{|x|+x}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x|+x\neq 0\}$

donc : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq -x\}$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$ alors $|x|=x\neq -x$ donc : $\mathbb{R}^{*+}\subset D_f$

Si $x\in\mathbb{R}^{*+}$ alors $|x|=-x$ donc : $x\notin D_f$

Par suite : $D_f=\mathbb{R}^{*+}$

**Exercice5 :** (**) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définies par :

1) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$ 2) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{2\sin x+1}$.

3) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\tan x-\sqrt{3}}$ 4) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$

**Solutions :** 1) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\cos x-1\neq 0\}$

$2\cos x-1=0$ Signifie $\cos x=\dfrac{1}{2}$

c'est-à-dire $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Signifie que : $x=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$

Où $k\in\mathbb{Z}$ Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

2) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{2\sin x+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2\sin x+1\neq 0\}$

$2\sin x+1=0$ Signifie $\sin x=-\dfrac{1}{2}$

Signifie que: $\sin x=-\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ donc: $\sin x=\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

Signifie $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\pi-\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+2k\pi$

Signifie $x=-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $x=\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{\pi}{6}+2k\pi;\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) $f(x)=\dfrac{2\sin x}{\tan x-\sqrt{3}}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } \tan x-\sqrt{3}\neq 0/k\in\mathbb{Z}\right\}$

$\tan x-\sqrt{3}=0$ Signifie $\tan x=\sqrt{3}$

C'est-à-dire $\tan x=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

Signifie $x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_f=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{3}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

4) $f(x)=\dfrac{2\sin^2 x}{\sin(2x)-\cos(3x)}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\sin(2x)-\cos(3x)\neq 0\}$

On a : $\sin(2x)-\cos(3x)=0$

Équivaut à : $\sin(2x)=\cos(3x)$

C'est-à-dire : $\sin(2x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)$

Équivaut à :

$2x=\dfrac{\pi}{2}-3x+2k\pi$ ou $2x=\pi-\left(\dfrac{\pi}{2}-3x\right)+2k\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Équivaut à : $5x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $-x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

C'est-à-dire : $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5}$ ou $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

Donc :

$D_f=\mathbb{R}-\left(\left\{\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2k\pi}{5}/k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}\right)$

**Exercice 6 :** (***) Soit f la fonction numérique tel que:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x-1}{x+2} & si \quad x\leq 0 \\ f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(4-x)} & si \quad x\succ 0\end{cases}$$

1) Déterminer $D_f$

2) Calculer : $f(2)$ ; $f(0)$; $f(-1)$

**Solution :** 1)

$D_f=\{x\in\mathbb{R}^-/x+2\neq 0\}\cup\{x\in\mathbb{R}^{+*}/(x+1)(4-x)\neq 0\}$

Donc :

$D_f=\{x\in\mathbb{R}^-/x\neq -2\}\cup\{x\in\mathbb{R}^{+*}/x\neq -1 \ et \ x\neq 4\}$

Donc : $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;0]\cup]0;4[\cup]4;+\infty[$

Par suite : $D_f=]-\infty;-2[\cup]-2;4[\cup]4;+\infty[$

2) Calcul de : $f(2)$ : On a : $2\succ 0$

Donc : $f(2)=\dfrac{2^2}{(2+1)(4-2)}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

Calcul de $f(0)$: On a : $0\leq 0$ donc : $f(0)=\dfrac{0-1}{0+2}=\dfrac{-1}{2}$

Calcul de $f(-1)$: On a : $-1\leq 0$

Donc : $f(-1)=\dfrac{-1-1}{-1+2}=\dfrac{-2}{1}=-2$

**Exercice7:** (*) Soient les deux fonctions

$f(x)=\dfrac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x)=\dfrac{1+3x^2}{|x|}$

Est-ce que : f=g. ? Justifier

**Solution :**

- On a : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ et $x\neq 0$

Or on sait que $x^2\geq 0$ donc $\sqrt{x^2}\in\mathbb{R}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Alors : $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x\neq 0$

Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

- On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $|x|\neq 0$

- C'est-à-dire : $x\neq 0$ Donc : $D_g=\mathbb{R}^*$

Alors : $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$

On sait que : $\sqrt{x^2}=|x|$ et $3x^2+1=1+3x^2$

Donc : f(x)=g(x).

Donc finalement on a trouvé que : $D_f=D_g=\mathbb{R}^*$ et f(x)=g(x) par suite : f = g.

**Exercice8:** (**) Soient les deux fonctions $h(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ et $t(x)=x-1$

Est-ce que : f = g. ? Justifier

**Solution :** - On a : $h(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x\neq 0$

Donc $D_h=\mathbb{R}^*$

- On a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t=\mathbb{R}$

Alors : $D_h\neq D_t$ donc : $h\neq t$

**Exercice 9 :** (**) Les fonctions f et g définies respectivement par :

$f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+3}}$ et $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$

Sont-elles égales ?

**Solution :** Déterminons leur ensemble de définition

Pour f , on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3}\geq 0$ et $x-1\neq 0$

Donc ce qui donne : $D_f=]-\infty;-3[\cup[1;+\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1\geq 0$ et $x+3\succ 0$

Ce qui donne $D_g=[1;+\infty[$

On a donc : $D_f\neq D_g$ .

Les fonctions ne sont donc pas égales.

On écrit : $f \neq g$

On remarquera cependant que sur $[1;+\infty[$

On a f (x) = g(x).

**Exercice 10 :** (**) Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x+1$ et

$g(x)=x^2+x+2$

Comparer les fonctions f et g

**Solution** : $D_f=D_g=\mathbb{R}$

et $g(x)-f(x)=x^2+x+2-(x+1)=x^2+1\succ 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $f(x)\prec g(x)\quad \forall x\in\mathbb{R}$ par suite : $f\prec g$

**Exercice 11 :** (**) Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x)=x$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

**Solution** : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}^*$

et $f(x)-g(x)=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}$

Etudions le signe de : $\dfrac{x^2-1}{x}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{x^2-1}{x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Si : $x\in]-\infty;-1]\cup]0;1]$ alors $f(x)-g(x)\le 0$

Par suite : $f(x)\le g(x)$ c'est-à-dire : $f\le g$

Si : $x\in[-1;0[\cup[1;+\infty[$ alors $f(x)-g(x)\ge 0$

Et par suite : $f(x)\ge g(x)$ c'est-à-dire : $f\ge g$

**Exercice 12 :** (**) Soit f la fonction numérique tel que: $f(x)=\dfrac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$.

Etudier le signe de la fonction f

**Solution :** $4x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$ et $x\neq-\dfrac{1}{2}$

Donc : $D_I=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right\}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$f(x)\ge 0$ Si et seulement si :

$x\in\left]-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2};2\right]$

Donc : $f\ge 0\quad \forall x\in\left]-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{3}\right]\cup\left]\dfrac{1}{2};2\right]$

$f(x)\le 0$ Si et seulement si :

$x\in\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left[-\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right[\cup[2;+\infty[$

**Exercice 13 :** (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x+m}$ avec $m\in\mathbb{R}$

1) Déterminer les valeurs de m pour que $D_f=\mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tel que :

$g(x)=\dfrac{1}{x+2}$

Déterminer les valeurs de m pour que on a :

$f(x)=g(x)$ pour tout $x\in\{-2;1\}$

**Solution :**1) $D_f=\mathbb{R}$ signifie que : $x^2+x+m\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

$x^2+x+m\neq 0$ On a : $\Delta=b^2-4ac=1-4m$

$\Delta\prec 0$ Signifie que : $m\succ\dfrac{1}{4}$

Donc : si $m\succ\dfrac{1}{4}$ alors $\Delta\prec 0$

Donc : $x^2+x+m\neq 0$ et par suite ; $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=g(x)$ pour tout $x\in\{-2;1\}$

Signifie que : $\dfrac{x-1}{x^2+x+m}=\dfrac{1}{x+2}$

Signifie que : $(x-1)(x+2)=x^2+x+m$

Signifie que : $x^2+x-2=x^2+x+m$

$f(x)=g(x)$ Signifie que : $-2=m$

**Exercice14:** (**) Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que: $f(x)=|2x-4|$

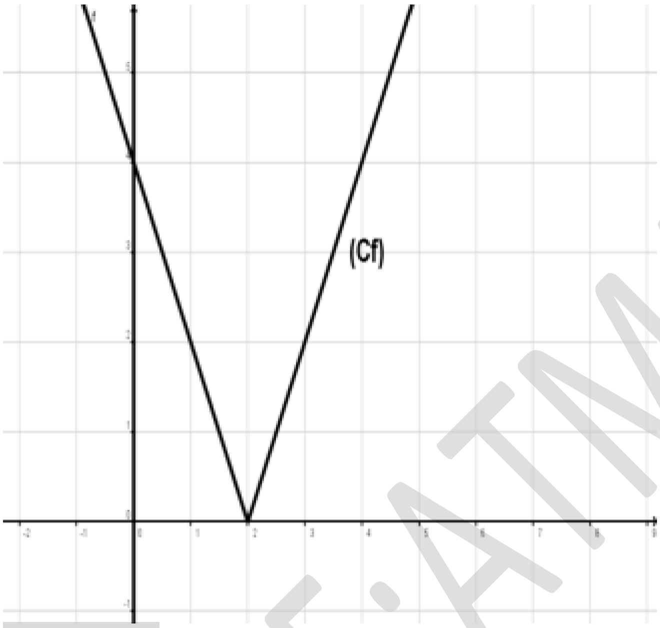
**Solution :** On a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

$2x-4=0$ Équivaut à: $x=\frac{4}{2}=2$

Donc $f(x)=2x-4$ si $x\in[2,+\infty[$

et $f(x)=-2x+4$ si $x\in]-\infty,2]$

| $x$ | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-4$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\|2x-4\|$ | $-2x+4$ | | $2x-4$ |




**Exercice15:** (***) Tracer la représentation graphique de la fonction f tel que :
$f(x)=|x-2|+|x+2|$

**Solution :**

- on a $f(x)\in\mathbb{R}$ donc $D_f=\mathbb{R}$

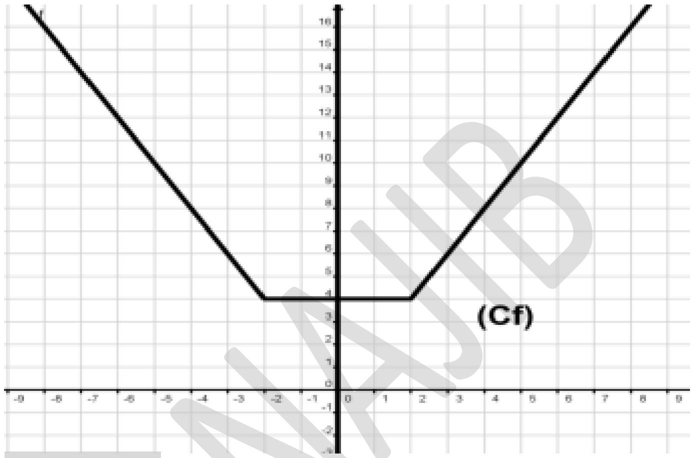
$x+2=0$ Équivaut à : $x=-2$
$x-2=0$ Équivaut à : $x=2$

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $\|x-2\|$ | $-x+2$ | | $-x+2$ | | $x-2$ | |
| $x+2$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $+$ | |
| $\|x+2\|$ | $-x-2$ | | $x+2$ | 0 | $x+2$ | |
| $\|x-2\|+\|x+2\|$ | $-2x$ | | 4 | | $2x$ | |

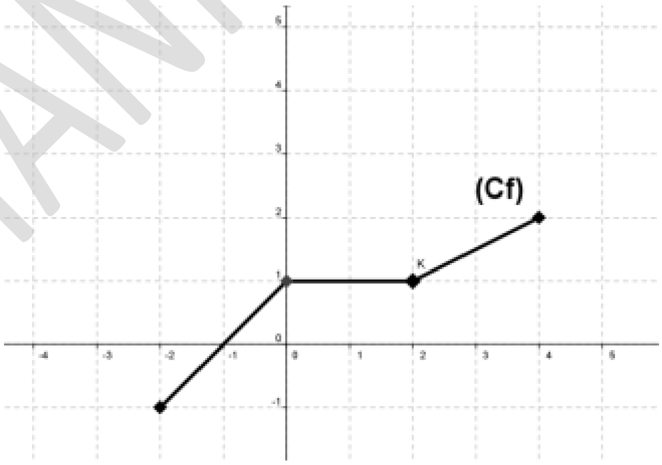
Donc $f(x)=-2x$ si $x\in]-\infty,-2]$

Et $f(x)=4$ si $x\in[-2,2]$

Et $f(x)=2x$ si $x\in[2,+\infty[$




**Exercice16:** (***) La figure ci-dessous représente la représentation graphique d'une fonction f
Sur l'intervalle : $[-2,4]$




**1)** Déterminer les images des nombres **:**
**-2 ; -1 ;0 ; 2 ; 4** par la fonction f

2) Déterminer : $f(x)$ en fonction de $x$ sur $[-2,4]$

**Solution : 1)** $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$ et $f(0)=1$ et $f(2)=1$ et $f(4)=2$

2) On remarque que la représentation graphique de la fonction f est un segment sur chacun des intervalles : $[-2,0]$ et $[0,2]$ et $[2,4]$

Donc la fonction f est affine sur ces intervalles

- Sur l'intervalle $[-2,0]$ on a : $f(x)=a_1x+b_1$
- Et on a : $f(-2)=-1$ et $f(-1)=0$

Donc : $\begin{cases} -2a_1 + b_1 = -1 \\ -a_1 + b_1 = 0 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} -a_1 = -1 \\ b_1 = a_1 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} a_1 = 1 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ Par suite : $f(x) = x + 1$

- Sur l'intervalle $[0,2]$ on a : $f(x) = 1$
- Sur l'intervalle $[2,4]$ on a : $f(x) = a_2 x + b_2$
- Et on a : $f(2) = 1$ et $f(4) = 2$

Donc : $\begin{cases} 2a_2 + b_2 = 1 \\ 4a_2 + b_2 = 2 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} 2a_2 = 1 \\ b_2 = 2 - 4a_2 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} a_2 = \dfrac{1}{2} \\ b_2 = 2 - 2 = 0 \end{cases}$ Par suite : $f(x) = \dfrac{1}{2}x$

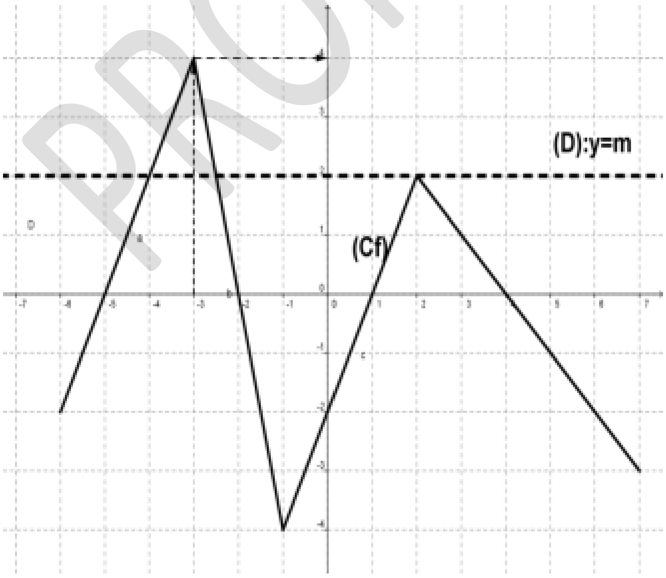
Par conséquent :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & si \quad x \in [-2,0] \\ f(x) = 1 & si \quad x \in [0,2] \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x & si \quad x \in [2,4] \end{cases}$$

**Exercice17:** (**) La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6;7]$

Répondre par lecture graphique :

1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
3- Résoudre graphiquement $f(x) = 0$
4- Quel est en fonction de m le nombre de solutions de : $f(x) = m$.
5- Résoudre graphiquement $f(x) \prec 0$
6- Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$




**Solution :** 1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5)
Image de -3 est 4 et l'image de 0 est -2 et l'image de 6 est -2
2) Antécédents de -1 sont : -5,5 ;-1,75 ; 0,5 et 5 et Antécédents de 0 sont : -5 ; -2 ; 1 et 4.
3) L'ensemble des solutions est l'ensemble des antécédents de 0 : $S = \{-5; -2; 1; 4\}$

4) Nombre de solutions de $f(x) = m$ c'est le nombre de points d'intersections de la courbe avec la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m.

Si $m \prec -4$ : pas de solution
Si $m = -4$ : une solution
Si: $-4 \prec m \prec -3$ deux solutions
Si $-3 \prec m \prec -2$ : trois solutions
Si $-2 \prec m \prec 2$ : quatre solutions
Si $m = 2$ : trois solutions
Si: $2 \prec m \prec 4$ deux solutions
Si $m = 4$ :une solution
Si $m \succ 4$ : pas de solution

5) $f(x) \prec 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles $C_f$ est au-dessous de l'axe des abscisses.
$S = [-6;7] \cup ]-2;1[ \cup ]4;7]$

6) $f(x) \geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles $C_f$ est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$ Donc $S = [-4; 2.5] \cup \{2\}$

**Exercice18 :** (**) Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : f(x) = x² – 2x – 5
Et g(x) = -x – 3.
Étudier les positions de $(C_f)$ et $(C_g)$ les courbes représentatives respectives de f et g

**Solutions :** Soit h(x) = f(x) – g(x)
Donc : h(x) = x² – 2x – 5 + x + 3 = x² – x – 2
h est une fonction du second degré.
Calculons son discriminant afin de déterminer son signe : a = 1, b = -1 et c = -2.
Δ = (-1)² – [4 × 1 × (-2)] = 9 = 3²
Δ étant strictement positif, le trinôme admet deux racines qui sont :

$x_1 = \dfrac{1+3}{2\times1} = 2$ et $x_2 = \dfrac{1-3}{2\times1} = -1$

Le signe de la fonction est du signe de a, c'est-à-dire positif de part et d'autre des racines mais du signe contraire (donc négatif) entre ces racines.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)-g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Par conséquent $\left(C_f\right)$ est confondue avec $\left(C_g\right)$ pour : x = -1 et x = 2

$\left(C_f\right)$ Est située au-dessus de $\left(C_g\right)$ sur :

$\left]-\infty;-1\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

$\left(C_f\right)$ Est située au-dessus de $\left(C_g\right)$ sur $\left]-1\infty;2\right[$

**Exercice19:** (***) Soit la fonction numérique :

$f\left(x\right)=-4x^3+\dfrac{1}{2x}$

1) Déterminer $D_f$

2) Etudier la parité de $f$

3) Montrer que :

$f\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-f\left(-x\right)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

4) Montrer que la fonction: $g\left(x\right)=f\left(x\right)+1$ est une fonction ni paire ni impaire,

**Solution :**1) On a $f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ signifie $x\neq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}^*=\left]-\infty;0\right[\cup\left]0;+\infty\right[=\mathbb{R}-\{0\}$

2) Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

$f(-x)=-4(-x)^3+\dfrac{1}{2(-x)}=-\left(-4x^3+\dfrac{1}{2x}\right)$

Donc : $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$ si $x\in\mathbb{R}^*$

Cela signifie que : $f$ est une fonction impaire

3) Pour tout $x\in D_f$ nous avons :

$f\left(x\right)-f\left(-x\right)=f\left(x\right)-\left(-f\left(x\right)\right)$

Car $f$ est une fonction impaire

Donc : $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=f\left(x\right)+f\left(x\right)=2f\left(x\right)$

D'où : $f\left(x\right)-f\left(-x\right)=2f\left(x\right)$ par suite :

$f\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)-f\left(-x\right)}{2}$ pour tout $x\in D_f$

4) $g\left(x\right)=f\left(x\right)+1=-4x^3+\dfrac{1}{2x}+1$ ; on a : $D_g=\mathbb{R}^*$

$g\left(-1\right)=-4\left(-1\right)^3+\dfrac{1}{2\left(-1\right)}+1=\dfrac{9}{2}$

et $g\left(1\right)=-4\left(1\right)^3+\dfrac{1}{2\times 1}+1=-\dfrac{5}{2}$ et $-g\left(1\right)=\dfrac{5}{2}$

Nous remarquons que :

$g\left(-1\right)\neq -g\left(1\right)$ et $g\left(-1\right)\neq g\left(1\right)$ qui signifie que la fonction $g$ est ni paire ni impaire,

**Exercice20:** (**) Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+2x+\dfrac{1}{x}$

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ 4) $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$

5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f\left(x\right)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

7) $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$ 8) $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x-2}$

**Solutions :**1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$ On a $f\left(x\right)\in\mathbb{R}$

Signifie que : $x\neq 0$ par suite : $D_f=\mathbb{R}^*$

☞ Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$

$f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$

Donc $f$ est une fonction impaire,

2) $f(x)=x^2+2x+\dfrac{1}{x}$ on a $f\left(x\right)\in\mathbb{R}$

Signifie $x\neq 0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}^*$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=\left(-x\right)^2+2\left(-x\right)+\dfrac{1}{-x}=x^2-2x-\dfrac{1}{x}$

$f\left(-x\right)\neq -f\left(x\right)$

Donc $f$ est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

On a : $f\left(x\right)\in\mathbb{R}$ signifie $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ Signifie $x^2=1$

Équivaut à: $x=1$ ou $x=-1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $f(-x)=\dfrac{|-x|}{\left(-x\right)^2-1}=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

$f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ Donc $f$ est une fonction paire

4) $f\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\right\}$

$1-x^2=0$ Signifie $x^2=1$ Équivaut à: $x=1$ ou $x=-1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x^2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc $D_f=[-1,1]$

☞Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$ alors $-x\in[-1,1]$

☞ $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

$f(-x)=f(x)$

Donc $f$ est une fonction paire

5) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ Signifie : $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

☞Pour tout réel x si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☞ $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc $f$ est une fonction impaire

6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$ Or on sait que $2x^2\geq 0$

Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$

Par suite $2x^2+4\geq 4\geq 0$ Donc $D_f=\mathbb{R}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☞ $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

$f(-x)=f(x)$

Donc $f$ est une fonction paire

7) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$

Donc $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$

donc $f$ est une fonction ni paire ni impaire

8) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ : On a $f(x)\in\mathbb{R}$

Signifie $x-2\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On a $-2\in D_f$ mais $-(-2)=2\notin D_t$

Donc : $D_f$ n'est pas symétrique par rapport a $O$

Donc : $f$ est une fonction ni paire ni impaire

**Exercice 21 :** (***) Soit la fonction définie par :

$5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ pour tout réel x.

1) Montrer que : $f$ est une fonction impaire

2) Donner une expression de $f(x)$ pour tout réel x

**Solution** : Soit $x\in\mathbb{R}$ : on a

$5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$ (1) pour tout réel x

On remplaçant x par –x on trouve :

$5f(-x)+f(x)=2(-x)^3-3(-x)$

Donc : $5f(-x)+f(x)=-2x^3+3x$ (2)

(1)+ (2) donne : $6(f(-x)+f(x))=0$

Donc : $f(-x)+f(x)=0$

Donc : $f(-x)=-f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f$ est une fonction impaire

2) On a : $5f(x)+f(-x)=2x^3-3x$

Et puisque $f$ est une fonction impaire

Donc : $5f(x)-f(x)=2x^3-3x$

$4f(x)=2x^3-3x \Leftrightarrow \boxed{f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{4}}$

**Exercice22 :** (**) Soit la fonction définie par :

$f(x)=\dfrac{|x|+1}{2|x|-3}$

$(C_f)$ la courbe de $f$ Dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

Montrer que $(C_f)$ symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

**Solution :** $D_f=\{x\in\mathbb{R}/2|x|-3\neq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/|x|\neq\dfrac{3}{2}\right\}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que : $f$ est une fonction paire

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$

alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$

☞ $f(-x)=\dfrac{|-x|+1}{2|-x|-3}=\dfrac{|x|+1}{2|x|-3}=f(x)$

Donc $f$ est une fonction paire

Par suite : la $(C_f)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

**Exercice23 :** (**) Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :1) $f(x)=2\sin x-x^3(1-\cos x)$

2) $g(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$. 3) $h(x)=\dfrac{\tan^4 x}{1+\sin^2 x}$

**Solution :** 1) $f(x)=2\sin x-x^3(1-\cos x)$

On a : $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=2\sin(-x)-(-x)^3(1-\cos(-x))$

$f(-x)=-2\sin x+x^3(1-\cos x)$

Car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

$f(-x)=-(2\sin x-x^3(1-\cos x))=-f(x)$

Donc $f$ est une fonction impaire .

2) $g(x)=\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}$. $D_g=\{x\in\mathbb{R}/1-\cos x\neq 0\}$

$1-\cos x=0$ Signifie $\cos x=1$

C'est-à-dire : $x=0+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Donc: $D_g=\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$ alors $-x\in\mathbb{R}-\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$

☞ $g(-x)=\dfrac{2\sin(-x)}{1-\cos(-x)}=\dfrac{-2\sin x}{1-\cos x}=-\dfrac{2\sin x}{1-\cos x}=-g(x)$

Car $\cos(-x)=\cos x$ et $\sin(-x)=-\sin x$ si $x\in\mathbb{R}$

Donc $g$ est une fonction impaire

3) $h(x)=\dfrac{\tan^4 x}{1+\sin^2 x}$

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } 1+\sin^2 x\neq 0/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Et puisque : $1+\sin^2 x\neq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ alors :

$D_h=\left\{x\in\mathbb{R}/x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

Donc : $D_h=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

alors $-x\in\mathbb{R}-\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$

☞ $h(-x)=\dfrac{\tan^4(-x)}{1+\sin^2(-x)}=\dfrac{(-\tan x)^4}{1+(-\sin x)^2}=\dfrac{(\tan x)^4}{1+(\sin x)^2}=h(x)$

Car $\tan(-x)=-\tan x$ et $\sin(-x)=-\sin x$

Donc $g$ est une fonction paire.

**Exercice24:** (***) Soit la fonction f définie par:

$f(x)=\dfrac{1}{2}(|x+2|-|x-2|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f .

3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=[0;2]$ et $J=[2;+\infty[$ .

4) Dresser son tableau de variation sur $D_f$

5) Soit $(C_f)$ la courbe de $f$ .

a)Est ce que les points $A(2;2)$ et $B(1;2)$ et $c(3;5)$ et $D(3;2)$ appartiennent à la courbe $(C_f)$

b) Tracer la courbe $(C_f)$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé.

**Solution :** 1) Un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) ☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☞ $f(-x)=\dfrac{1}{2}(|-x+2|-|-x-2|)=\dfrac{1}{2}(|-(x-2)|-|-(x+2)|)$

$f(-x)=\dfrac{1}{2}(|(x-2)|-|(x+2)|)$ car $|-x|=|x|$

$f(-x)=-\dfrac{1}{2}(|-(x-2)|+|(x+2)|)$

$f(-x)=-\dfrac{1}{2}(||(x+2)|-(x-2)|)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

Alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrique de $(C_f)$ il suffit de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

Par suite le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

3) si $x\in I=[0;2]$ alors : $0\leq x\leq 2$

Donc : $x-2\leq 0$ et $x+2\geq 0$

Par suite :

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2-(-(x-2)))=\dfrac{1}{2}(x+2+x-2)=x$

Si $x\in J=[2;+\infty[$ alors : $x\geq 2$

Donc : $x-2\geq 0$ et $x+2\geq 0$

Par suite :

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2-(x-2))=\dfrac{1}{2}(x+2-x+2)=2$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x)=x \text{ si } x\in I=[0;2] \\ f(x)=2 \text{ si } x\in J=[2;+\infty[ \end{cases}$

4) Tableau de variation sur $D_f$ :

On a : f est constante sur l'intervalle : $J=[2;+\infty[$ et croissante dans $I=[0;2]$

Et puisque f est une fonction impaire alors f est constante sur l'intervalle : $J'=]-\infty;-2]$ et croissante dans $I'=[-2;0]$ d'où le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\rightarrow$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $\rightarrow$ |

a)On a $f(2)=\frac{1}{2}(|2+2|-|2-2|)=2$

Donc : $A(2;2)\in(C_f)$

On a $f(1)=\frac{1}{2}(|1+2|-|1-2|)=1\neq 2$

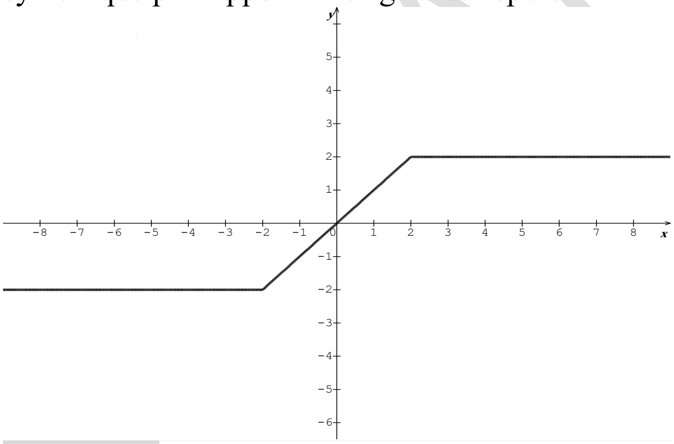
Donc : $B(1;2)\notin(C_f)$

On a $f(3)=\frac{1}{2}(|3+2|-|3-2|)=2\neq 5$

Donc : $C(3;5)\notin(C_f)$

On a $f(3)=2$ donc : $D(3;2)\in(C_f)$

b) f est une fonction impaire donc $(C_f)$ est symétrique par rapport à l'origine du repère



**Exercice25:** (***) soit la fonction f définie par:

$f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

1) Déterminer le domaine de définition de f

2) Etudier la parité de la fonction f et en déduire le domaine d'étude de f

3) Simplifier l'écriture de f dans les intervalles $I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) Calculer: $f(0)$ ; $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ; $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ ; $f(-3)$ et $f(3)$

5) Dresser son tableau de variation sur $D_f$

6) Tracer la courbe $(C_f)$ dans un repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ orthonormé

**Solution :**1) Un réel a toujours une image.

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) ☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$

☞ $f(-x)=-\frac{1}{2}(|-2x+3|+|-2x-3|)=-\frac{1}{2}(|-(2x-3)|+|-(2x+3)|)$

$f(-x)=-\frac{1}{2}(|2x-3|+|2x+3|)$ Car $|-x|=|x|$

Donc : $f(-x)=f(x)$ par suite : f est une fonction paire,

Donc : la droite des ordonnées est un axe de symétrie de $(C_f)$

Il suffit donc de l'étudier sur $D_f\cap\mathbb{R}^+$

C'est-à-dire: le domaine d'étude de f est : $D_E=\mathbb{R}^+$

3) $f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)$

Si $x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ alors : $0\leq x\leq\frac{3}{2}$

Donc : $0\leq 2x\leq 3$ c'est-à-dire : $2x-3\leq 0$

et on a : $2x+3\geq 0$

Par suite :

$f(x)=-\frac{1}{2}(2x+3+(-(2x-3)))=-\frac{1}{2}(2x+3-2x+3)=-3$

Si $x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ alors : $x\geq\frac{3}{2}$

Donc : $2x\geq 3$ c'est-à-dire : $2x-3\geq 0$

Et on a : $2x+3\geq 0$ Par suite :

$f(x)=-\frac{1}{2}(|2x+3|+|2x-3|)=-\frac{1}{2}(2x+3+|2x-3|)=-\frac{1}{2}(4x)=-2x$

Finalement on a : $\begin{cases} f(x)=-3 \ si\ x\in I=\left[0;\frac{3}{2}\right] \\ f(x)=-2x \ si\ x\in J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[ \end{cases}$

4) $f(0)=-\frac{1}{2}\left(|2\times0+3|+|2\times0-3|\right)=-\frac{1}{2}(3+3)=-3$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\left|2\times\frac{3}{2}+3\right|+\left|2\times\frac{3}{2}-3\right|\right)=-\frac{1}{2}(6+0)=-3$

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-3$ Car :f est une fonction paire

$f(-3)=f(3)=-6$

5) Le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

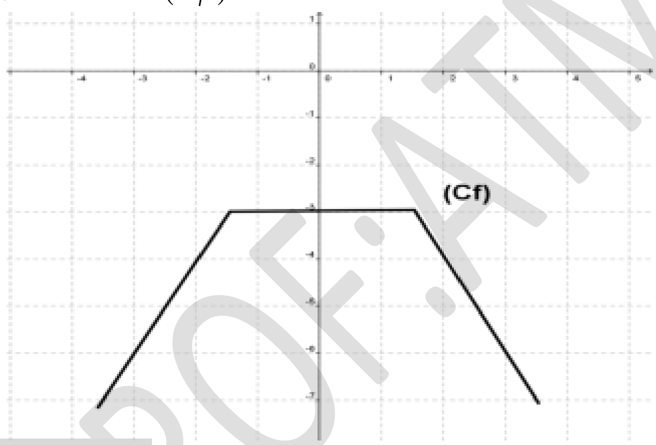
On a : f est constante sur l'intervalle :

$I=\left[0;\frac{3}{2}\right]$ et décroissante dans $J=\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

Et puisque f est une fonction paire alors f est constante sur l'intervalle : $I'=\left[-\frac{3}{2};0\right]$ et f est croissante dans $J'=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$ d'où le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↗ | $-3$ | → | $-3$ | → | $-3$ | ↘ | |

6) La courbe $(C_f)$ :




**Exercice26 :** (*) Soient les fonctions définies par :

1) $f(x)=7x-5$ 2) $g(x)=\frac{2}{x}$

Etudier la monotonie de $f$ et de g

**Solutions :**1) $f$ est une fonction polynôme

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

Soit $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tels que : $x_1\prec x_2$

Donc $7x_1\prec 7x_2$ car $7\succ0$

Donc $7x_1-5\prec7x_2-5$ Alors $f(x_1)\prec f(x_2)$

D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{2}{x}$

$g(x)\in\mathbb{R}$ Signifie $x\neq0$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

a)Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$ tels que :

$x_1\prec x_2$ Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$

Par suite : $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ0$

Alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ d'où f est strictement décroissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1\in]-\infty;0]$ et $x_2\in]-\infty;0]$ tq $x_1\prec x_2$

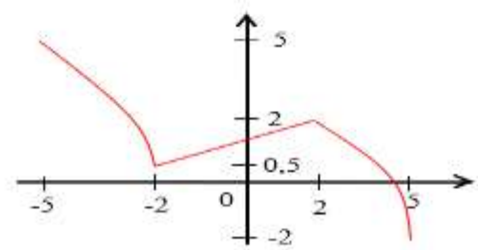
Donc $\frac{1}{x_1}\succ\frac{1}{x_2}$ par suite : $\frac{2}{x_1}\succ\frac{2}{x_2}$ car $2\succ0$

Alors $f(x_1)\succ f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

b) **tableau de variation :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | \|\| | ↘ | |

**Exercice27:** (**) Soit la fonction définie par la représentions graphique suivante sur l'intervalle **:** $[-5;5]$




Dresser son tableau de variation sur l'intervalle **:** $[-5;5]$

**Solutions :**

| x | -5 | | -2 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f(x) | 5 | ↘ | 0,5 | ↗ | 2 | ↘ | -2 |

**Exercice28 :** (**) Soit f une fonction tel que :

$f(x)=3x^2+2$

1) Déterminer $D_f$

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f Entre $x_1$ et $x_2$ tel que : $x_1\neq x_2$

3) Etudier les variations de f sur les intervalles $[0;+\infty[$ et $]-\infty;0]$

4) Dresser le tableau de variation de f

**Solutions :**1) $f$ est une fonction polynôme

Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(3x_1^2+2)-(3x_2^2+2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3x_1^2-3x_2^2+2-2}{x_1-x_2}=\frac{3(x_1^2-x_2^2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{3(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{x_1-x_2}=3(x_1+x_2)$$

**3)** Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tels que : $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)$

a)Soit $x_1\in[0;+\infty[$ et $x_2\in[0;+\infty[$

Donc $x_1\geq 0$ et $x_2\geq 0$ et $x_1\neq x_2$

implique $x_1+x_2\succ 0$

Donc $3(x_1+x_2)\succ 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

b) Soit $x_1\in]-\infty;0]$ et $x_2\in]-\infty;0]$

Donc $x_1\leq 0$ et $x_2\leq 0$ et on a $x_1\neq x_2$

Donc : $x_1+x_2\prec 0$ par suite : $3(x_1+x_2)\prec 0$ car $3\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=3(x_1+x_2)\prec 0$

D'où f est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$

4) Résumé : Tableau de variation **:**

$f(0)=3\times 0^2+2=2$

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

**Exercice29:** (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2+3x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f

2) Montrer que f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) En déduire que : pour tout $x\in[-1;3]$

On a : $-1\leq f(x)\leq 19$

b) En déduire que : pour tout $x\in[-5;-2]$

On a : $-1\leq f(x)\leq 11$

**Solutions :**1) $f$ est une fonction polynôme

Donc $D_f=\mathbb{R}$.

2) Soient $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1^2+3x_1+1)-(x_2^2+3x_2+1)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2+3(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2+3)}{x_1-x_2}$$

Donc : $T(x_1;x_2)=x_1+x_2+3$ par suite :

**Si :** $x_1\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ et $x_2\in\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

Alors $x_1\geq\frac{-3}{2}$ et $x_2\geq\frac{-3}{2}$ et $x_1\neq x_2$

implique $x_1+x_2\succ -3$

Donc $x_1+x_2+3\succ 0$ par suite : $T(x_1;x_2)\succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

**Si :** $x_1\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ et $x_2\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Alors : $x_1\leq\frac{-3}{2}$ et $x_2\leq\frac{-3}{2}$ et $x_1\neq x_2$ cela

implique $x_1+x_2\prec -3$

Donc $x_1+x_2+3\prec 0$ par suite : $T(x_1;x_2)\prec 0$

D'où : f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

4) Résumé : tableau de variation :

On a : $f\left(\frac{-3}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2}\right)^2+3\left(\frac{-3}{2}\right)+1=\frac{-5}{4}$ donc :

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{-3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $\frac{-5}{4}$ | $\nearrow$ |

**5)** a) Puisque f est strictement croissante sur $\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$ alors f est strictement croissante

sur $[-1;3]$ Car : $[-1;3]\subset\left[\frac{-3}{2};+\infty\right[$

Si on a $x\in[-1;3]$ alors : $f(-1)\le f(x)\le f(3)$

(f est strictement croissante)

On a : $f(-1)=(-1)^2+3(-1)+1=1-3+1=-1$

et $f(3)=3^2+3\times3+1=9+9+1=19$

Par suite : $-1\le f(x)\le 19$ si $x\in[-1;3]$

b) Puisque f est strictement décroissante sur $\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ alors f est strictement croissante sur $x\in[-5;-2]$ car : $[-5;-2]\subset\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$

Si on a $x\in[-5;-2]$ alors : $f(-2)\le f(x)\le f(-5)$

(f est strictement décroissante)

On a : $f(-2)=(-2)^2+3(-2)+1=4-6+1=-1$

et $f(-5)=(-5)^2+3(-5)+1=25-15+1=11$

Par suite : $-1\le f(x)\le 11$ si $x\in[-5;-2]$

**Exercice30:** (**) Soit $g$ une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+4x-1$

1) Etudier la monotonie de $g$ sur : $[2;+\infty[$ et $]-\infty;2]$

2) Dresser le tableau de variation de g.

**Solutions :**1) $g$ est une fonction polynôme

Donc : $D_g=\mathbb{R}$

Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\neq x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{(-x_1^{\ 2}+4x_1-1)-(-x_2^{\ 2}+4x_2-1)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-(x_1^{\ 2}-x_2^{\ 2})+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\frac{-(x_1-x_2)(x_1+x_2)+4(x_1-x_2)}{x_1-x_2}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{(x_1-x_2)(-x_1-x_2+4)}{x_1-x_2}=-x_1-x_2+4$$

Donc : $T(x_1;x_2)=-x_1-x_2+4$ par suite :

**Si :** $x_1\in[2;+\infty[$ et $x_2\in[2;+\infty[$ alors $x_1\ge2$ et $x_2\ge2$ et $x_1\neq x_2$ implique $x_1+x_2\succ4$

Donc $-x_1-x_2\prec-4$ par suite : $-x_1-x_2+4\prec0$

Donc $T(x_1;x_2)\prec0$ d'où : $g$ est strictement décroissante sur $[2;+\infty[$

**Si :** $x_1\in]-\infty;2]$ et $x_2\in]-\infty;2]$ alors : $x_1\le2$ et $x_2\le2$ et $x_1\neq x_2$ cela implique $x_1+x_2\prec4$

Donc $-x_1-x_2\succ-4$ par suite : $-x_1-x_2+4\succ0$

Donc $T(x_1;x_2)\succ0$

D'où : $g$ est strictement croissante sur $]-\infty;2]$

2) <u>Résumé</u> : tableau de variation :

On a : $g(2)=-2^2+4\times2-1=-4+8-1=3$

Donc :

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ |

**Exercice31:** (**) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{x}{x+1}$.

1) Déterminer $D_g$.

2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de g entre $x_1$ et $x_2$ tel que : $x_1\neq x_2$.

3) Etudier les variations de g sur les intervalles $I=]-\infty;-1[$ et $J=]-1;+\infty[$.

4) Dresser son tableau de variation de f.

**Solutions :** 1) On a $g(x)\in\mathbb{R}$ équivaut à: $x+1\neq0$

c'est-à-dire : $x\neq-1$ Donc $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Soient $x_1\in D_g$ et $x_2\in D_g$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\frac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}$

$$g(x_1)-g(x_2)=\frac{x_1}{x_1+1}-\frac{x_2}{x_2+1}=\frac{x_1(x_2+1)-x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

Donc :

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1-x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}\times\frac{1}{x_1-x_2}=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

3) a) Sur $I=]-\infty;-1[$ :

Soit $x_1\in]-\infty;-1[$ et $x_2\in]-\infty;-1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec-1$ et $x_2\prec-1$

Donc $x_1+1\prec0$ et $x_2+1\prec0$

Donc $(x_1+1)(x_2+1)\succ0$

Donc : $T(x_1;x_2)=\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}\succ0$ sur $I=]-\infty;-1[$

D'où : g que est strictement croissante sur $I=]-\infty;-1[$

b) Sur $J=]-1;+\infty[$ :

Soit $x_1 \in ]-1;+\infty[$ et $x_2 \in ]-1;+\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 \succ -1$ et $x_2 \succ -1$

Donc $x_1 + 1 \succ 0$ et $x_2 + 1 \succ 0$

Donc $(x_1+1)(x_2+1) \succ 0$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} \succ 0$ sur $J = ]-1;+\infty[$

D'où : g que est strictement croissante sur $J = ]-1;+\infty[$

4) <u>Résumé</u> : tableau **de variation :**

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | ‖ | $\nearrow$ |

**Exercice32:** (***) Soit f une fonction tel que :

$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1) Déterminer $D_f$ et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1;x_2)$ de f entre $x_1$ et $x_2$ deux éléments de $D_f$ tel que : $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I = ]0;1]$ puis sur $J = [1;+\infty[$

4) En déduire les variations de f sur $D_f$

5) Dresser le tableau de variations de f sur $D_f$

**<u>Solutions :</u>** 1) On a $f(x) \in \mathbb{R}$ équivaut à: $x \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

☞Pour tout réel x si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

☞ $f(-x) = -x + \dfrac{1}{-x} = -x - \dfrac{1}{x} = -\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$f(-x) = -f(x)$

Donc $f$ est une fonction impaire,

2) $f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) = x_1 + \dfrac{1}{x_1} - x_2 - \dfrac{1}{x_2}$

$= \dfrac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2}$

$= \dfrac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2} = \dfrac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$

$T(x_1;x_2) = \dfrac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \dfrac{1}{x_1 - x_2} = \dfrac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$

a) Sur $I = ]0;1]$ : Soient $x_1 \in ]0;1]$ et $x_2 \in ]0;1]$

Donc $0 \prec x_1 \leq 1$ et $0 \prec x_2 \leq 1$ $x_2 + 1 \prec 0$

Donc $0 \prec x_1 x_2 \leq 1$ et $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 x_2 - 1 \prec 0$ et on a : $0 \prec x_1 x_2$

Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} \prec 0$

D'où : f est strictement décroissante sur $I = ]0;1]$

b) Sur $J = [1;+\infty[$ :

Soient $x_1 \in [1;+\infty[$ et $x_2 \in [1;+\infty[$ .

Donc $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$

Donc $x_1 x_2 \geq 1$ et $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 x_2 \succ 1$ par suite : $x_1 x_2 - 1 \succ 0$

Et on a $0 \prec x_1 x_2$ Donc $T(x_1;x_2) = \dfrac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} \succ 0$

D'où : f est strictement croissante sur $J = [1;+\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I = ]0;1]$ est l'intervalle $I' = [-1;0[$ et le symétrique de $J = [1;+\infty[$ est l'intervalle $J' = ]-\infty;-1]$

Puisque : f est strictement décroissante sur $I$ alors f est strictement décroissante sur $I'$

Puisque : f est strictement croissante sur $J$ alors f est strictement croissante sur $J'$

5) par suite le tableau de variations de f sur $D_f$ est :

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f(x)$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | ‖ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

$f(1) = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$ et $f(-1) = -1 - \dfrac{1}{1} = -2$

**Exercice33 :** (*) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = 5x^2 + 3$ .

Montrer que $f(0) = 3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

**<u>Solutions :</u>** $D_f = \mathbb{R}$ ; On a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$x^2 \geq 0$ donc $5x^2 \geq 0$ car $5 \succ 0$

Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0)$

D'où : $f(0) = 3$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

**Exercice34 :** (*) Soit g une fonction numérique

Tel que : $g(x) = -4x^2 + 1$

Montrer que: $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

**Solutions :** Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-4x^2+1$ $D_g=\mathbb{R}$

On a pour tout $x\in\mathbb{R}$ $x^2\geq 0$ donc $-4x^2\leq 0$ car $-4\prec 0$

Par suite $-4x^2+1\leq 1$ et on a $g(0)=1$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $g(x)\leq g(0)$

D'où : $g(0)=1$ est un maximum de g sur $\mathbb{R}$

**Exercice35:** (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-4x^2+4x+5$

1)a) Montrer que $f(x)=6-(2x-1)^2$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$

b) Montrer que $f(x)\leq 6$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

**Solutions :** 1) a) On a $D_f=\mathbb{R}$

$6-(2x-1)^2=6-\left(4x^2-4x+1\right)=6-4x^2+4x-1=-4x^2+4x+5$

Donc : $f(x)=6-(2x-1)^2$

b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a : $(2x-1)^2\geq 0$

Par suite $-(2x-1)^2\leq 0$ donc $6-(2x-1)^2\leq 6$

C'est-à-dire : pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)\leq 6$

2) On a $f\left(\frac{1}{2}\right)=6-\left(2\times\frac{1}{2}-1\right)^2=6-(1-1)^2=6$

On a pour tous $x\in\mathbb{R}$ : $6-(2x-1)^2\leq 6$

Alors : $f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc: $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

**Exercice36 :** (**) Soit g une fonction numérique tel que : $g(x)=-x^2+3x+4$

1) Déterminer les nombres réels $\alpha$ et $\beta$ tels que : $g(x)=-(x+\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Montrer que g admet une valeur maximal sur $\mathbb{R}$ qu'il faut déterminer .

**Solutions :** 1) a) On a $D_g=\mathbb{R}$ ;

$g(x)=-x^2+3x+4=-\left(x^2-3x\right)+4$

$g(x)=-\left(x^2-2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)+4$

$g(x)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}+4=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

Donc : $\alpha=-\frac{3}{2}$ et $\beta=\frac{25}{4}$

2) On a ; $g(x)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

et on a pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\geq 0$

Par suite $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\leq 0$ donc $-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}\leq\frac{25}{4}$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ : $g(x)\leq\frac{25}{4}$ et on a : $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$

Alors : $g(x)\leq g\left(\frac{3}{2}\right)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Par conséquent : $g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{25}{4}$ c'est la valeur Maximal de g sur $\mathbb{R}$

**Exercice 37:** (*) Soit f une fonction numérique tel que: $f(x)=5x^2+3$

Montrer que f admet un minimum absolue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

**Solution :** $D_f=\mathbb{R}$ ; On a pour tout $x\in\mathbb{R}$

$x^2\geq 0$ donc $5x^2\geq 0$ car $5\succ 0$

Par suite $5x^2+3\geq 3$ et on a $f(0)=3$

Donc : pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\geq f(0)$

D'où : $f(0)=3$ est un minimum absolue de f sur $\mathbb{R}$

**Exercice 38 :** (*) Du tableau de variation

| $x$ | -5 | | -2 | | 2 | | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 5 | $\searrow$ | 0,5 | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | -2 |

Déduire les extrémums de f

**Solution :** Du tableau de variation on a :Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0=2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0=-2$

**Exercice 39 :** (**) Soit f une fonction numérique tel que: $f(x)=-x^2+4x-3$ .

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

**Solution** : $D_f=\mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x)\le 1$ et que l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$f(x)-1=-x^2+4x-3-1=-x^2+4x-4=-(x^2-4x+4)=-(x-2)^2\le 0$

Donc $f(x)\le 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$ et on a :

$f(x)=1\Leftrightarrow f(x)-1=0\Leftrightarrow -(x-2)^2=0\Leftrightarrow x=2$

Donc 'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x)\le f(2)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Par suite: $f(2)=1$ est le maximum absolue de f sur $\mathbb{R}$

**Exercice 40:** (***) Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1) Etudier le signe de f

2) a)Démontrer que : $f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x\in]1;+\infty[$

b) Est ce que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

**Solution :**1) Soit $x\in]1;+\infty[$ :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

$$f(x)=\frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$$

Donc : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\succ 0$

Par suite : $f(x)\succ 0$ si $x\in]1;+\infty[$

2) a) $x\in]1;+\infty[$ Montrons que $f(x)\le\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Soit $x\in]1;+\infty[$ donc $x\succ 1$ cela implique que : $x+1\succ 2$

Donc $\sqrt{x+1}\succ\sqrt{2}$ alors : $\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\succ 2\sqrt{2}$

C'est-à-dire : $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2}}\prec\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Par suite : $f(x)\prec\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x\in]1;+\infty[$

Alors : f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $M=3$

Conclusion : $2\prec f(x)\le 3$ $\forall x\in\mathbb{R}$

b) On remarque que : $f(0)=3$

Donc $f(x)\le f(0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1;+\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) Puisque $f(x)\ne\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\forall x\in]1;+\infty[$

Alors $\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

**Exercice 41:** (***) Soit f une fonction numérique définie sur $]1;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Déterminer $D_f$ .

2) Démontrer que $-1$ est la valeur minimale de f .

3) Démontrer que : $f(x)\prec 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

**Solution :**1)

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}+2\ne 0\ et\ x\ge 0\}=\{x\in\mathbb{R}/\sqrt{x}\ne -2\ et\ x\ge 0\}$

Donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) Montrons donc que : $f(x)\ge -1$ et que l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x)-(-1)=f(x)+1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}+1=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}\ge 0$$

Donc $f(x)\ge -1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(x)=-1\Leftrightarrow f(x)+1=0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}=0\Leftrightarrow x=0$

Donc l'équation $f(x)=-1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$ Et on a : $f(0)=-1$

Donc : $f(x)\ge f(0)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

Donc : $f(0)=-1$ est le minimum absolue de f sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $x\in\mathbb{R}^+$ $f(x)-1=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}-1=\frac{-4}{\sqrt{x}+2}\prec 0$

Donc $f(x)\prec 1$ $\forall x\in\mathbb{R}^+$

Donc f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M=1$

Et puisque $f(x)=1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$ alors : 1 n'est pas une valeur maximale de f

**Exercice 42:** (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x^2-2x+3$

1)a) Démontrer que : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$

b) Est ce que f admet une valeur minimale ?

2) Démontrer qu'il n'existe pas un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

**Solution :** $D_f=\mathbb{R}$

1)a) $f(x)=x^2-2x+3=(x^2-2x+1)+2=(x-1)^2+2$

Donc $f(x)-2=(x-1)^2\geq 0$

Par suite : $f(x)\geq 2\ \forall x\in\mathbb{R}$

Et on a : $f(1)=2$ donc : $f(x)\geq f(1)\ \forall x\in\mathbb{R}$

Donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons qu'il existe un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $(x-1)^2+2\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $(x-1)^2\leq M-2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $\sqrt{(x-1)^2}\leq\sqrt{M-2}$ (on peut toujours supposer $M\geq 2$) pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc : $|x-1|\leq\sqrt{M-2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}\leq x-1\leq\sqrt{M-2}$

Donc on a : $-\sqrt{M-2}+1\leq x\leq\sqrt{M-2}+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc ; absurde

Donc : il n'existe pas un réel $M\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\leq M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

**Exercice43:** (*) Donner le tableau de variations et représenter la courbe des fonctions numériques définies par : 1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$

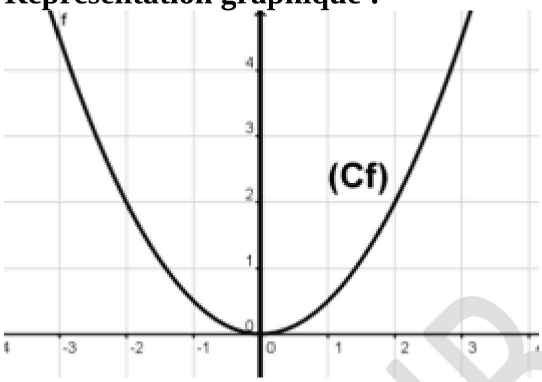
**Solutions : 1)** $D_f=\mathbb{R}$ et On a $a=\frac{1}{2}\succ 0$

Donc : Tableau de variations de f

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

| $x$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ | $\frac{9}{2}$ |

**Représentation graphique :**




2) Soit f une fonction numérique tq :

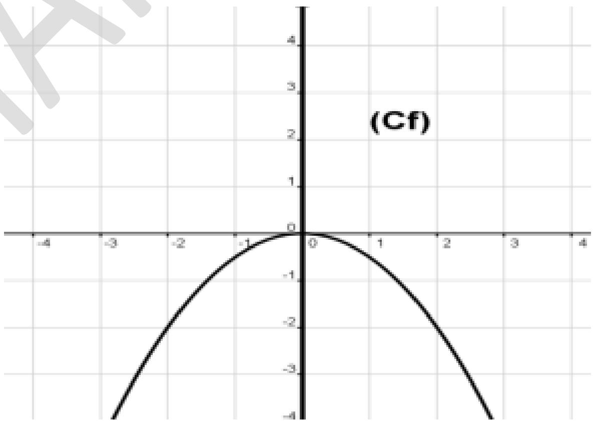
$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ et $D_f=\mathbb{R}$ On a : $a=-\frac{1}{2}\prec 0$

Donc : Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ |

**Représentation graphique :**

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | $-\frac{1}{8}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-2$ |




**Exercice44 :** (**) Soit f une fonction numérique tel que: $f(x)=2x^2-4x-2$

$(C_f)$ Sa courbe représentative

1) Déterminer $D_f$ et déterminer $\alpha$ et $\beta$ tel que : $f(x)=2(x-\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déterminer le Tableau de variations de $f$

3) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

**Solution :1)** On a : $f$ est une fonction polynôme ; donc : $D_f=\mathbb{R}$ On a : $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$ $\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{32}{4\times 2}=-4$

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=2(x-1)^2-4$

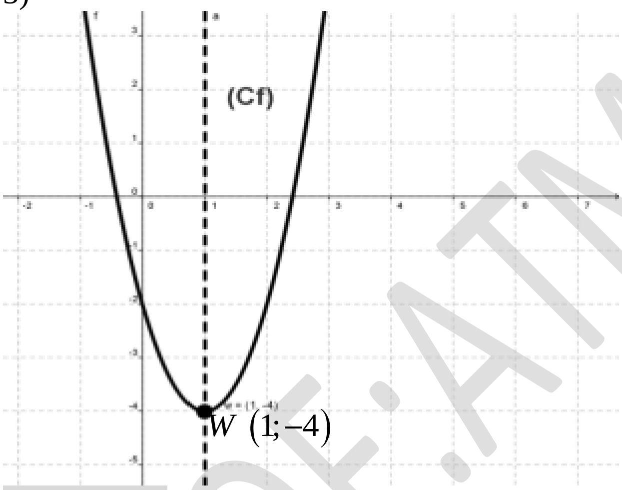
$\left(f(1)=2-4-2=-4\right)$

2) Soit $W(1;-4)$ Donc dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(1;-4)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de $f$ : On a $a=2\succ 0$ donc :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ |

3)




**Exercice45 :** (**) Soit g une fonction numérique tel que : $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$ et $(C_h)$ sa courbe représentative dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Déterminer $D_h$ et déterminer $\alpha$ et $\beta$ tel que : $h(x)=-\frac{1}{2}(x-\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déterminer le Tableau de variations de g

3) Tracer la courbe représentative $(C_h)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

**Solution :**1) $h(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$

On a $h$ est une fonction polynôme donc $D_h=\mathbb{R}$

On a $a=-\frac{1}{2}$ et $b=2$ et $c=1$ $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

Donc $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{-2}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=2$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4+2}{-2}=3$

Donc : pour tout réel $x\in\mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme : $h(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$

$\left(h(2)=-\frac{1}{2}(2-2)+3=3\right)$

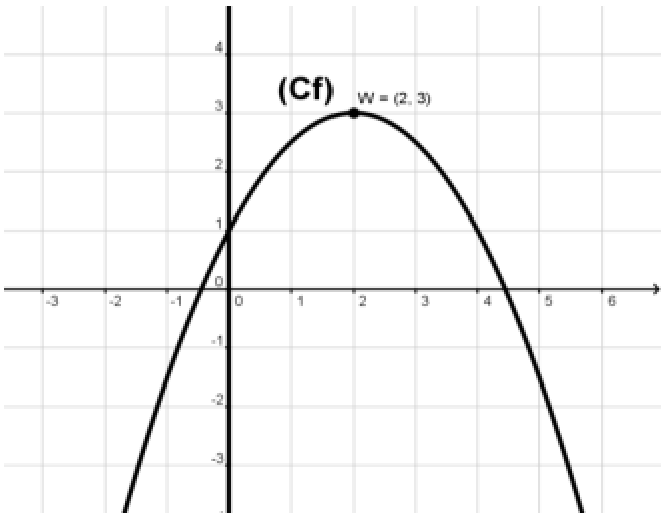
2) Soit : $W(2;3)$ Donc dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $(C_h)$ c'est une parabole de sommet $W(2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x=2$

Tableau de variations de $g$

On a $a=-\frac{1}{2}\prec 0$ donc :

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $h(x)$ | $\nearrow$ | $3$ | $\searrow$ |

3)




**Exercice46 :** (**) 1) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=2x^2-4x+7$

Et $(C_f)$ sa courbe représentative

1) Déterminer le tableau de variations de $f$ .

2) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ de f dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

**Solution :1)** On a $f$ est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

On a : $a=2$ et $b=-4$ et $c=-2$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

La forme canonique de $f$ est

$f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec : $\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{4}{2\times 2}=1$

et $\beta=f(\alpha)=f(1)=2(1)^2-4\times1+7=5$

Donc : $f(x)=2(x-1)^2+5$ ; Pour tout réel $x$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(1;5)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Tableau de variations de $f$ : On a $a=2\succ 0$

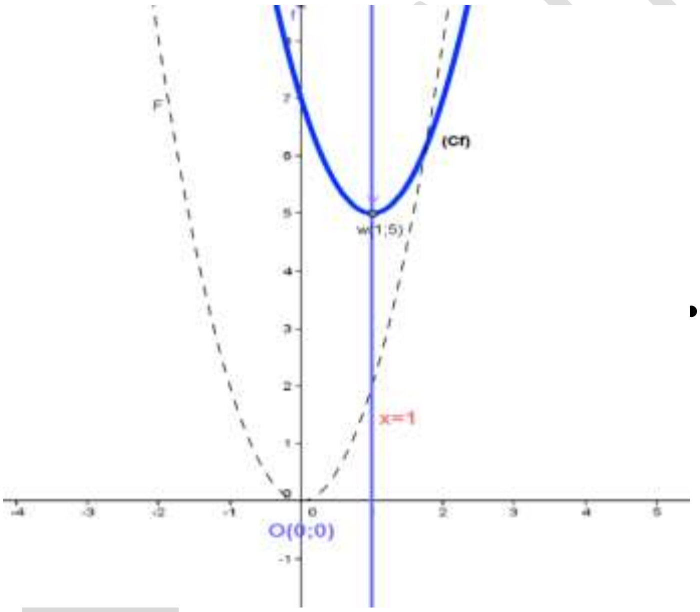
Donc :

| $x$ | $-\infty$ 1 $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | ↘ 5 ↗ |

2) Nous déduisons la courbe $(C_f)$ à partir de la courbe $(C_F)$ de la fonction définie par :

$F(x)=2x^2$ par translation de vecteur : $\vec{u}(1;5)$

( $f(1)=5$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ )




**Exercice47:** (**) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

$(C_f)$ Sa courbe représentative

1) Déterminer $D_f$ et déterminer $\alpha$ et $\beta$ et $k$ tel que : $f(x)=\beta+\frac{k}{x-\alpha}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déterminer le Tableau de variations de $f$

3) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

**Solution :1)** On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ équivaut à : $x\neq 1$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Si $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a :

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -2x+2 & 2 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{3}{x-1}=2+\frac{3}{x-1}$$

2) $f(x)-2=\frac{3}{x-1}$ signifie $y-2=\frac{3}{x-1}$

On pose $\begin{cases} x-1=X \\ y-2=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$

$y=\frac{2x+1}{x-1}$ ssi $Y=\frac{3}{X}$

- Tableau de variations de $X\longrightarrow\frac{3}{X}$ $(3\succ 0)$

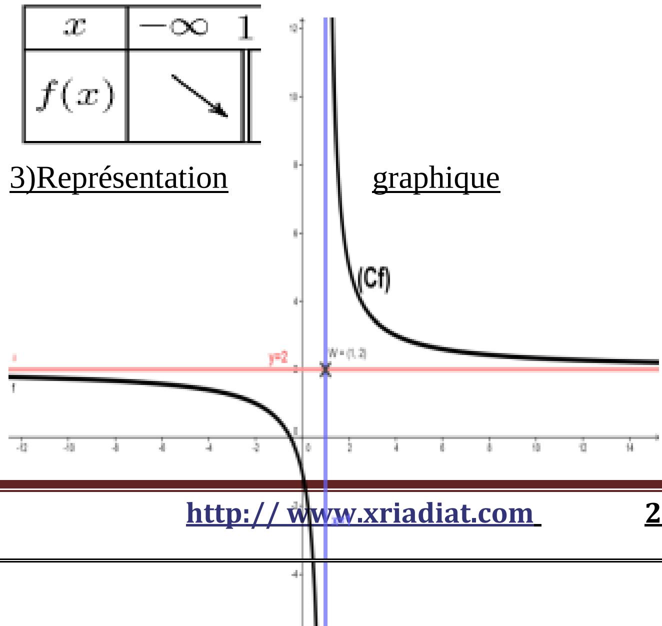
| $x$ | $-\infty$ 0 $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | ↘ ‖ ↘ |

On a $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

- Donc le tableau de variations de $x\longrightarrow\frac{2x+1}{x-1}$

| $x$ | $-\infty$ 1 |
|---|---|
| $f(x)$ | ↘ ‖ |

3)Représentation graphique



**Exercice48 :** (**) 1) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{-2x+1}{2x-4}$

$(C_f)$ Sa courbe représentative

1) Déterminer $D_f$

2) Déterminer $\alpha$ et $\beta$ et $k$ t el que :

$f(x)=\beta+\dfrac{k}{x-\alpha}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) Déterminer le Tableau de variations de $f$

4) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

**Solution :1)** Soit f une fonction numérique tq :

$f(x)=\dfrac{-2x+1}{2x-4}$

On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $2x-4\neq 0$

C'est-à-dire : $x\neq 2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

2) Si $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a :

$$\begin{array}{r|l} -2x+1 & 2x-4 \\ \cline{2-2} -2x+4 & -1 \\ \cline{1-1} -3 & \end{array}$$

$f(x)=\dfrac{-(2x-4)-3}{2x-4}=\dfrac{-(2x-4)}{2x-4}+\dfrac{-3}{2x-4}=-1+\dfrac{-3/2}{x-2}$

3) $f(x)+1=\dfrac{-3/2}{x-2}$

On pose $\alpha=2$ et $\beta=-1$ et soit $W(2;-1)$

• Donc dans le repère $(W;\vec{i};\vec{j})$ l'équation de $(C_f)$

est $Y=\dfrac{-3/2}{X}$ avec $Y=y+1$ et $X=x-2$

Donc /$(C_f)$ est une hyperbole de centre $W$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives

$x=2$ et $y=-1$

• Tableau de variations $X\longrightarrow\dfrac{-3/2}{X}$ $\left(-3/2\prec 0\right)$

| $X$ | $-\infty$ $\quad 0 \quad$ $+\infty$ | |
|---|---|---|
| | ↗ | ↗ |

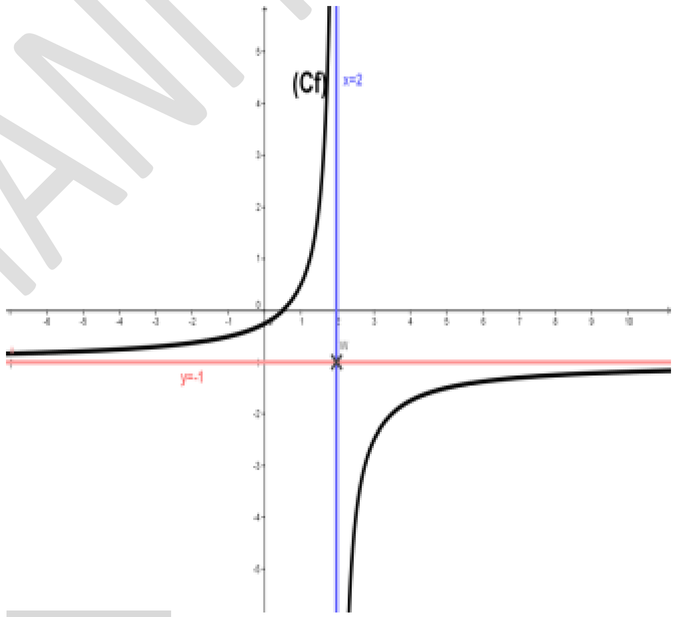
• Donc le tableau de variations de :

$x\longrightarrow\dfrac{-2x+1}{2x-4}$

| $x$ | $-\infty$ $\quad 2 \quad$ $+\infty$ | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | ↗ | ↗ |

4)

| -1 | 0- | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1/2 | -1/4 | 1/2 | | -5/2 | -7/4 | -3 /2 |




**Exercice49 :** (**) Soit f une fonction numérique tel que : $g(x)=\dfrac{-x}{x-2}$ $(C_g)$ Sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer $D_g$ et déterminer $\alpha$ et $\beta$ et $k$ tel que : $g(x)=\beta+\dfrac{k}{x-\alpha}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

3) Déterminer le Tableau de variations de $g$

4) Tracer la courbe représentative $(C_g)$

**Solution :1)** $g(x)=\dfrac{-x}{x-2}$

On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-2\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 2$

Donc : $D_g=\mathbb{R}-\{2\}$

Si $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ on a

$$\begin{array}{r|l} -x & x-2 \\ \cline{2-2} \underline{x-2} & -1 \\ -2 & \end{array}$$

$g(x)=\dfrac{-x}{x-2}=\dfrac{-1(x-2)-2}{x-2}=\dfrac{-1(x-2)}{x-2}+\dfrac{-2}{x-2}=-1+\dfrac{-2}{x-2}$

2) $g(x)+1=\dfrac{-2}{x-2}$ signifie que : $y+1=\dfrac{-2}{x-2}$

On pose $\begin{cases} x-2=X \\ y+1=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+2 \\ y=Y-1 \end{cases}$

$y=\dfrac{-x}{x-2}$ si et seulement si : $Y=\dfrac{-2}{X}$

• <u>Tableau de variations de</u> $X\longrightarrow\dfrac{-2}{X}$ $(-2\prec 0)$

| $X$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2/X$ | ↗ | ‖ | ↗ |

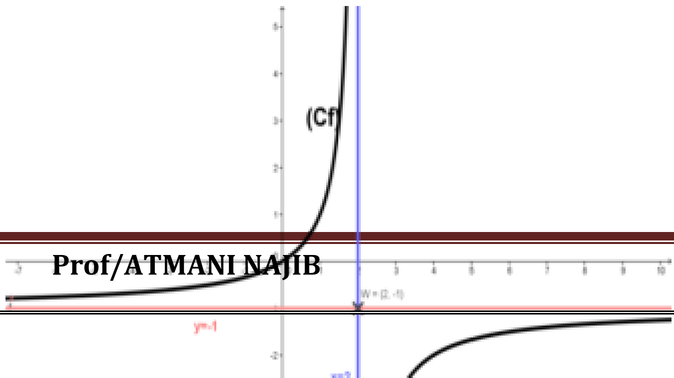
On a $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

• <u>Donc le tableau de variations de</u> $x\longrightarrow\dfrac{-x}{x-2}$

| $x$ | $-\infty$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | ↗ | ‖ | ↗ |

<u>3) Représentation graphique</u>

| **-1** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -1/ 3 | 0 | 1 | | -3 | -2 | -5/ 3 |



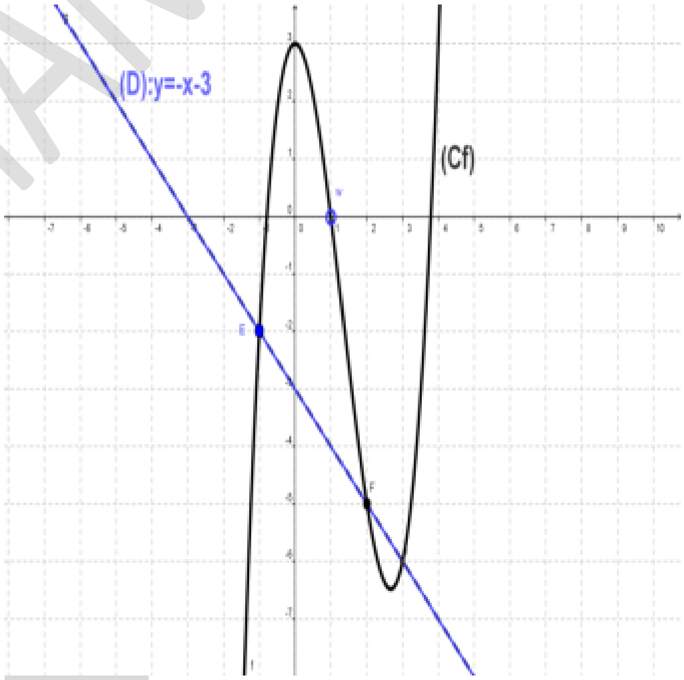

**Exercice50:** (***) Soit la courbe $(C_f)$ représentative de f telle que $f(x)=x^3-4x^2+3$ et la droite $(D)$ d'équation $y=-x-3$

(voir la figure)

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=3$ puis l'inéquation $f(x)\prec 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$ et l'inéquation $f(x)\geq 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=-x-3$ puis l'inéquation $f(x)\leq -x-3$




**<u>Solutions :</u>** 1) $f(x)=3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S=\{0;4\}$

2) $f(x)=0$ La solution est l'ensemble des antécédents de 0 : $S=\{a;1;b\}$ Avec $-1\prec a\prec -0.5$ et $3.5\prec b\prec 4$

$f(x)\geq 0$

$S=[a;1]\cup[b;+\infty[$

3) $f(x)=-x-3$ La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de $(C_f)$ et de D : $y=-x-3$ donc $S=\{-1;2;3\}$

$f(x)\leq -x-3$ $S=]-\infty;-1]\cup[2;3]$

**Exercice51 :** (***) Soient f et g les deux fonctions définies sur R par :

$f(x)=x^2-2x-1$ et $g(x)=2x-4$

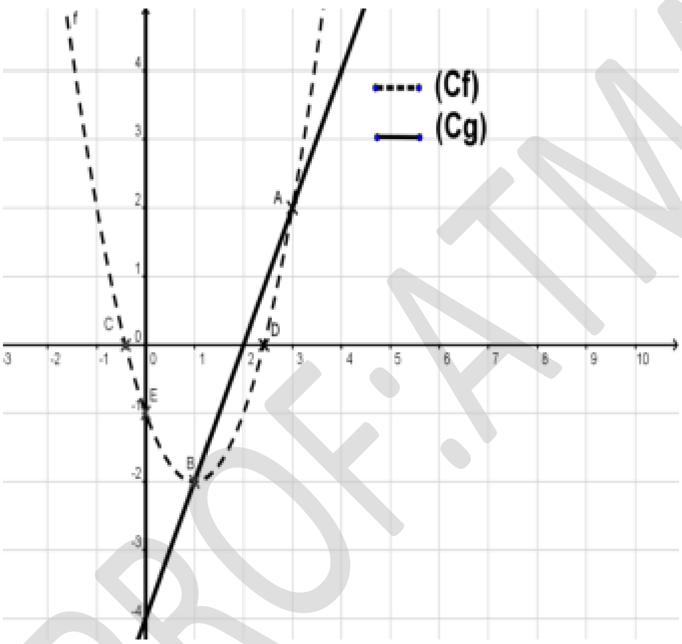
1) Tracer Les courbes représentatives $(C_f)$ et $(C_g)$

2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x)=g(x)$

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$

4) Trouver les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec les axes du repère

**Solutions :** : 1) Les courbes représentatives $(C_f)$ et $(C_g)$ sont données dans le repère ci-dessous :




2) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$

On a donc $x=1$ et $x=3$ donc $S=\{1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2-2x-1=2x-4$

c'est-à-dire : $x^2-4x+3=0$

$a=1$ et $b=-4$ et $c=+3$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

Donc : $x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4+2}{2}=\frac{6}{2}=3$

et $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times1}=\frac{4-2}{2}=\frac{2}{2}=1$ Donc $S=\{1;3\}$

3) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$ :

La courbe $(C_f)$ est au-dessus de $(C_g)$ si $x\in]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

Donc $S=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$ :

$f(x)\succ g(x)$ Signifie $x^2-2x-1\succ 2x-4$

C'est-à-dire : $x^2-4x+3\succ 0$

Les racines sont : $x_1=3$ et $x_2=1$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $S=]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

4)a) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2>0$

$x_1=\frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$

$x_2=\frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(1-\sqrt{2};0\right)$ et $D\left(1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe $(C_f)$ avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$

**Exercice52:** (**) On considère les fonctions :

$f:x\to f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et $g:x\to g(x)=\frac{1}{x+1}$ .

Le but de l'exercice est d'étudier la position relative de $(C_f)$ et $(C_g)$ les courbes représentatives des fonctions f et g

1) Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f et g

2) Montrer que, pour tout nombre $x$ réel : $x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$

3) Montrer que pour tout nombre $x$ réel: $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

En déduire le signe de l'expression : $x^2+2x+2$

4) A l'aide de ce qui précède, déterminer la position relative des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$

**Solution:**1) Dans l'expression de $f(x)$ , $x$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle :

Donc $D_f=\mathbb{R}$

Tandis que pour : $g(x)$ , $x$ ne doit pas prendre de valeur telle que : $x+1=0$ soit $x=-1$

Donc, $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Pour tout $x$ réel :

$(x-1)(x^2+2x+2)=x^3+2x^2+2x-x^2-2x-2=x^3+x^2-2$

3) Pour tout $x$ réel :

$(x+1)^2+1=x^2+2x+1+1=x^2+2x+2$

Pour tout nombre $x$ réel : $(x+1)^2\geq0$

Donc $x^2+2x+2=(x+1)^2+1\geq1\succ0$

Ainsi $x^2+2x+2$ est toujours strictement positif.

4) Pour comparer les positions des courbes $(C_f)$ et $(C_g)$, on étudie le signe de : $f(x)-g(x)$ :

$f(x)-g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x+1}=\frac{x^3+x^2-2}{2(x+1)}$

Donc : $f(x)-g(x)=\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$

Donc, d'après de ce qui précède on a :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+2x+2$ | | $+$ | \| | $+$ | \| | $+$ | |
| $2(x+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{2(x+1)}$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Ainsi $(C_f)$ est au-dessus de $(C_g)$ lorsque : $x\in]-\infty;-1[\cup[1;+\infty[$

Et $(C_f)$ au-dessous de $(C_g)$ lorsque: $x\in]-1;1]$

et les deux courbes se coupent en : $x=1$.

**Exercice53:** (***) Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=x|x|-2x+2$

1)a) Montrer que $f(x)=(x-1)^2+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$

b) Montrer que $f(x)=-(x+1)^2+3$ pour tout $x\in\mathbb{R}^-$

2) Tracer la courbe représentative $(C_f)$ de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $-x|x|+2x-2+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $1\leq f(x)\leq3$

**Solutions :**1)a)soit : $x\in\mathbb{R}^+$ alors : $|x|=x$

Donc : $f(x)=x^2-2x+2=x^2-2x+1+1$

Par suite : $f(x)=(x-1)^2+1$

1)b) Soit : $x\in\mathbb{R}^-$ alors : $|x|=-x$

Donc : $f(x)=-x^2-2x+2=-x^2-2x-1+3$

Donc : $f(x)=-(x^2+2x+1)+3$

Par suite : $f(x)=-(x+1)^2+3$

2) ☞ sur $\mathbb{R}^+$ : on a ; $f(x)=(x-1)^2+1$

l'équation de $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est :

$y=f(x)$

Signifie : $y=(x-1)^2+1$ c'est-à-dire : $y-1=(x-1)^2$

On pose : $Y=y-1$ et $X=x-1$

L'équation de $(C_f)$ devient : $Y=X^2$ dans le repère $(W;\vec{i};\vec{j})$ avec $W(1;1)$

Donc sur $\mathbb{R}^+$ : $(C_f)$ est une partie de la parabole d'équation : $Y=X^2$ dans le repère $(W;\vec{i};\vec{j})$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$ : on a ; $f(x)=-(x+1)^2+3$

l'équation de $(C_f)$ dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ est :

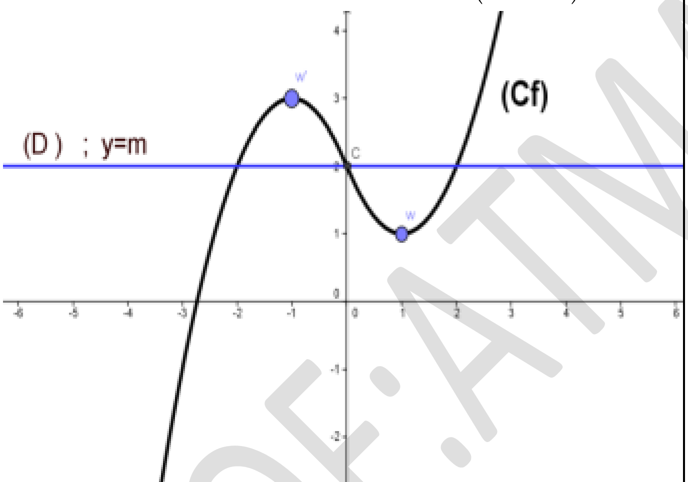
$y=f(x)$

Signifie : $y=-(x+1)^2+3$ c'est-à-dire : $y-3=-(x+1)^2$

On pose : $Y=y-3$ et $X=x+1$

L'équation de $(C_f)$ devient : $Y=-X^2$ dans le repère $(W';\vec{i};\vec{j})$ avec $W'(-1;3)$

Donc sur $\mathbb{R}^-$ : $(C_f)$ est une partie de la parabole d'équation : $Y=-X^2$ dans le repère $(W';\vec{i};\vec{j})$




3) Résolution graphique de l'équation $-x|x|+2x-2+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$ :

$-x|x|+2x-2+m=0$ Signifie $m=x|x|-2x+2$

Signifie : $m=f(x)$

Donc : les solutions de l'équation sont les abscisses des points d'intersections de $(C_f)$ et la droite : $y=m$

**Si**: $m\succ 3$ ou $m\prec 1$ il y'a une solution

**Si**: $m=3$ ou $m=1$ il y'a deux solutions

**Si**: $1\prec m\prec 3$ il y'a une trois solutions

4) Résolution graphique de l'inéquation : $1\le f(x)\le 3$

$1\le f(x)\le 3$ Signifie $(C_f)$ comprise entre les droites : $y=1$ et $y=3$

On va résoudre d'abord l'équation: $f(x)=3$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$ : $f(x)=3$ Signifie que :

$(x-1)^2+1=3$ c'est-à-dire : $(x-1)^2=2$

Signifie que : $x-1=\sqrt{2}$ ou $x-1=-\sqrt{2}$

C'est-à-dire : $x=\sqrt{2}+1$ ou $x=-\sqrt{2}+1\notin\mathbb{R}^+$

Signifie $x=\sqrt{2}+1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$ : $f(x)=3$ Signifie $-(x+1)^2+3=3$

C'est-à-dire : $-(x+1)^2=0$ Signifie $x=-1$

On va aussi résoudre l'équation: $f(x)=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^+$ : $f(x)=1$ Signifie $(x-1)^2+1=1$

C'est-à-dire : $(x-1)^2=0$ Signifie $x=1$

☞ Sur $\mathbb{R}^-$ : $f(x)=1$ Signifie $-(x+1)^2+3=1$

C'est-à-dire $-(x+1)^2=-2$ Signifie $(x+1)^2=2$

C'est-à-dire $x+1=\sqrt{2}$ ou $x+1=-\sqrt{2}$

Signifie $x=\sqrt{2}-1\notin\mathbb{R}^-$ ou $x=-\sqrt{2}-1\in\mathbb{R}^-$

Signifie $x=-\sqrt{2}-1$

Par suite : $1\le f(x)\le 3$ Signifie $-\sqrt{2}-1\le x\le 1+\sqrt{2}$

Finalement : $S=\left[-\left(\sqrt{2}+1\right);1+\sqrt{2}\right]$

**Exercice54:** (***) Soit f une fonction tel que :

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ $(C_f)$ Sa courbe représentative

1) Déterminer $D_f$ et calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre $x_1$ et $x_2$ tel que : $x_1\neq x_2$

2) Dresser son tableau de variation de f

3) Montrer que : $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in D_f$

4) Montrer que $(C_f)$ est un hyperbole et déterminer son centre et ses asymptotes

5) Tracer la courbe $(C_f)$ dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

6) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

a) Déterminer $D_g$ b) Montrer que : g est impaire

c) Montrer que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

d) En déduire une méthode pour tracer la courbe $\left(C_g\right)$ de fonction g et tracer $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

e) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec : $m\in\mathbb{R}$

**Solutions :** $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$ c'est-à-dire : $x\neq 1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Soient $x_1\in D_f$ et $x_2\in D_f$ tel que : $x_1\neq x_2$

On a : $T(x_1;x_2)=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1-1}-\frac{x_2}{x_2-1}=\frac{x_1(x_2-1)-x_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{x_1x_2-x_1-x_1x_2+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_1+x_2}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}=\frac{-(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)(x_1-1)(x_2-1)}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}$$

2) Tableau de variation : a)sur $]1;+\infty[$

Soient $x_1\in]1;+\infty[$ et $x_2\in]1;+\infty[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\succ 1$ et $x_2\succ 1$ donc : $x_1-1\succ 0$ et $x_2-1\succ 0$

Donc $(x_1-1)(x_2-1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}\leq 0$ sur $]1;+\infty[$

D'où f que est décroissante sur $]1;+\infty[$

b) Sur $]-\infty;1[$

Soient $x_1\in]-\infty;1[$ et $x_2\in]-\infty;1[$ $x_1\neq x_2$

Donc $x_1\prec 1$ et $x_2\prec 1$

Donc : $x_1-1\prec 0$ et $x_2-1\prec 0$

Donc $(x_1-1)(x_2-1)\succ 0$

Donc $T(x_1;x_2)=\dfrac{-1}{(x_1-1)(x_2-1)}\leq 0$ sur $]-\infty;1[$

D'où f que est strictement croissante sur $]-\infty;1[$

Résumé : tableau de variation :

| $x$ | $-\infty$ 1 $+\infty$ | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | ↘ |

3) Montrons que: $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $1+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=\dfrac{x}{x-1}$

Donc : $f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

4)Méthode1 :☹(changement de repére)

l'équation de $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ est :

$y=f(x)$

Signifie : $y=1+\dfrac{1}{x-1}$ donc : $y-1=\dfrac{1}{x-1}$

On pose : $Y=y-1$ et $X=x-1$

L'équation de $\left(C_f\right)$ devient : $Y=\dfrac{1}{X}$ dans le repère $\left(W;\vec{i};\vec{j}\right)$ avec $W(1;1)$

Donc $\left(C_f\right)$ est une hyperbole de centre $W$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives : $x=1$ et $y=1$

Méthode2 :☹(on utilisant le résumé de notre cours)Si : $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq 0$ alors $\left(C_f\right)$ est une hyperbole de centre $W\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\dfrac{d}{c}$ et $y=\dfrac{a}{c}$

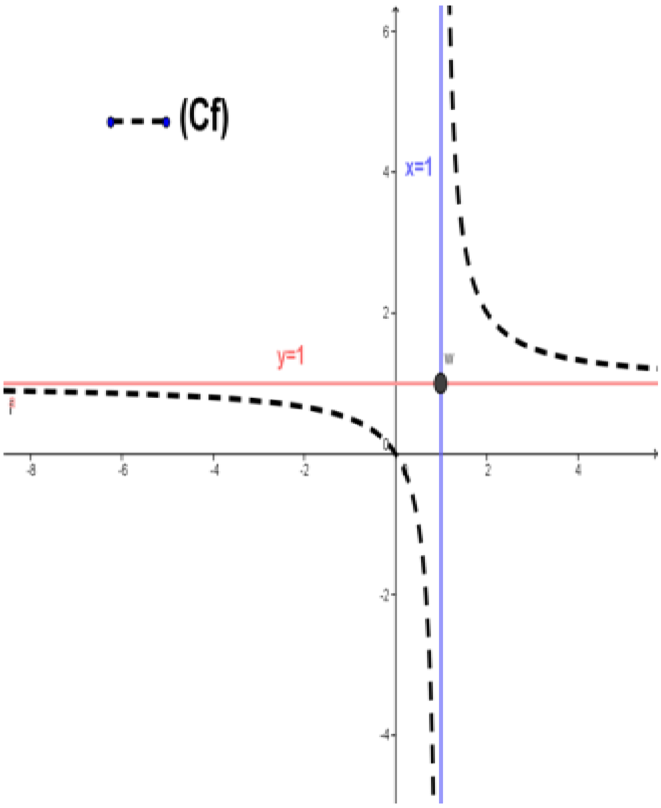
Dans notre exercice on a : $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

Donc $\left(C_f\right)$ est une hyperbole de centre $W\left(\dfrac{1}{1};\dfrac{1}{1}\right)$

et d'asymptotes les droites d'équations :

$x=\dfrac{1}{1}=1$ et $y=\dfrac{1}{1}=1$

5) La courbe $\left(C_f\right)$ :




6) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

On a $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|-1\neq 0$

Signifie $|x|\neq 1$ c'est-à-dire : $x\neq 1$ et $x\neq -1$

Par suite : $D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

b) Montrons que g est impaire :

☞ $x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$ Signifie $x\neq 1$ et $x\neq -1$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq -(-1)$

Signifie $-x\neq -1$ et $-x\neq 1$

Signifie $-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\dfrac{-x}{|-x|-1}=\dfrac{-x}{|x|-1}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $g(-x)=-\dfrac{x}{|x|-1}=-g(x)$ par suite : g est impaire

c) Montrons que : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$

Soit : $x\in D_f\cap\mathbb{R}^+$ donc : $x\geq 0$

Donc : $|x|=x$ par suite :

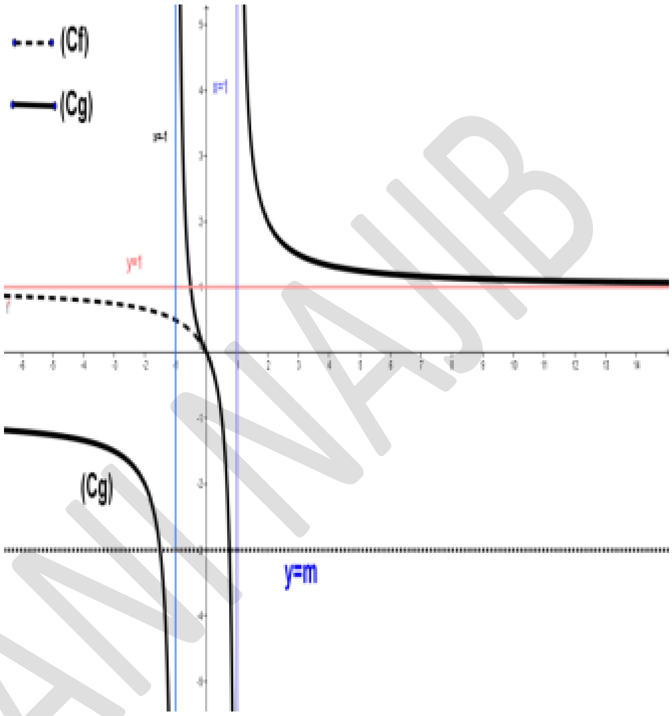
$g(x)=\dfrac{x}{|x|-1}=\dfrac{x}{x-1}=f(x)$

d) On a : $g(x)=f(x)$ Pour tout $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$

Donc : $(C_g)=(C_f)$ sur $[0;1[\cup]1;+\infty[$

Et puisque g est impaire alors il suffit de tracer son symétrique par rapport au centre du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

d) La courbe représentative de $(C_f)$ et de $(C_g)$ :




e) Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation $x-m|x|+m=0$ avec $m\in\mathbb{R}$

$x-m|x|+m=0$ Signifie $x=m|x|-m$

Signifie $x=m(|x|-1)$

C'est-à-dire : $m=\dfrac{x}{|x|-1}=g(x)$

Qui signifie que : $g(x)=m$

Donc : le nombre de solutions de l'équation est le nombre de points d'intersections de $(C_g)$ et la droite : $y=m$

**Si**: $-1\leq m\leq 1$ il y'a une seul solution

**Si**: $m\succ 1$ ou $m\prec 1$ il y'a deux solutions

**Exercice55:** (***) Soit f une fonction tel que :

$f(x)=\dfrac{-x+3}{x+1}$ Et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer $D_f$

2) Montrer que : $f(x)=-1+\dfrac{4}{x+1}$ pour tout $x\in D_f$

3) Déterminer le tableau de variations de f et tracer la courbe $(C_f)$

4) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{-|x|+3}{|x|+1}$

a) Déterminer $D_g$ b) Etudier la parité de g

c) Tracer $(C_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

d) Déterminer le tableau de variations de g

**Solutions :** $f(x)=\frac{-x+3}{x+1}$

1) On a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x+1\neq 0$

Signifie $x\neq -1$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

2) Montrons que :

$f(x)=-1+\frac{4}{x+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ on a : $-1+\frac{4}{x+1}=\frac{-x-1+4}{x+1}=\frac{-x+3}{x+1}$

Donc : $f(x)=-1+\frac{4}{x+1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$

3) On utilisant le résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $f(x)=\beta+\frac{k}{x+\alpha}$ alors $(C_f)$ est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

Dans notre exercice on a : $f(x)=-1+\frac{4}{x+1}$

avec : $\alpha=1$ et $\beta=-1$ et $k=4\succ 0$

Donc $(C_f)$ est une hyperbole de centre $W(-1;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations :

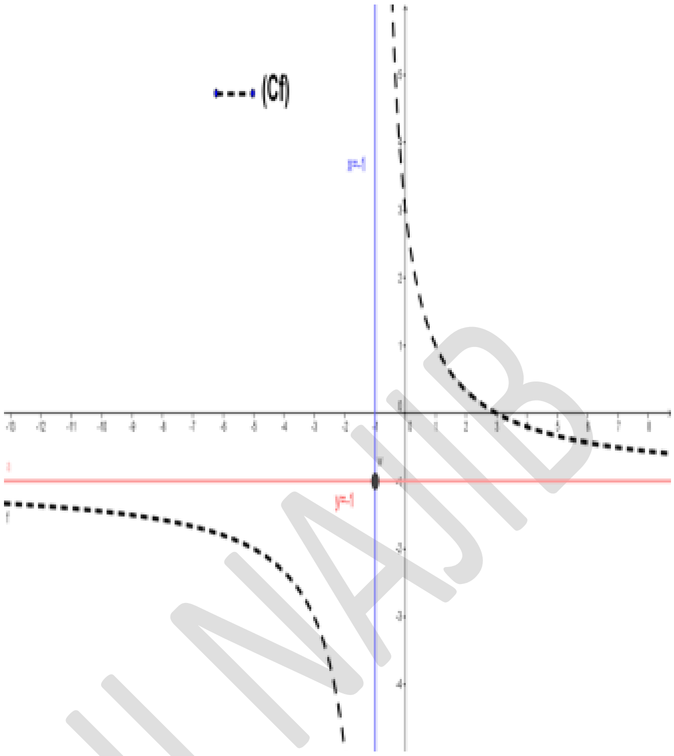
$x=-1$ et $y=-1$

Le tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ $\quad -1 \quad$ $+\infty$ | |
|---|---|---|
| $f(x)$ | ↘ | ↘ |

La courbe $(C_f)$ :

| --4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| -7 | -3 | -5 | | 3 | 1 | 1/3 |




4) a) Soit g une fonction tel que : $g(x)=\frac{-|x|+3}{|x|+1}$

On a : $g(x)\in\mathbb{R}$ signifie $|x|+1\neq 0$

Signifie $|x|\neq -1$ Par suite : $D_g=\mathbb{R}$

b) Etudions la parité de g :

☞ si $x\in\mathbb{R}$ alors $-x\in\mathbb{R}$

$-x\in D_g=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

☞ $g(-x)=\frac{-|-x|+3}{|-x|+1}=\frac{-|x|+3}{|x|+1}$ car $|-x|=|x|$

Donc : $g(-x)=g(x)$ Par suite : g est paire

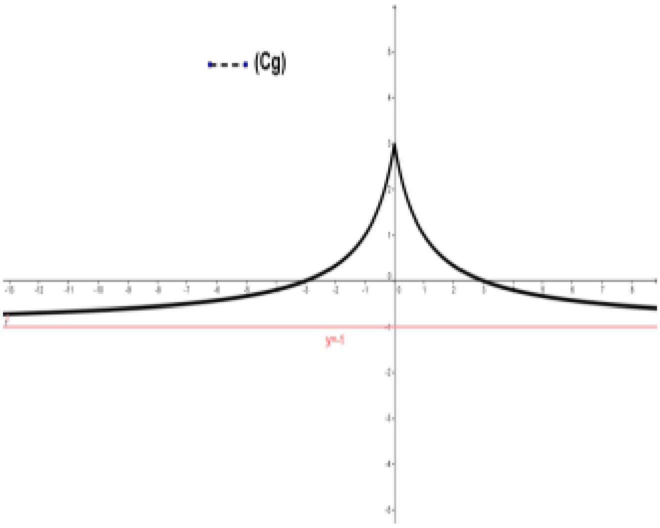
c)La courbe $(C_g)$ : Puisque g est paire alors la courbe représentative est symétrique par à l'axe des ordonnées.

On représente alors $(C_g)$ sur $[0;+\infty[$ et trace son symétrique sur $]-\infty;0]$

Or sur $[0;+\infty[$ : on a

$g(x)=\frac{-|x|+3}{|x|+1}=\frac{-x+3}{x+1}=f(x)$

Donc la courbe $(C_g)$ est:




d) d'après la courbe représentative de g on déduit le tableau de variations de g:

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $0$ $\quad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | $\nearrow$ $3$ $\searrow$ |

**Exercice56 :** (**) Soient f et g les deux fonctions définies par : $f(x)=x^2-2x+2$ et $g(x)=\frac{x}{x-1}$

1) Tracer Les courbes représentatives $(C_f)$ et $(C_g)$ dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

2) Soit h la fonction définie par :

$h(x)=x^2-2x+2+\frac{x}{1-x}$

Etudier graphiquement le signe de : $h(x)$.

**Solutions :** 1) **a)** $f(x)=x^2-2x+2$

On a $f$ est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=2$

$\left(f(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2\times1}=1$ Et

$\beta=f(\alpha)=f(1)=(1)^2-2\times1+2=1$

Ainsi : dans le repère $(0;\vec{i};\vec{j})$ la courbe $(C_f)$ c'est une parabole de sommet $W(1;1)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

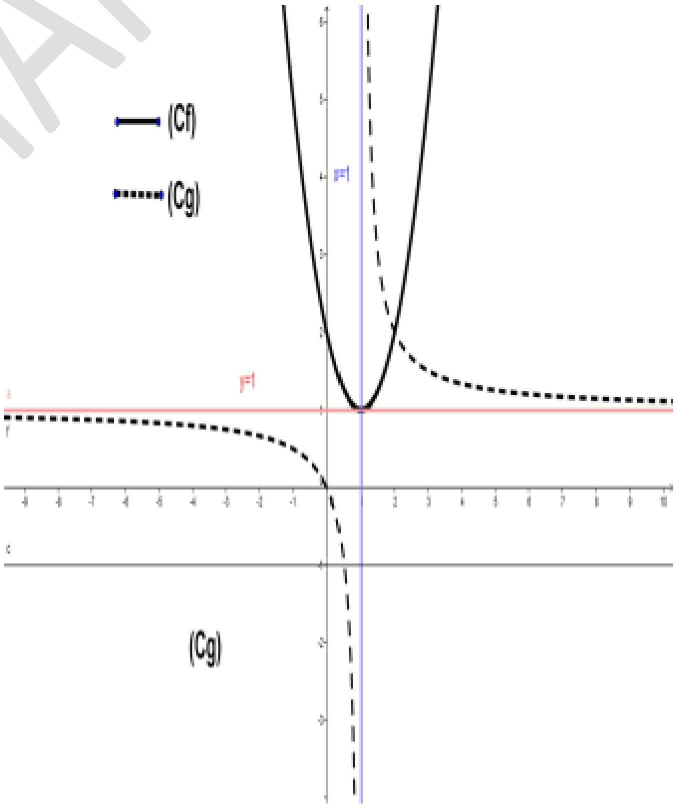
b) Méthode : (on utilisant le résumé de notre cours)

Si : $g(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ et $c\neq0$ alors $(C_g)$ est une hyperbole de centre $W\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\frac{d}{c}$ et $y=\frac{a}{c}$

Dans notre Exercice on a : $g(x)=\frac{x}{x-1}$ donc $(C_g)$ est une hyperbole de centre $W\left(\frac{1}{1};\frac{1}{1}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=\frac{1}{1}=1$ et $y=\frac{1}{1}=1$

D'où : Les courbes représentatives $(C_f)$ et $(C_g)$ sont données dans le repère ci-dessous

| x | -2 | -1 | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| g(x) | 1/3 | 1/2 | 0 | | 1 | 3/2 | 4/3 |




2) Etudions graphiquement le signe de $h(x)=x^2-2x+2+\frac{x}{1-x}$

On a : $h(x)=x^2-2x+2+\frac{x}{1-x}=x^2-2x+2-\frac{x}{x-1}$

Donc : $h(x)=f(x)-g(x)$

$h(x)\geq 0$ Equivaut à : $f(x)-g(x)\geq 0$ Equivaut à : $f(x)\geq g(x)$

Equivaut à : $x$ appartient à l'intervalle ou $(C_f)$ est au-dessus de $(C_g)$ donc :

| $x$ | $-\infty$ 1 | 2 $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h(x)$ | $+$ | $-$ 0 $+$ |

**Exercice57:** (***) Soit f une fonction tel que : $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **--2** | **-1** | **0** | **1** | **2** | 3 | 4 |
| 4/3 | 3/2 | 2 | | 0 | 1/2 | 2/3 |

Et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a)Montrer que : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ pour tout $x\in D_f$

b) Montrer que $(C_f)$ est une hyperbole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de f

c) Tracer la courbe $(C_f)$

2) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\succ 0$

3) Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

a) Montrer que la courbe $(C_g)$ c'est une parabole et déterminer ces éléments caractéristiques et le tableau de variations de g

b) Tracer la courbe $(C_g)$

c) Résoudre graphiquement l'inéquation : $\dfrac{g(x)}{f(x)}\succ 0$

($\alpha$ La solution de l'équation : $g(x)=f(x)$ n'est pas demandé de la déterminer)

**Solutions :** 1)a)on a $f(x)\in\mathbb{R}$ signifie que : $x-1\neq 0$

c'est-à-dire : $x\neq 1$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{1\}$

Montrons que : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

Soit $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ on a : $1-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1-1}{x-1}=\dfrac{x-2}{x-1}$

Donc : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$ Pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$

b) On utilisant le résumé de notre cours :

Rappelle : Si : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x+\alpha}$ alors $(C_f)$ est une hyperbole de centre $W(-\alpha;\beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=-\alpha$ et $y=\beta$

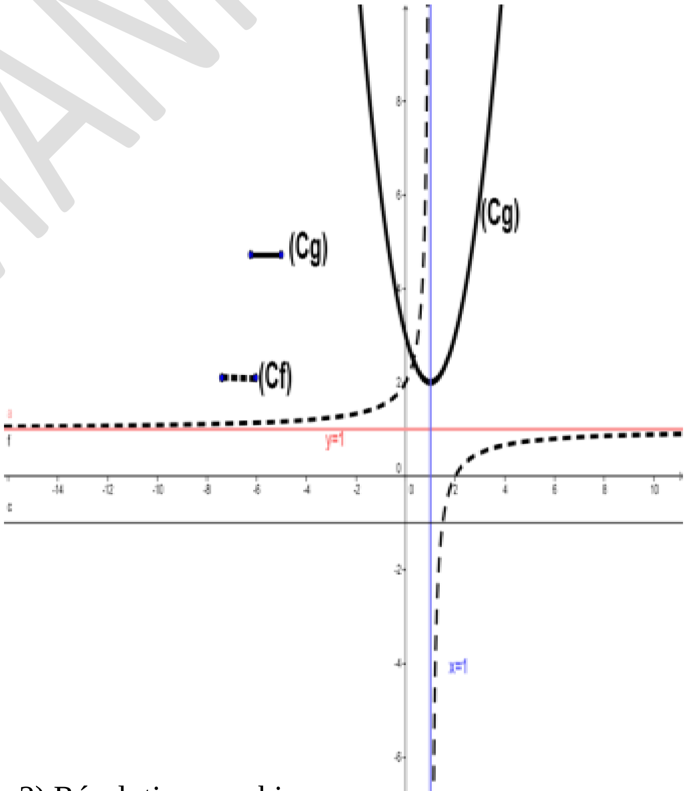
Dans notre exercice on a : $f(x)=1-\dfrac{1}{x-1}$

avec : $\alpha=-1$ et $\beta=1$ et $k=-1\prec 0$

Donc $(C_f)$ est une hyperbole de centre $W(1;1)$ et d'asymptotes les droites d'équations : $x=1$ et $y=1$ Le tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $\nearrow$ |

c) la courbe $(C_f)$ :




2) Résolution graphique de l'inéquation : $f(x)\succ 0$

$f(x)\succ 0$ Equivaut à : $x$ appartient à l'intervalle ou $(C_f)$ est au-dessus de l'axe des abscisses

Donc : $S=]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$

3 **a)** Soit g une fonction tel que : $g(x)=x^2-2x+3$

On a $g$ est une fonction polynôme donc : $D_g=\mathbb{R}$

On a : $a=1$ et $b=-2$ et $c=3$ $\left(g(x)=ax^2+bx+c\right)$

$\alpha=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2\times1}=1$ Et $\beta=g(\alpha)=g(1)=(1)^2-2\times1+3=2$

Ainsi : dans le repère $\left(0;\vec{i};\vec{j}\right)$ la courbe $\left(C_g\right)$

c'est une parabole de sommet $W'(1;2)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$

Le tableau de variations de g : $a=1\succ0$

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ |

c) Résolution graphique de l'inéquation :

$\frac{g(x)}{f(x)}\succ1$ Equivaut à : $\frac{g(x)}{f(x)}-1\succ0$

Equivaut à : $\frac{g(x)-f(x)}{f(x)}\succ0$

Donc : on a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | $\mu$ | | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)-f(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+$ | | $+$ | $-$ | $+$ | |
| quotient | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $+$ | |

Donc : $S=\left]-\infty;\mu\right[\cup\left]2;+\infty\right[$