MATHÉMATIQUE

Réussir aux concours de Maths d'entrée en un grand nombre d'écoles : (ENSA ; ENSAM ; EDECINE)

Toutes les astuces de Maths que vous avez besoin pour bien se préparer pour les concours

Préparé par : ATMANI NAJIB

Xriadiat

Résumé de cours pour une préparation complète (ENSA ; ENSAM ; EDECINE)
Préparer et réussir vos premiers mois de classe prépas.
Avec méthodes et astuces Remarques et conseils pratiques

- Des résumés de cours
- Plus de 300 énoncés d'exercices et QCM avec corrigés
- Des Méthodes et astuces et remarques et conseils à retenir
- Savoir-faire à maîtriser et des réflexes à avoir lors d'un concours

Préface du livre

Nous vous proposons un livre complet de maths, pour une préparation complète pour réussir l'épreuve de mathématique aux concours d'admission à un grand nombre d'écoles (ENSA ; ENSAM ; MEDECINE ; …)
Pour cela de nombreux QCM spécifiquement adaptés aux concours du programme de mathématiques ont été poser dans ce livre afin de vous aider à contrôler vos connaissances et à vous entrainer au mode d'interrogation des concours Postbac.
En début il y a des résumés des leçons et des rappels et des savoir-faire à maîtriser et des réflexes à avoir lors d'un concours suivi de QCM de base avec leurs corrigés ; les QCM proposés dans ce livre sont de deux types : des exercices issus de concours postbac afin d'apporter une préparation Efficace aux concours et des exercices d'un niveau supérieur pour les élèves désireux de se perfectionner.
Ce livre permet de faire le point sur nombreuses idées Reçues et véhiculer au lycée
Il comprend également l'essentiel du programme de bac que doivent maîtriser les lycéens des QCM et exercices d'entrainements permettent d'évaluer leurs connaissances ; les lycéens retrouveront aussi des méthodes et des réflexes qui les aideront.
Ce livre n'est Pas fait seulement pour la préparation au concours Postbac marocain
Mais aussi à préparer et réussir vos premiers mois de classe prépas.
En effet Vous allez entrer en classe prépa ou bien vous venez de commencer votre première année dans une école d'ingénieurs ce livre vous propose les outils de base du bac et Vous initier au raisonnement et découvriez à quoi ressemble le programme des classes prépas
Il contient des fiches et notions de cours pour réviser le programme et découvrir la prépa.
Les célèbres méthodes à connaitre, des « Vrai ou Faux » pour évaluer ses connaissances
des exercices corrigés pour s'entrainer à son rythme… Bref, ce qui vous attend vraiment à la rentrée prochaine.
C'est un ouvrage de révision et d'approfondissement conçu pour vous aider à bien démarrer votre prépa ; Un résumé de cours complet et très clair pour maitriser toutes les notions du lycée et des méthode facilement mémorisables pour acquérir le savoir-faire et les réflexes nécessaires et des exemples corrigés et variés et progressifs pour se familiariser avec
Des conseils pour découvrir de nouvelles notions et à apprendre à organiser son travail
Donc : bien Lire les méthodes et les réflexes afin de se préparer aux techniques utiles pour résoudre les exercices ; elles sont indispensables pour éclairer et illustrer le cours
L'ors de la résolution de chaque exercice lire tout l'énoncé et identifier les connexions possibles entre les questions il est important de se poser les questions :
Qu'est-ce qu'on demande ?
Comment ça se démontre ?
Quelles sont les informations dont je dispose ?
Pour préparer les concours il faut faire le sujet dans le temps imposé par l'énoncé et ne pas regarder le corrigé avant d'avoir fini de chercher ; cela fait partie du concours d'arriver à gérer le temps et à contrôler le stress et à être autonome ; ensuite regarde ton score et analyse-le enfin travaille sur tes points faibles en priorité
Enfin voici des Conseils Pour réussir son concours

- Conseil n°1 : Moins réviser, mais mieux réviser
- Conseil n°2 : Comprendre avant d'apprendre
- Conseil n°3 : Être ambitieux et élever son idéal
- Conseil n°4 : Se rappeler qu'un concours est un recrutement
- Conseil n°5 : Ne pas se comporter en élève
- Conseil n°6 : Être le grade que l'on vise dès sa préparation
- Conseil n°7 : Accepter de ne pas tout maîtriser
- Conseil n°8 : Tirer profit de ses erreurs et de ses échecs

L'auteur : ATMANI NAJIB

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de cours : bases de la logique et Les équations et les inéquations et systèmes

A) Propositions : Une proposition (ou assertion) est un énoncé mathématique qui a une et une seule valeur : vrai ou faux.

La **négation** de la proposition P est la proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse. Elle est notée non P.

Si P et Q sont deux propositions, P **et** Q est la proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont toutes les deux vraies.

Si P et Q sont deux propositions, P **ou** Q est la proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions Pou Q est vraie.

Les opérateurs non, et, ou, sont reliés par les formules suivantes : non (P et Q)=(non P) ou (non Q) ;
non (P ou Q)=(non P) et (non Q).

L'**implication** P⟹Q est la proposition non P ou Q.

Pour démontrer P⟹Q, on suppose que P est vraie et on démontre que Q est vraie.

La négation de la proposition P⟹Q est donc la proposition P et non Q.

On dit que les proposition P et Q sont **équivalentes** lorsque l'on a à la fois P⟹Q et Q⟹P qui sont vraies.
On note alors P⟺Q.

La **contraposée** de la proposition P⟹Q est la proposition non Q ⟹ non P.

Les deux propositions P⟹Q et non Q⟹ non P sont équivalentes.

L'une est vraie si et seulement si l'autre est vraie.

B) Quantificateurs : Le quantificateur pour tout ou quel que soit est noté ∀.

La proposition ∀ x ∈ E, P(x) est vraie lorsque, pour tout x ∈ E, la proposition P(x) est vraie.

Le quantificateur il existe (au moins un) est noté ∃. La proposition ∃x∈E, P(x) est vraie lorsqu'il existe au moins un x∈E telle que la proposition P(x) soit vraie.

Le quantificateur il existe un unique est noté ∃!. La proposition ∃!x∈E, P(x)est vraie lorsqu'il existe un unique x∈E telle que la proposition P(x) soit vraie.

La négation de ∀x∈E, P(x) est ∃x∈E, non P(x).

La négation de ∃x∈E, P(x) est ∀x∈E, non P(x).

C)Conditions nécessaires, conditions suffisantes :

Lorsque P⟹Q, on dit que P est une **condition suffisante** à Q, et que Q est une **condition nécessaire** à P.

D)Méthodes de raisonnement :

- Par **implication :** pour prouver que P⟹Q, on suppose que Pest vraie et on utilise différentes propriétés déjà connues pour établir que Q est vraie.
- Par **double implication / par équivalence :** Pour démontrer que P⟺Q, il y a deux méthodes standard :
  - On raisonne par double implication : on suppose d'abord que P est vraie, et on démontre que Q est vraie. Ensuite, on suppose que Q est vraie, et on démontre que P est vraie.
  - On passe de P à Q en utilisant uniquement des équivalences. C'est une méthode souvent déconseillée, car il faut faire très attention à ce que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence.
- Par **contraposée :** pour démontrer que P⟹Q, il suffit de démontrer la contraposée de cette proposition, c'est-à-dire non Q ⟹ non P.
- Par **l'absurde :** pour démontrer que P⟹Q, on peut supposer que P et non Q sont toutes les deux vraies, et obtenir une contradiction

Pour démontrer que P est vraie, on peut supposer que non P est vraie et obtenir une contradiction.

- Par **récurrence** : Le raisonnement par récurrence est utilisé pour démontrer des propriétés qui dépendent d'un entier n. Il est basé sur le principe suivant :

Théorème (principe de récurrence) : Soit P(n) une propriété concernant un entier naturel n. Si P (0) est vraie et que, pour tout entier naturel k, si P(k) est vraie, alors P(k+1) est vraie.

Alors la propriété P(n) est vraie pour tout entier naturel n.

- Par **disjonction de cas** : le raisonnement par disjonction de cas s'utilise quand on veut démontrer une propriété P dépendant d'un paramètre x appartenant à un ensemble E, et que la justification dépend de la

valeur de x. On écrit alors $E=E_1\cup\cdots\cup E_n$ et on sépare les raisonnements suivant que $x\in E_1$, $x\in E_2$,…,…. On emploie fréquemment ce raisonnement pour résoudre des (in)équations avec des valeurs absolues (le raisonnement dépend du signe de la quantité à l'intérieur de la valeur absolue), démontrer des propriétés en arithmétique (on sépare le raisonnement suivant la parité de certains entiers, leur congruence modulo n.…), résoudre des problèmes de géométrie (disjonction selon la position relative de deux objets géométriques).

- **Par analyse/synthèse** : le raisonnement par analyse/synthèse, qu'on pourrait aussi appeler raisonnement par condition nécessaire/condition suffisante, est un raisonnement que l'on emploie souvent lorsqu'on cherche toutes les solutions d'un problème donné. Il comporte deux phases :

➢ **L'analyse.** On suppose que x est solution du problème, et on trouve un certain nombre de conditions nécessaires satisfaites par x.

➢ **La synthèse.** On vérifie que les conditions obtenues à l'issue de la phase d'analyse sont en fait également suffisantes pour que x soit solution du problème.

Exemple1 : Donner la négation et la valeur de vérité de la proposition suivante.

$P:(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2=0$

Solution : $\overline{P}:(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R}): x^2-xy+y^2\neq 0$

En posant : $x=1$ on aura : $1-y+y^2$ c a d y^2-y+1

$\Delta=(-1)^2-4=-3\prec 0$ Donc : $y^2-y+1\succ 0$ donc : $y^2-y+1\neq 0$

Donc La proposition $\overline{P}$ est vraie donc P est fausse

E) Les équations et les inéquations et systèmes

1)Résolution d'une équation du second degré a une inconnue dans $\mathbb{R}$

a) Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2=a$ (Dépendent du signe de : a)

- Si a < 0, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si a = 0, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- Si a > 0, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

b) Soit le du trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$.

✓ Le trinôme peut s'écrire sous la forme dite la forme canonique : $ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$

c) Soit l'équation : (E) : $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$ et soit $\Delta=b^2-4ac$ son discriminant

- Si Δ < 0 : L'équation (E) n'a pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$

Et on ne peut pas factorisée le trinôme ax^2+bx+c

- Si Δ = 0 : L'équation (E) a une seule solution (dite double) : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ c a d : $S=\{x_0\}$ et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

- Si Δ > 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

d) Soit le trinôme ax^2+bx+c tel que son discriminant $\Delta>0$.

Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors : $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ et $x_1\times x_2=\dfrac{c}{a}$

e) Le système : $(I)\begin{cases}x+y=s\\x\times y=p\end{cases}$ où les s , p sont des réels donnés admet une solution dans $\mathbb{R}^2$ ssi $s^2-4p\geq 0$ et dans ce cas x , y sont solutions de l'équation $x^2-sx+p=0$

f) <u>Le discriminant réduit d'un trinôme :</u> Soit le trinôme ax^2+bx+c

Si b est pair c a d : $b=2b'$ on parle du discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ et on a :

- Si $\Delta'<0$: pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$
- Si $\Delta'=0$: L'équation a une seule solution (dite double) : $x_0=-\frac{b'}{a}$.
- Si $\Delta'>0$: L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Complément sur les trinômes : On considère le trinôme : $P(x)=ax^2+bx+c$

Si : $a+b+c=0$ alors : $x_1=1$ et $x_2=\frac{c}{a}$ sont les racines de $P(x)$

Si : $a+c=b$ alors : $x_1=-1$ et $x_2=-\frac{c}{a}$ sont les racines de $P(x)$

2) Résolution d'Inéquation du second degré a une inconnue.

➢ Si $\Delta>0$ le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire de a entre les racines

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de de a	

➢ Si $\Delta<0$: le trinôme ax^2+bx+c est du signe de : a

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	

Si $\Delta=0$: le trinôme ax^2+bx+c est du signe de : a

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

3)La Méthode des déterminants pour résoudre un système : $(I)\begin{cases}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{cases}$

$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\a' & b'\end{vmatrix}=ab'-a'b$: s'appelle le déterminant du système (I)

a) Si $\Delta\neq 0$ alors le système (I) admet un couple solution unique : $x=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta}$; $y=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}$

b) Si $\Delta=0$ alors :

✓ Si $\Delta_x=\begin{vmatrix}c & b\\c' & b'\end{vmatrix}=0$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix}a & c\\a' & c'\end{vmatrix}=0$ alors : les deux équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi : $ax+by=c$ et alors on a : $S=\left\{\left(x;\frac{c-ax}{b}\right)/\,x\in\mathbb{R};b\neq 0\right\}$

✓ Si $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ alors le système (I) n'admet aucun couple solutions et donc $S=\varnothing$

4)LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES. $k\in\mathbb{Z}$

a) $\cos x=\cos x_0\Leftrightarrow x=x_0+2k\pi$ ou $x=-x_0+2k\pi$

b) $\sin x=\sin x_0\Leftrightarrow x=x_0+2k\pi$ ou $x=\pi-x_0+2k\pi$ c) $\tan x=\tan x_0\Leftrightarrow x=x_0+k\pi$

Prof : ATMANI NAJIB

5)LES EQUATIONS du troisième degré : Si α est solution de l'équation : $ax^3+bx^2+cx+d=0$ et $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

a) $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$ et par la division euclidienne : on trouve $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

b) On a : $P(x)=(x-\alpha)\left(ax^2+(\alpha a+b)x-\frac{d}{\alpha}\right)$

c) Si α et β et δ trois solutions de : $ax^3+bx^2+cx+d=0$ alors : $\alpha\times\beta\times\delta=-\frac{d}{a}$

6) Identités Remarquables : $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ 4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

5) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ Somme de deux cubes

6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ Cube d'une Somme

7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ Cube d'une différence

<u>Factoriser</u> c'est écrire sous la forme d'un produit

Ces formules sont pour développer et pour factoriser

7) Valeur absolue : Si $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}^*$ et $a\in\mathbb{R}^+$

a) Si $x\geq 0$ alors $|x|=x$ et Si $x\leq 0$ alors $|x|=-x$

b) $|x|\geq 0$; $|-x|=|x|$; $|x^2|=|x|^2=x^2$; $-|x|\leq x\leq|x|$ $\sqrt{x^2}=|x|$; $|x\times y|=|x|\times|y|$; $\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{|y|}$

si $y\neq 0$ et $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$; $|x+y|\leq|x|+|y|$ (Inégalité du Triangle)

c) $|x|=a$ Équivaut à dire que : $x=a$ ou $x=-a$

d) $|x|=|y|$ Équivaut à dire que : $x=y$ ou $x=-y$

e) $|x|=0$ équivaut à dire que : $x=0$

Exemple : 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) : $|2x^2-x-6|-|x+1|-1=0$ (1)

2)Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (2) : $\sqrt{3x+4}=x$

Solution : 1) On résout d'abord les Equations : $x^2-x-6=0$ et $x+1=0$

Les solutions de l'équation : $2x^2-x-6=0$ dans $\mathbb{R}$ sont : 2 et $\frac{-3}{2}$.

l'équation $x+1=0$ admet unique solution : -1

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		-1		2		$+\infty$
$2x2-x-6$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

<u>Premier cas :</u> si $x\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ alors $|2x^2-x-6|=2x^2-x-6$ et $|x+1|=-x-1$

Donc l'équation (1) devient : $(1)\Leftrightarrow 2x^2-x-6+x+1-1=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-6=0\Leftrightarrow x^2=3\Leftrightarrow x=-\sqrt{3}$ *ou* $x=\sqrt{3}$

et comme : $\sqrt{3}\notin\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ et $-\sqrt{3}\in\left]-\infty;\frac{-3}{2}\right]$ Donc $S_1=\{-\sqrt{3}\}$

<u>Deuxième cas :</u> si $x\in\left[-\frac{3}{2};-1\right]$ alors $|2x^2-x-6|=-(2x^2-x-6)$ et $|x+1|=-x-1$

Donc l'équation (1) devient : $(1)\Leftrightarrow -2x^2+x+6+x+1-1=0 \Leftrightarrow -2x^2+2x+6=0$; $\Delta=4+24=28\succ 0$

L'équation admet deux solutions distinctes : $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ et $x'=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ et comme : $x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}\notin\left[-\frac{3}{2};-1\right]$

Donc : $S_2=\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$

<u>3ième cas :</u> si $x\in[-1;2]$; Alors $|2x^2-x-6|=-(2x^2-x-6)$ et $|x+1|=x+1$

Donc l'équation (1) devient : $(1)\Leftrightarrow -2x^2+x+6-x-1-1=0 \Leftrightarrow 4-2x^2=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}\notin[-1;2]$

Donc : $S_3=\{\sqrt{2}\}$

<u>4ième cas :</u> si $x\in[2;+\infty[$ Alors $|2x^2-x-6|=2x^2-x-6$ et $|x+1|=x+1$

Donc l'équation (1) devient : $(1)\Leftrightarrow 2x^2-x-6-x-1-1=0 \Leftrightarrow 2x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow x^2-x-4=0$

$\Delta=17\succ 0$; L'équation admet deux solutions distinctes : $x=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$ et $x'=\frac{1-\sqrt{17}}{2}\notin[2;+\infty[$ Donc :

$S_4=\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'Equation (1) est :

$$S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4=\left\{-\sqrt{3};\frac{1-\sqrt{13}}{2};\sqrt{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

2) On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation (2): $\sqrt{3x+4}=x$; On cherche l'ensemble de définition de l'équation (2)

$$D_2=\{x\in\mathbb{R}/3x+4\geq 0\}=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq-\frac{4}{3}\right\}=\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$$

Soit $x\in\left[-\frac{4}{3};+\infty\right[$; $\sqrt{3x+4}=x\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=x^2$ *et* $x\geq 0\Leftrightarrow 3x+4=x^2$ *et* $x\geq 0\Leftrightarrow -x^2+3x+4=0$ *et* $x\geq 0$

Comme : $\Delta=9-4\times(-1)\times 4=25\succ 0$ L'équation admet deux solutions distinctes : $x=\frac{-3+\sqrt{25}}{-2}=-1$ et

$x'=\frac{-3-\sqrt{25}}{-2}=4$ et comme : $-1\prec 0$ *et* $4\succ 0$ Donc l'ensemble des solutions de L'équation (2) est : $S=\{4\}$

Q01 : Concours de Médecine et pharmacie Oujda

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$x+\frac{x}{1+2}+\frac{x}{1+2+3}+\frac{x}{1+2+3+4}+\ldots+\frac{x}{1+2+3+..+4041}=4041$$ est ;

A ☐ $S=\{2018\}$ **B** ☐ $S=\{2019\}$ **C** ☐ $S=\{2020\}$ **D** ☐ $S=\{2021\}$ **E** ☐ $S=\{2022\}$

Solution :

$$\Leftrightarrow x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{3(3+1)}{2}}+\frac{1}{\frac{4(4+1)}{2}}+\ldots+\frac{1}{\frac{4041(4041+1)}{2}}\right)=4041\Leftrightarrow x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3\times 4}+\frac{2}{4\times 5}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}\right)=4041$$

Prof: ATMANI NAJIB

$\Leftrightarrow x\left(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+...+\frac{2}{n(n+1)}\right)=4041 \Leftrightarrow x\left(1+\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+...+\frac{1}{4041\times4042}\right)\right)=4041$

On a aussi : $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{n+1}{n(n+1)}-\frac{n}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$\Leftrightarrow x\left(1+\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{4041}-\frac{1}{4042}\right)\right)=4041 \Leftrightarrow x\left(1+\frac{1}{3}+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4042}\right)\right)=4041$

$\Leftrightarrow x\left(2-\frac{2}{4042}\right)=4041 \Leftrightarrow 2x\left(1-\frac{1}{4042}\right)=4041 \Leftrightarrow 2x\left(\frac{4041}{4042}\right)=4041 \Leftrightarrow x=2021$

$\Rightarrow$ **D** ☐ la bonne réponse

<u>Q02 :</u> Concours ENSA 2015

Soit le réel : $\lambda=\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}-\sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$ en calculant λ^3 ; montrer que

A ☐ $\lambda=0$ **B** ☐ $\lambda=1$ **C** ☐ $\lambda=2$ **D** ☐ $\lambda=3$

Solution : On pose : $a=\sqrt{9+\frac{125}{27}}$; $\lambda=\sqrt[3]{3+a}-\sqrt[3]{-3+a}$

$\lambda^3=\left(\sqrt[3]{3+a}-\sqrt[3]{-3+a}\right)^3=\left(\sqrt[3]{3+a}\right)^3+3\sqrt[3]{3+a}\times\left(\sqrt[3]{-3+a}\right)^2-3\left(\sqrt[3]{3+a}\right)^2\times\sqrt[3]{-3+a}-\left(\sqrt[3]{-3+a}\right)^3$

$\lambda^3=\left(\sqrt[3]{3+a}-\sqrt[3]{-3+a}\right)^3=3+a+3\sqrt[3]{3+a}\sqrt[3]{-3+a}\times\left(\sqrt[3]{-3+a}-\sqrt[3]{3+a}\right)-(-3+a)$

$\lambda^3=6+3\sqrt[3]{(3+a)(-3+a)}\times(-\lambda)\Leftrightarrow\lambda^3=6-3\lambda\sqrt[3]{a^2-9}\Leftrightarrow\lambda^3=6-3\lambda\sqrt[3]{9+\frac{125}{27}-9}\Leftrightarrow\lambda^3=6-3\lambda\sqrt[3]{\frac{5^3}{3^3}}$

$\Leftrightarrow\lambda^3=6-5\lambda\Leftrightarrow\lambda^3+5\lambda-6=0$ On remarque que 1 est une racine évidente de : $\lambda^3+5\lambda-6$

C'est fini pour le concours : $\lambda=1$ $\Rightarrow$ On doit donc cocher **B**☒ : car une seule réponse est vraie

On peut continuer par La division euclidienne de : $\lambda^3+5\lambda-6$ par $\lambda-1$ qui donne :

$\lambda^3+5\lambda-6=(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+6)$

$\lambda^3+5\lambda-6=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+6)=0\Leftrightarrow\lambda-1=0\ ou\ \lambda^2+\lambda+6=0\Leftrightarrow\lambda=1\ ou\ \lambda^2+\lambda+6=0$;

$\Delta=1-4\times6\times1=-23\prec0$ (pas de solution) par suite : $\lambda=1$

<u>Q03 :</u> Concours ENSAM 2016. Casablanca Meknès

Soient le disque unité : : $D=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2/x^2+y^2\leq1\}$ et la proposition P :" $\exists A,B\subset\mathbb{R}$; $D=A\times B$ " Alors :

A ☐ $(1;0)\in D$ *et P est vraie* **B** ☐ $(0;1)\in D$ *et P est vraie*

C ☐ *P est Fausse* **D** ☐ *Aucune des trois réponse*

Solution : $(1;0)\in D$ *et* $(0;1)\in D$ car : $1^2+0^2\leq1$ et $0^2+1^2\leq1$

Supposons : P: est vraie alors $\exists A,B\subset\mathbb{R}$; $D=A\times B$ "

On a : $(1;0)\in D$ et $D=A\times B$ donc : $1\in A$

On a : $(0;1)\in D$ et $D=A\times B$ donc : $1\in B$ et par suite : $(1;1)\in A\times B$

et puisque : $D=A\times B$ " alors : $(1;1)\in D$ absurde car : $1^2+1^2=2>1$

P: Est fausse et par suite : On doit donc cocher **C**☒

Prof: ATMANI NAJIB

Q04 : Préparation Concours ENSA

Répondre en cochant les propositions justes

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère les énoncés suivants :

P : « Il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ ».

Q : « Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est paire ».

R : « f est paire ou f est positive sur $\mathbb{R}$ ».

Alors :

A ☐ La négation de P peut s'écrire : « Il existe $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ ».

B ☐ La négation de Q peut s'écrire : « Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f n'est pas paire ».

C ☐ La négation de Q peut s'écrire : « Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est impaire ».

D ☐ La négation de R peut s'écrire : « f n'est pas paire ou f n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ ».

E ☐ La négation de R peut s'écrire : « f n'est pas paire et f est négative sur $\mathbb{R}$ ».

Solution :

La négation de P peut s'écrire : « $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ ».

Q : « Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est paire ».

Peut s'écrire aussi : Q : « f est continue sur $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ f est paire ».

La négation de la proposition U$\Longrightarrow$V ' est la proposition 'U et non V'.

La négation de Q peut s'écrire : « f est continue sur $\mathbb{R}$ et f n'est pas paire ».

La négation de R peut s'écrire : « f n'est pas paire et f n'est pas positive sur $\mathbb{R}$ ».

Donc : Toutes les propositions sont fausses

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de Cours : Fonction Limite et continuité

A) Domaine de définition : 1) $\overline{\neq 0}$; $\sqrt{\geq 0}$; $\frac{\dots}{\sqrt{\succ 0}}$; $\ln(\succ 0)$; $\sqrt[n]{\geq 0}$

2)Soient les fonctions f et g alors : $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \ et \ f(x)\in D_g\}$

Exemple : Soient les fonctions f et g définies par : $f(x)=3x+4$ et $g(x)=\frac{1}{x+1}$

1) Déterminer $D_{g\circ f}$ 2) Déterminer : $(g\circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \ et \ f(x)\in D_g\}$

On a $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ donc $D_{g\circ f}=\{x\in\mathbb{R}/x\in\mathbb{R} et f(x)\neq -1\}$

$f(x)=-1\Leftrightarrow 3x+4=-1\Leftrightarrow 3x=-5\Leftrightarrow -\frac{5}{3}=x$ Donc : $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

2)On a : $D_f=\mathbb{R}$ et $D_g=\mathbb{R}-\{-1\}$ et $D_{g\circ f}=\mathbb{R}-\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x+4)=\frac{1}{3x+4+1}$ C'est-à-dire : $(g\circ f)(x)=\frac{1}{3x+5}$

Q05 : Concours de Médecine et pharmacie et Dentaire

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x-2}{\ln(x+1)}$.

Le domaine de définition de f est : **A** ☐ $D_f=]-1,+\infty[$ **B** ☐ $D_f=]0,2[\cup]2,+\infty[$

C ☐ $D_f=]-1,0[\cup]0,+\infty[$ **D** ☐ $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ **E** ☐ $D_f=]0,+\infty[$

Solution : Methode1 : (par élimination des réponses)

$f(2)=\frac{2-2}{\ln(2+1)}=\frac{0}{\ln 3}=0\in\mathbb{R}\Rightarrow$ **B** ☐ $D_f=]0,2[\cup]2,+\infty[$ Faux

$0\in]-1,+\infty[$ et $f(0)=\frac{0-2}{\ln(0+1)}=\frac{0-2}{\ln 1}\notin\mathbb{R}\Rightarrow$ **A** ☐ $D_f=]-1,+\infty[$ Faux

$-2\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et $f(-2)=\frac{-2-2}{\ln(-2+1)}=\frac{-4}{\ln -1}\notin\mathbb{R}\Rightarrow$ **D** ☐ $D_f=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ Faux

$f(-\frac{1}{2})=\frac{-\frac{1}{2}-2}{\ln\left(-\frac{1}{2}+1\right)}=\frac{-\frac{1}{2}-2}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\in\mathbb{R}\Rightarrow -\frac{1}{2}\in D_f\Rightarrow$ **E** ☐ $D_f=]0,+\infty[$ Faux

Donc : il reste : **C** ☐ $D_f=]-1,0[\cup]0,+\infty[\Rightarrow$ **C** ☐ la bonne réponse

Methode2 : $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+1>0 \ et \ln(x+1)\neq 0\}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x>-1 \ et \ x+1\neq 1\}=\{x\in\mathbb{R}/x>-1 \ et \ x\neq 0\}=]-1,0[\cup]0,+\infty[$

Q06 : Concours de Médecine et pharmacie et Dentaire

Le domaine de définition de la fonction numérique f définie par : $f(x)=\frac{1}{x-1}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est égale à : A

☐ $]-1;1[\cup]1;+\infty[$ B ☐ $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ C ☐ $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

D ☐ $]-\infty;-1[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$ **E** ☐ $]-1;1[$

Solution : Methode1(par élimination des réponses)

Prof : ATMANI NAJIB

$1 \in]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ et $f(1) = \frac{1}{1-1} ln\left(1+\frac{1}{1}\right)$ n'existe pas : donc : **B** ☐ Faux

$0 \in]-1;1[\cup]1;+\infty[$ et $f(0) = \frac{1}{0-1} ln\left(1+\frac{1}{0}\right)$ n'existe pas : donc : **A** ☐ Faux

$0 \in]-1;1[$ et $f(0) = \frac{1}{0-1} ln\left(1+\frac{1}{0}\right)$ n'existe pas : donc : **E**☐ Faux

$\frac{1}{2} \notin]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}-1} ln\left(1+\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = -2\,ln(3)$ existe: donc : **C**☐ Faux

On doit donc cocher **D** ☒

Methode2 : $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x+\frac{1}{x} \succ 0 \ et \ \ x-1 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x} \succ 0 \ et \ \ x \neq 1\right\}$

En dressant un tableau de signe de : $\frac{x+1}{x}$ avec : $x \neq 1$

On trouve que : **D** ☒ est la bonne réponse

<u>Q07.</u> Concours de Médecine et pharmacie et Dentaire 2023-2024

Le domaine de définition de la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x}{\sqrt{4-(ln\,x)^2}}$. **est :**

☐ $]-\infty;e^2[$ ☐ $]e^2;+\infty[$ ☐ $]e^{-2};e^2[$ ☐ $]0;e^2[$ ☐ $D_f = \mathbb{R}^+$

<u>Solution :</u> $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / 4-(\ln x)^2 \succ 0 \ et \ \ x \succ 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / (2-\ln x)(2-\ln x) \succ 0 \ et \ \ x \succ 0\right\}$

$2-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq \ln x \Leftrightarrow e^2 \geq x$ **et** $2+\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq e^{-2}$

Tableau de signe :

x	0		e^{-2}		e^2		$+\infty$
$2-lnx$		$+$		$+$	0	$-$	
$lnx+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-lnx)(lnx+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$D_f =]e^{-2};e^2[$

<u>Q08.</u> Concours de Médecine et pharmacie et Dentaire 2023-2024

Soient f et g deux fonctions réelles telle que : $f(x) = ln(x-1)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

Le domaine de définition de : $g \circ f$ est égale à : **A** ☐ $[-1;+\infty[$ **B** ☐ $]1;+\infty[$

C ☐ $\left[1+\frac{1}{e};+\infty\right[$ **D** ☐ $]e;+\infty[$ **E** ☐ $]-e;+\infty[$

<u>Solution :</u> On a : $D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \ et \ \ f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x-1 > 0 \ et \ \ f(x) \geq -1\right\}$

$D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} / x > 1 \ et \ \ \ln(x-1) \geq -1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x > 1 \ et \ \ x-1 \geq e^{-1}\right\}$

$D_{g\circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} / x > 1 \ et \ \ x \geq \frac{1}{e}+1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x \geq \frac{1}{e}+1\right\} = \left[\frac{1}{e}+1;+\infty\right[$ **C** ☒ est la bonne réponse

B) Quelques Propriétés de limites :

1) Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

Prof : ATMANI NAJIB

2)Si $g(x) \le f(x) \le h(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

3)Si $\forall x \in I : |f(x) - l| \le u(x)$ et $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$

Si $\forall x \in I : |f(x)| \le u(x)$ et $\lim_{x\to +\infty} u(x) = 0$ alors $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

4)Si $f \le g$ sur un intervalle pointé de centre a alors $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$

5)Si on a : $g(x) \le f(x) \le h(x)$ et si $\lim_{x\to a} g(x) = l$ et $\lim_{x\to a} h(x) = l$ alors $\lim_{\substack{x\to a \\ x\succ a}} f(x) = l$

6)Si on a : $u(x) \le v(x)$ et $\lim_{x\to a^+} u(x) = +\infty$ alors : $\lim_{x\to a^+} v(x) = +\infty$

7)Si on a : $u(x) \le v(x)$ et $\lim_{x\to a^+} v(x) = -\infty$ alors : $\lim_{x\to a^+} u(x) = -\infty$

8) Les formes indéterminées : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\times\infty$; $+\infty-\infty$; 0^0; $1^{+\infty}$

C)Limites des fonctions usuelles et autre : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

1) $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$ 2) $\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$ 3) $\lim_{x\to a} \tan x = \tan a$ 4) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 5) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$ 7) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$ 8) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ 9) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2} = \frac{a^2}{2}$ 10) $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$

11) $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$ 12) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ 13) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ 14) $\lim_{x\to -\infty} xe^x = 0^-$ 15) $\lim_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$

16) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ 17) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax} - 1}{x} = a$ 18) $\lim_{x\to +\infty} lnx = +\infty$ 19) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ 20) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

21) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ 22) $\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$ 23) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ 24) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ 25) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(ax+1)}{x} = a$

26) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{P(x)} = \mp\infty$ 27) $\lim_{x\to -\infty} P(x)e^x = 0$ 28) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$ 29) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+ax+b} - \left(x+\frac{a}{2}\right) = 0$

30) $\lim_{x\to a} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ si $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ 31) $\lim_{x\to a} \frac{\tan u(x)}{u(x)} = 1$ si $\lim_{x\to a} u(x) = 0$

32) $\lim_{x\to a} \frac{1-\cos u(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{2}$ si $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ 33) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ 8) $\lim_{x\to a} \frac{1-\cos u(x)}{u(x)} = 0$ si $\lim_{x\to a} u(x) = 0$

34) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln P(x)}{Q(x)} = 0$ *si* $\lim_{x\to +\infty} P(x) = +\infty$ *et* $\deg Q \ge 1$

35) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{P(x)}}{Q(x)} = \mp\infty$ *si* $\lim_{x\to +\infty} P(x) = +\infty$ *et* $\deg Q \ge 1$

36) $\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$

D) Quelques techniques usuelles pour lever l'indéterminations :

1)Mise en facteur du terme prépondérant ou Utilisation d'une quantité conjuguée ou utilisation d'un taux d'accroissement

2) Utilisation de la règle de l'hôpital :si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ alors : $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Exemple1 : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$; Exemple2 : $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\pi\cos(\pi x)}{1} = \pi\cos(\pi) = -\pi$

Prof: ATMANI NAJIB

3) La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ $(-\infty)$ est la limite de son plus grand terme
4) La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ $(-\infty)$ est la limite du rapport des termes de plus grand degré

5) Règle des équivalences : On dira que : f est équivalente a f au voisinage de x_0 si : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ **;** On note : $f(x)\underset{x_0}{\simeq}g(x)$ **ou** $f(x)\underset{x_0}{\sim}g(x)$

$\sin X\underset{o}{\simeq}X$;; $\arctan X\underset{o}{\simeq}X$; $e^X-1\underset{o}{\simeq}X$; $\ln(X+1)\underset{o}{\simeq}X$

$(1+X)^\alpha\underset{o}{\simeq}1+\alpha X$; $\sqrt{1+X}\underset{o}{\simeq}1+\frac{1}{2}X$; $\frac{1}{1+X}\underset{o}{\simeq}1-X$; $\frac{1}{\sqrt{1+X}}\underset{o}{\simeq}1-\frac{1}{2}X$

***5)** Règle des équivalences sur les suites :*

si : $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ alors : $\sin u_n\underset{n\to+\infty}{\simeq}u_n$; $\arctan u_n\underset{n\to+\infty}{\simeq}u_n$; $e^{u_n}-1\underset{n\to+\infty}{\simeq}u_n$; $\ln(u_n+1)\underset{n\to+\infty}{\simeq}u_n$;

$(1+u_n)^\alpha-1\underset{n\to+\infty}{\simeq}\alpha u_n$; $\sqrt{1+u_n}\underset{n\to+\infty}{\simeq}1+\frac{1}{2}u_n$; $\frac{1}{1+u_n}\underset{n\to+\infty}{\simeq}1-u_n$; $\frac{1}{\sqrt{1+u_n}}\underset{n\to+\infty}{\simeq}1-\frac{1}{2}u_n$

Exemple1 : *calculer* $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+1}}\right)$ *:*

$$u_n=n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right)=\frac{1}{2}n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\frac{1}{2}n\ln\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)=\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$

Comme : $\frac{2}{n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$; $\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\underset{n\to+\infty}{\simeq}\frac{2}{n-1}\underset{n\to+\infty}{\simeq}\frac{2}{n}$ *donc :* $u_n\underset{n\to+\infty}{\simeq}\frac{n}{2}\times\frac{2}{n}=1$

$$\lim_{n\to+\infty}n\ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+1}}\right)=1$$

6)a) Règle des croissances comparée : ALPES : $\prec\prec$ *(négligeable devant)*

On note : $f\prec\prec g$ *au voisinage et on lit* f *est négligeable devant g au voisinage de a si :* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f}{g}=0$

ALPES : A=Arctan, Arcsin, Arccos, Argth, Argsh, Argch
L=Logarithmes
P=Polynômes
E=Exponentielles
S=Sin, cos, tan, sh, ch, th

$\boldsymbol{A\prec\prec L\prec\prec P\prec\prec E\prec\prec S}$

Remarque : $x^{\frac{1}{2}}\prec\prec x\prec\prec x^2\prec\prec x^{2023}$ *Aux voisinages de :* $+\infty$

Exemples : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7-x+5}{1-2x^5+5x}+3x^2-8x+5=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7}{-2x^5}+x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{2}+3x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x}=2$ *Rem :* $\sqrt{x^2}=|x|$ *et* $\sqrt[4]{x^4}=|x|$ *et* $\sqrt[5]{x^5}=x$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{5-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{-x}}=-....=-\infty$ *car* $x^{\frac{1}{3}}\prec\prec x$

Remarque : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(1)}{(2)}=\pm\infty$ *si* $(1)\succ\succ(2)$ *et* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(1)}{(2)}=0$ *si* $(2)\succ\succ(1)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^{\frac{2}{3}}}=+\infty$ *car* $x^{\frac{2}{3}}\prec\prec x$

Prof : ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{2-x^3}+2x=\lim_{x\to-\infty}-x+2x=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}+\frac{3x^3-x+2}{x^2+x+3}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2}+\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to\infty}-x+3x=\lim_{x\to-\infty}2x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{2}{3}}=+\infty \quad car\ \frac{1}{2}\prec\frac{2}{3}\ en\ effet\ 6\times\frac{1}{2}\prec 6\times\frac{2}{3}\ et\ donc:\ x^{\frac{1}{2}}\prec\prec x^{\frac{2}{3}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+1}-3\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3}-3\sqrt[4]{x^4}+\sqrt{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x-3x+x=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2+2023}-2\sqrt{x^2-5x+2024}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x^{\frac{2}{3}}+2x^1=\lim_{x\to-\infty}2x^1=-\infty\ car\ x^{\frac{2}{3}}\prec\prec x^1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^4-x^3+2020}-\sqrt[4]{x^3+x+2021}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[5]{x^4}-\sqrt[4]{x^3}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{5}}-x^{\frac{3}{4}}=\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{5}}=+\infty\ car\ x^{\frac{3}{4}}\prec\prec x^{\frac{4}{5}}$$

En effet : $\frac{3}{4}\prec\frac{4}{5}$ *car* $20\times\frac{3}{4}\prec 20\times\frac{4}{5}$

b) $(\ln x)^{\alpha}\prec\prec x^{\frac{1}{2}}\prec\prec x\prec\prec x^2\prec\prec x^{2023}\prec\prec\left(e^x\right)^{\beta}$ *avec :* $\alpha;\ \beta$ *strictement positifs*

Exemple1 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{2014}}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ *car* $(\ln x)^{2024}\prec\prec x^2$

Exemple2 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)^2}{x^{2024}}=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x\right)^2=+\infty$ *car* $x^{2024}\prec\prec\left(e^x\right)^2$ *Exemple3 :* $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{2025}-x=\lim_{x\to+\infty}-x=-\infty$

Exemple4 : $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{2030}-e^x=\lim_{x\to+\infty}-e^x=-\infty$ *Exemple5:* $\lim_{x\to+\infty}\frac{-8\sqrt[12]{e^x}}{x^{2024}}=-\infty$ *car* $x^{2024}\prec\prec\left(e^x\right)^2$

Exemple6 : $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{5}}}{\ln\left(x^{2024}+x+6\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{5}}}{\ln\left(x^{2024}\right)}=+\infty$ *Exemple7 :* $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2030}+\ln\left(3x^{2001}-2\right)}{\sqrt[15]{e^x-7}-x^{2030}(\ln x)^{2023}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2030}}{\sqrt[15]{e^x}}=0$

Exemple8: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{200011}}{3^x}=0$ *car* $x^{200011}\prec\prec 3^x$ *Exemple9 :* $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-(\ln x)^{2017}}{x^5-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5}=+\infty$

c) Mais la Règle des croissances comparée : ALPES n'est pas toujours applicable l'lorsque il Ya égalité dans les puissances : تساوي في القوة

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-8x+5}-x+3=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{(x-4)^2+....}-x+3=\lim_{x\to+\infty}x-4-x+3=-4+3=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2+6x+5}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{(x+1)^2+....}-\sqrt{(x+3)^2+....}=-x-1+x+3=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-3x}-2\sqrt{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(2x-\frac{3}{4}\right)^2+....}-2\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+....}=2x-\frac{3}{4}-2\left(x+\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^4-4x^2+1}-\sqrt{x^4-x^2}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(x^2-2\right)^2+....}-\sqrt{\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+....}=x^2-2-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

<u>Q09 : Concours de Médecine et Dentaire 2021-2022 Juillet 2021</u>

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}$ Est égale à : **A** ☐ $\frac{1}{2e}$ **B** ☐ $\frac{1}{e}$ **C** ☐ 1 **D** ☐ e **E** ☐ $2e$

Solution : Methode1 : On va utiliser de la règle de l'hôpital :

si $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ alors : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Prof: ATMANI NAJIB

On a : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\frac{\sqrt{\ln(e+0)}-1}{\sqrt{0+1}-1}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\ln(e+x)}-1\right)'}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(\ln(e+x)\right)'}{2\sqrt{\ln(e+x)}}}{\frac{(x+1)'}{2\sqrt{x+1}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2(e+x)\sqrt{\ln(e+x)}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}=\frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{1}}=\frac{1}{e}$$

B ☒ est la bonne réponse

Methode2 : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{\ln(e+x)}-1\right)\left(\sqrt{\ln(e+x)}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}$ L'expression conjuguai

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\ln(e+x)}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e+x)-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)+\ln e-1}{x}\times\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{\ln(e+x)}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{e}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)}{\frac{x}{e}}\times 1=\frac{1}{e}\times 1=\frac{1}{e}\quad\text{car}\quad\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+X)}{X}=0$$

<u>Q10 : Concours ENSA Oujda</u>

La limite : $\lim\limits_{|x|\to 1}\frac{1-4\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)^2}{1-x^2}$ est :

A ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ **B** ☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ **C** ☐ $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ **D** ☐ *n'existe pas* **E** ☐ $\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

<u>Solution :</u> On va utiliser de la règle de l'hôpital :si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ alors : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

On a : $\lim\limits_{|x|\to 1}\frac{1-4\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)^2}{1-x^2}=\frac{1-4\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-1^2}=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$$\lim_{|x|\to 1}\frac{1-4\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)^2}{1-x^2}=\lim_{|x|\to 1}\frac{-4\times 2\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)\frac{\pi}{6}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)}{-2x}=\lim_{|x|\to 1}\frac{-4\times\frac{\pi}{6}\sin\left(2\frac{\pi x}{6}\right)}{-2x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-4\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)^2}{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\quad\text{et}\quad\lim_{x\to -1}\frac{1-4\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)^2}{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$$

Par suite : $\lim\limits_{|x|\to 1}\frac{1-4\left(\sin\frac{\pi x}{6}\right)^2}{1-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$ **E** ☒ est la bonne réponse

<u>Q11 : Concours de Médecine et pharmacie 2021 :</u>

$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x)=\frac{\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}}{x}$ Alors :

A ☐ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$ **B** ☐ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$ **C** ☐ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\frac{1}{2}$ **D** ☐ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

E ☐ la limite de f *n'existe pas* en 0

Prof : ATMANI NAJIB

Solution : remarque $\sqrt{x^2}=|x|$; $\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{\sqrt{x^2}}=\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{|x|}$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=\lim\limits_{t\to0^+}\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\sqrt{1}=1$ car $\lim\limits_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{\ln(1+x^2)}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}-\sqrt{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}=\lim\limits_{t\to0^-}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}=-1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$

Par suite : **E** ☐ la limite de f *n'existe pas* en 0 est la bonne réponse

Q12 : Concours de Médecine et pharmacie 2022 :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}}$ Est égal à : **A** ☐ 0 **B** ☐ e^{-1} **C** ☐ e **D** ☐ $+\infty$ **E** ☐ **autre**

Solution : Remarque : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}}=\frac{1}{e}=e^{-1}$

Q13 : Concours ENSA 2022 :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}$ est égal à : **A** ☐ 1 **B** ☐ 0 **C** ☐ $+\infty$ **D** ☐ e

Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)^{\frac{1}{n}}$ car $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{2}{n}\ln(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{2\frac{\ln(n)}{n}}=e^0=1$ car $a^x=e^{x\ln a}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$

A ☒ est la bonne réponse

Q14 : Concours de Médecine et pharmacie 2022 :

$\lim\limits_{n\to+\infty}n-\sqrt{n^2-n}$ est égal à : **A** ☐ $-\infty$ **B** ☐ 0 **C** ☐ $\frac{1}{2}$ **D** ☐ 1 **E** ☐ autre

Solution : Methode1 :

$$\lim_{n\to+\infty}n-\sqrt{n^2-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2-n}\right)\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)}{n+\sqrt{n^2-n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

Par suite : **C** ☐ est la bonne réponse

Methode2 : $n-\sqrt{n^2-n}=n-\sqrt{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2-1}\overset{+\infty}{\simeq}n-\left(n-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

Par suite : **C** ☐ est la bonne réponse

Astuce : $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+bx+c}=-\frac{b}{2}$

Prof : ATMANI NAJIB

Q15 : Concours ENSA 2022 :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{(n+5)(n+7)}$ est égal à : **A** ☐ 0 **B** ☐ -6 **C** ☐ 6 **D** ☐ $+\infty$

Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{(n+5)(n+7)} = \lim\limits_{n\to+\infty} n-\sqrt{n^2+12n+35} = -\frac{12}{2} = -6$

Par suite : **B** ☐ est la bonne réponse

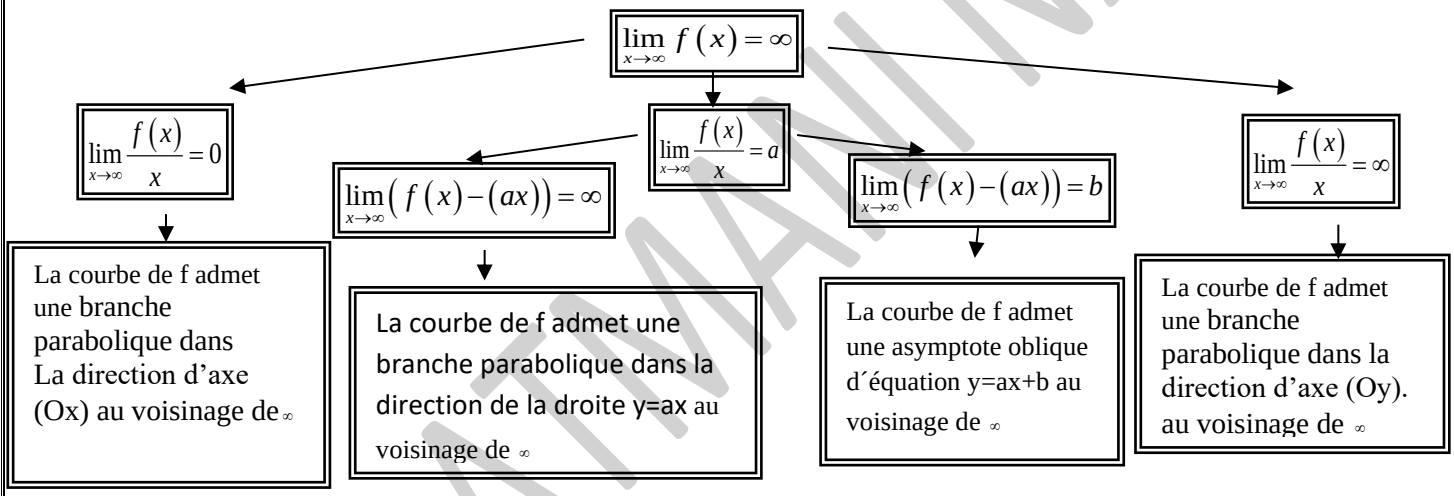
Astuce : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2+bx+c} = -\frac{b}{2}$

E) Etude d'asymptotes et de branches infinies.

L´étude des branches infinies a pour objectif de comprendre en d´détails le comportement de la courbe de la fonction

La première chose à faire est de calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction :

- **Si** $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ alors la courbe (C) admet une asymptote verticale d´équation $x=a$
- **Si** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ alors la courbe admet une asymptote horizontale d´équation $y=b$
- **Si** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ en en va étudier **les branches infinies**



Q16 : Concours Faculté de Médecine et de pharmacie 2004

La courbe représentative de la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote oblique d'équation :

A☐ $y=x-\frac{1}{2}$ **B**☐ $y=x+\frac{1}{2}$ **C**☐ $y=-x-\frac{1}{2}$ **D**☐ $y=-x+\frac{1}{2}$ **E**☐ $y=x$

Solution : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x}\sqrt{\frac{x}{x+1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}-x\right)\left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x\right)}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^3}{x+1}-x^2}{x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-x}{x+1}}{x\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-1}{x+1}}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1} = 0$$

Par suite : **E** ☐ est la bonne réponse

Prof : ATMANI NAJIB

F) Continuité en un point : **1) f est continue en a** si et seulement si : $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

2) Une fonction est continue en un point a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de a :

Donc : f est continue en $x_0 = 0$ si et seulement si : $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

• toutes les fonctions obtenues par opérations (somme, produit, quotient) ou composition à partir de ces fonctions de référence sont aussi continues sur leur domaine de définition.

• La fonction partie entière est une fonction définie sur R et discontinue en certains réels (et donc non continue sur R).

• Si f et g sont deux fonctions continues en a et $g(a) \neq 0$ alors :

a) $\frac{1}{g}$ b) $\frac{f}{g}$ sont des fonctions continues en a.

• Si f une fonction continue en a et $f(a) \geq 0$ alors : $\sqrt{f}$ est continue en a

3)L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

4) si f continue et strictement croissante sur L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ alors :

$$f([a;b]) = [f(a); f(b)] \quad \text{et} \quad f([a;b[) = \left[f(a); \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x) \right[$$

$$f(]a;b]) = \left] \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x); f(b) \right] \quad \text{et} \quad f(]a;b[) = \left] \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x); \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x) \right[$$

Si f continue et strictement décroissante sur L'intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ alors :

$$f([a;b]) = [f(b); f(a)] \quad \text{et} \quad f([a;b[) = \left] \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x); f(a) \right]$$

$$f(]a;b]) = \left[f(b); \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) \right[\quad \text{et} \quad f(]a;b[) = \left] \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} f(x); \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) \right[$$

Q17 : Concours ENSA 2022 :

Soient a ; b deux réels ; la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & si : x > 0 \\ f(x) = ax + b & si : x \leq 0 \end{cases}$.

f est continue en 0 si et seulement si :

A ☐ $a \in \mathbb{R}$ et $b = 2$ **B** ☐ $a = 0$ et $b = 0$ **C** ☐ $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{1}{2}$ **D** ☐ $a \in \mathbb{R}$ et $b = -\frac{1}{2}$

Solution : On a : $f(0) = a \times 0 + b = b$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = "\frac{0}{0}" \ FI$$

Utilisation de la règle de l'hôpital :si $\lim_{x\to a} \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ alors : $\lim_{x\to a} \frac{U(x)}{V(x)} = \lim_{x\to a} \frac{U'(x)}{V'(x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = "\frac{0}{0}"$$ Utilisation de la règle de l'hôpital une 2 iem fois

Prof : ATMANI NAJIB

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{-1}{2}$$

f est continue en 0 **si et seulement si** : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = b = -\frac{1}{2}$ et on a pas de conditions sur a

Par suite : **D** ☐ $a \in \mathbb{R}$ $et\ b = -\frac{1}{2}$ est la bonne réponse

5)Théorème des valeurs intermédiaires :

a) Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux réels de I.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$; *il* existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

b) Soient a et b deux réels tels que : a < b.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a;b]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, L'équation f(x) = k a une solution unique dans $[a;b]$

Ces résultats se généralisent à des intervalles du type $[a;b[$; $]a;b]$; $]a;b[$; $]a;+\infty[$; $]-\infty;a[$ ...en remplaçant $f(a)$ ou $f(b)$ par la limite de f en la borne manquante.

c)Soit f une fonction continue et strictement monotone sur [a, b] et si $f(a)\times f(b) \prec 0$ alors l'équation : $f(x) = 0$ à une solution unique dans [a, b].

Remarque : METHODE POUR DETERMINER LE NOMBRE DE SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION POLYNOMIALE

<u>Exemple :</u> Combien l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ admet-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

Voici une démarche à suivre :

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

On va étudier cette fonction et Dresser son tableau de variations

Bien sûr f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction POLYNOMIALE

$f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0\ ou\ x = 2$

Le tableau de variations de f :

Prof: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

Sur : $]-\infty;0[$ f est continue et strictement croissante et o est compris entre "$-\infty$" et 1

Donc:d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-\infty;0[$

Sur : $]0;2[$ f est continue et strictement décroissante et o est compris entre -3 et 1

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]0;2[$

Un raisonnement similaire montre que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]2;+\infty[$

Au total : l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions

Exemple2 : l'équation : $x^3 - x + 5 = 0$ dans $\mathbb{C}$ admet exactement 3 solutions

6)FONCTIONS RECIPROQUES.

a) Si f une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} définie de $J = f(I)$ vers I.

b) Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I.

c) *Si f admet une fonction réciproque f^{-1} de $J = f(I)$ vers I alors $\left(C_{f^{-1}}\right)$ et $\left(C_f\right)$ sont symétriques par rapport à :(Δ) $y = x$ et* $\left(f^{-1}(y)\right)' = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$

<u>Q18. Concours de Médecine et pharmacie Oujda</u>

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$.

A ☐ Alors $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$ **B** ☐ f dérivable sur $\mathbb{R}$

C ☐ Le domaine de définition de f est $[2;+\infty[$ **D** ☐ $(f \circ f)(x) = x^2$ **E** ☐ $(f \circ f)(x) = x+1$

<u>Solution :</u> Méthode (par élimination des réponses)

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x + \frac{1}{x} \succ 0 \ et \ x - 1 \neq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / 8 - x^3 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x^3 \leq 2^3\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\right\} =]-\infty;2]$$

Donc : **C** ☐ Faux et **B** ☐ Faux

On remarque que : $f(0) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = 0$ et $f(2) = 0 \Leftrightarrow f^{-1}(0) = 2$

$(f \circ f)(2) = f(f(2) = f(0) = 2$ Mais $2^2 = 4$ donc : $(f \circ f)(2) \neq 2^2$ donc : **D** ☐ Faux

$(f \circ f)(0) = f(f(0) = f(2) = 0$ Mais $0 + 1 = 1$ donc : $(f \circ f)(0) \neq 0 + 1$ donc : **E** ☐ Faux

On doit donc cocher **A** ☒

G) La fonction racine n − éme

1)Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$; la fonction : $f : x \to x^n$ est une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ elle admet donc une fonction réciproque f^{-1} de $f\left(\mathbb{R}^+\right) = \mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$ et La fonction réciproque f^{-1} s'appelle la fonction racine n − éme et se note $\sqrt[n]{\ }$

2) Propriétés de la racine n – éme : a) La fonction $\sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}+$

b) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ \sqrt[n]{x} \geq 0$ c)$(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+) \sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

d)La fonction $\sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}+$ strictement croissante.

e) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall y \in \mathbb{R}+) \ \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$ f)$(\forall x \in \mathbb{R}+)$ $(\forall a \in \mathbb{R}+)$ $\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n$

g) $(\forall a \in \mathbb{R}+)$ $\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n$ h)$(\forall x \in \mathbb{R}+)\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x$

i) $(\forall x \in \mathbb{R}+)(\forall p \in \mathbb{N})$ $\left(\sqrt[n]{x}\right)^p = \sqrt[n]{x^p}$ j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$ k)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$

l)Si $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = l$ et $l \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$ m) $\sqrt[q]{x} = x^{\frac{1}{q}}$ et $x^r = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$ $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{Z}$

3)L'expression conjuguai et ses applications :

On sait que : $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$ et $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

Il en résulte que : $a - b = \dfrac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$ et $a + b = \dfrac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$

Prof : ATMANI NAJIB

$\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\dfrac{x-y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$ et $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\dfrac{x+y}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\left(\sqrt[3]{y}\right)^2}$

On sait que $a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$

Par suite :$(\forall x\in\mathbb{R}+)$ $(\forall y\in\mathbb{R}*+)$: $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$

Q19 : Préparation concours Médecine et pharmacie :

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ est égal à : **A** ☐ 0 **B** ☐ $-\dfrac{1}{2}$ **C** ☐ $-\dfrac{3}{2}$ **D** ☐ $+\infty$

Solution : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}$ on utilise : $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3\right)}=\lim_{x\to1}\frac{-2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\times1+1\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}\right)}=\frac{-6}{2}=\frac{-3}{2}$$

Par suite : **C** ☐ est la bonne réponse

***H) La fonction arc tangente* (Pour SM) : 1)** La restriction de la fonction tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ Vers $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque s'appelle la fonction arc tangente, notée : $\boldsymbol{artan}$ elle est définie de $\mathbb{R}$ vers $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} ar\tan x=y \\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\tan y \\ y\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

2) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} ar\tan x=\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} ar\tan x=-\dfrac{\pi}{2}$

b) $(\forall x\in\mathbb{R})$ ($\tan(\arctan x)=x$) et $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, $\arctan(\tan x)=x$

c)La fonction $artan$ est continue et impaire strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d) $\arctan x=\arctan y\Leftrightarrow x=y$ $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$ et $\arctan x\prec\arctan y\Leftrightarrow x\prec y$ $\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2$

e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ar\tan x}{x}=1$

f) $(\forall x\in\mathbb{R}+)$ ($\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$) et $(\forall x\in\mathbb{R}-)$ ($\arctan x+\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$)

g) $(\forall x\in\mathbb{R})$; $(ar\tan x)'=\dfrac{1}{x^2+1}$ et avec des conditions : $\left(ar\tan u(x)\right)'=\dfrac{u'(x)}{u(x)^2+1}$

G) Partie Entière : $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\in\mathbb{Z}$

La partie entière vérifie ces deux inégalités :1) $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x)\le x\prec E(x)+1$ par définition

2) $\forall x\in\mathbb{R}$; $x-1\prec E(x)\le x$

Les propriétés suivantes sont aussi vraies :

3) $\forall p\in\mathbb{Z}$ $\forall x\in\mathbb{R}$; $E(x+p)=p+E(x)$ 4) $\forall p\in\mathbb{Z}$ $\forall x\in\mathbb{R}$; $x\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow E(x)=x$

De plus, on a cette propriété à plutôt bien connaitre : $\forall x;y\in\mathbb{R}$; $E(x)+E(y)\le E(x+y)\le E(x)+E(y)+1$

Prof : ATMANI NAJIB

$E(-x)=-E(x)-1 \;\; si \; x\notin\mathbb{Z}$ et $E(x)+E(-x)=\begin{cases}0 & si \; x\in\mathbb{Z}\\ -1 & si \; x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$

La partie entière est une fonction croissante.
Elle est continue par morceaux.
Elle est dérivable sur tout intervalle de la forme : $]n-1;n[$ avec n entier relatif

La partie entière est continue à droite de $x_0\in\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to x_0^+} E(x)=E(x_0)$

Si : $x_0\in\mathbb{Z}$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} E(x)=x_0-1$: La partie entière n'est pas continue à gauche de $x_0\in\mathbb{Z}$

La partie entière est continue en $x_0\notin\mathbb{Z}$ c'est-à-dire : $\lim\limits_{x\to x_0} E(x)=E(x_0)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} E(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} E(x)=-\infty$

I) Axe de symétrie et centre de symétrie :

1) Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f

La droite $(\Delta): x=a$ est un axe de symétrie de la courbe Cf si et seulement si :

a) $\forall x\in D_f$; $2a-x\in D_f$ b) $\forall x\in D_f$; $f(2a-x)=f(x)$

Remarques :1) si f est paire alors : $(\Delta): x=0$ est un axe de symétrie de la courbe Cf

2)Si $f(x)=ax^2+bx+c$ *et* $a\neq 0$ *ou* $f(x)=h(ax^2+bx+c)$ avec : $h=\sqrt{\;}$ *ou* ln *ou* exp *ou* sin *ou* cos

Alors : $(\Delta): x=-\dfrac{b}{2a}$ est un axe de symétrie de la courbe Cf

2) Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f.
Le point $\Omega(a;b)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf si et seulement si :

a) $\forall x\in D_f$; $2a-x\in D_f$ b) $\forall x\in D_f$; $f(2a-x)=2b-f(x)$

Remarques :1) si f est impaire alors : $O(0;0)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf

2) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}\Rightarrow \Omega\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ est un centre de symétrie de la courbe Cf

3) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)\Rightarrow \Omega\left(\dfrac{a+b}{2};0\right)$ est un centre de symétrie de la courbe

4)Si $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ *et* $a\neq 0$ Alors : $\Omega\left(\dfrac{-b}{3a};f\left(\dfrac{-b}{3a}\right)\right)$ est un centre de symétrie de Cf

***J) Fonction Injective ; Surjective ; Bijective* (Pour SM)**

<u>1)Définition :(injection)</u> Soit f une application de E dans F, on dit que f est injective de E dans F si :
$\forall(x_1;x_2)\in E^2 \;\; x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

Par contraposition on peut dire que : (***f*** est injective) $\Leftrightarrow$ $\forall(x_1;x_2)\in E^2 \;\; f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

<u>2)Définition :(surjection)</u> Soit f une application de E dans F, on dit que f est surjective de E dans F si tout élément y de F admet un antécédent dans E : $(\forall \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{F})(\exists \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{E})(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$
Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x)=y$ admet au moins une solution dans E.

<u>3) a) Définition :(bijection) :</u> Soit f une application de E dans F, on dit que f est une bijection de E dans F si elle injective et surjective

b) Propriété : Une application est une bijection de E dans F si et seulement si :
$(\forall \boldsymbol{y}\in \boldsymbol{F})\;(\exists\,!\;\boldsymbol{x}\in \boldsymbol{E})\;(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{y})$: Autrement dit : Pour tout y dans F l'équation $f(x)=y$ admet une unique solution dans E.

Prof : ATMANI NAJIB

c)Définition (bijection réciproque): Si f est une bijection de E dans F; L'application de F dans E qui lie chaque élément y par l'élément x de E qui est solution de l'équation $f(x) = y$ s'appelle la bijection réciproque de la bijection f et se note f^{-1}. f bijection de E dans F ; f^{-1} sa bijection réciproque on a :

$$\begin{cases} f^{-1}(y)=x \\ y\in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=y \\ x\in E \end{cases}$$

Q20 : Préparation concours Médecine et pharmacie :

Soit l'application f : $\begin{array}{l} \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ (n;m)\mapsto(n-m)^2 \end{array}$

A ☐ f est injective **B** ☐ f est surjective **C** ☐ f est bijective **D** ☐ f est ni injective ni surjective

Solution :

- f est injective ssi tout élément de $\mathbb{N}$ admet au plus un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\forall(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m')\Rightarrow(n;m)=(n';m')$

- f n'est pas injective ssi il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui admet plus d'un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(n';m')\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$f(n;m)=f(n';m')\ et\ (n;m)\neq(n';m')$

Si je trouve : $(n;m)\neq(n';m')$ et $f(n;m)=f(n';m')$ on peut affirmer que f n'est pas injective.

Si je prends : $(1;2)\ et\ (1;0)$

On a : $f(1;2)=(1-2)^2=1$ et $f(1;0)=(1-0)^2=1$

Donc : : $\exists(1;2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $\exists(1;0)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que $f(1;2)=f(1;0)$ Mais $(1;2)\neq(1;0)$

Donc : f n'est pas injective **A** ☐ **fausse**

2)

- f est surjective ssi tout élément de $\mathbb{N}$ admet au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\forall\, p\in\mathbb{N}$; $\exists(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ Tel que : $f(n;m)=p$

- f n'est pas surjective ssi il existe au moins un élément de $\mathbb{N}$ qui n'admet pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

C'est-à-dire : $\exists\, p\in\mathbb{N}$; $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m)\neq p$

- Si je trouve : $p\in\mathbb{N}$ qui n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ on peut affirmer que f n'est pas surjective.

Si je prends : $p=3$: On a : $f(n;m)=3\Leftrightarrow(n-m)^2=3\ \Leftrightarrow n-m=\sqrt{3}$

Mais :il n'existe pas : $(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $n-m=\sqrt{3}$

Donc : $\exists 3\in\mathbb{N}$; $\forall(n;m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $f(n;m)\neq 3$

Donc : f n'est pas surjective. **b** ☐ **fausse**

Remarque : il existe des éléments de $\mathbb{N}$ qui ont des antécédents dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

Par exemple : $p=4$: $f(n;m)=4\Leftrightarrow(n-m)^2=4\Leftrightarrow n-m=2\,ou\ n-m=-2$

Il existe : $(3;1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tel que : $(3-1)^2=4$

C'est-à-dire : $4\in\mathbb{N}$ a au moins un antécédent dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$(pas suffisant pour affirmer que f est surjective car il faut que tous les éléments de l'ensemble d'arrivé aient des antécédents par f .

C☐ **fausse**

Par suite : **D** ☐ est la bonne réponse

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de Cours : LA DERIVATION

A) Dérivation en un point et Dérivé à droite et dérivé à gauche.

1) f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert de centre $\boldsymbol{a}$.

f est dérivable en a si la limite : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie le note $f'(a)$: Le nombre dérivé de la fonction f en a

2) f est dérivable en a si et seulement si : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)\in\mathbb{R}$

3)Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ où $r>0$

f est dérivable à droite de a si la limite : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie : $f'_d(a)$

4) f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r, a]$ où $r>0$

f est dérivable à gauche de a si la limite : $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie : $f'_g(a)$

5)f est dérivable en a si et seulement si : elle dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a)=f'_g(a)$

6) Toute fonction dérivable en a est continue en a.

B) INTERPRETATIONS GEOMETRIQUES.

1) si f est dérivable en a. f admet une fonction affine tangente en a de la forme :

$u(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$

2)Si f est dérivable en a alors sa courbe représentative C_f admet une tangente (T) en $A(a, f(a))$ d'équation :$(\boldsymbol{T})$: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

3) Si f est dérivable à droite de a, alors son graphe admet une demi-tangente à droite de a :

$(T_d): y=f'_d(a)(x-a)+f(a)$:$\boldsymbol{x\geq a}$

4) Si f est dérivable à gauche de a, alors son graphe admet une demi-tangente à gauche de a :

$(T_g): y=f'_g(a)(x-a)+f(a)$: $\boldsymbol{x\leq a}$

5) Si f est dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a)\neq f'_g(a)$ on dit que **l**a courbe représente un point anguleux en A $(a, f(a))$

C) Dérivabilité sur un intervalle.

1) f est dérivable sur l'ouvert$]a, b[$si elle est dérivable en tout point de $]a, b[$

2) f est dérivable sur le semi-ouvert $[a, b[$si elle est dérivable sur $]a, b[$ et dérivable à droite de a

3) f est dérivable sur le fermé $[a, b]$ si elle est dérivable sur$]a, b[$ et dérivable à droite de a et à gauche de b

Remarque : *La* fonction $arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(arc\tan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Q21. Concours de Médecine et pharmacie Oujda :

Soit **f** une fonction dérivable en : a alors $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=$

A ☐ $2f'(a)$ **B** ☐ $f'(a)$ **C** ☐ $f(a)$ **D** ☐ $f(0)$ **E** ☐ $autre$

Solution : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

On a : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$ car f est dérivable en : a

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f(a+k)-f(a)}{k}=f'(a)$ car f est dérivable en : a

Prof: ATMANI NAJIB

Donc : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$ **A** ☒ est la bonne réponse

Q22. Concours de Médecine et pharmacie :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

A ☐ Alors fonction f dérivable en : 0 et on a $f'(0)=\frac{1}{2}$

B ☐ Alors fonction f dérivable en : 0 et on a $f'(0)=0$

C ☐ Alors fonction f dérivable en : 0 et on a $f'(0)=1$

D ☐ Alors fonction f n'est pas dérivable en : 0 **E** ☐ autre

Solution : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

On a : $si\ x\neq 0$: $-1\leq\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq 1$

$si\ x\succ 0$: $-x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq x$ et $\lim_{x\to 0^+}x=\lim_{x\to 0^+}-x=0$ par suite : $\lim_{x\to 0^+}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Donc : f dérivable à droite en : 0 et $f'_d(0)=0$

$si\ x\prec 0$: $x\leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq -x$ et $\lim_{x\to 0^-}x=\lim_{x\to 0^-}-x=0$ par suite : $\lim_{x\to 0^-}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Donc : f dérivable à gauche en : 0 et $f'_g(0)=0$

Par suite : la fonction f dérivable en : 0 et on a $f'(0)=0$ **B** ☒ est la bonne réponse

Q23. Concours de Médecine et pharmacie :

Soit f la fonction définie par : $f(x)=(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)$.

Alors : $f'(1)=$

A ☐ 24 **B** ☐ 1 **C** ☐ 0 **D** ☐ 5 **E** ☐ -24

Solution : Puisque f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable en 1

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)(x-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-5)(x-4)(x-3)(x-2)$

$f'(1)=(1-5)(1-4)(1-3)(1-2)=(-4)\times(-3)\times(-2)\times(-1)=\boxed{24}$

A ☒ est la bonne réponse

D)Monotonie et extremums d'une fonction : concavité ; points d'inflexions

1) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et et $a\in I$ Si f admet un extremum relatif en a alors $f'(a)=0$

2) Si f est dérivable en a et admet un extremum en a, alors sa courbe représentative admet une tangente parallèle à (Ox) en $A(a, f(a))$

3) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

4) a) f' est positive sur I si et seulement si f est croissante sur I.

b) f' est négative sur I si et seulement si f est décroissante

c) f' est nulle sur I si et seulement si f est constante sur I.

5)Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement positive sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement croissante sur I

6)Si f est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée est strictement négatif sauf sur un nombre fini de point où elle peut s'annuler alors f est strictement décroissante sur I

Prof : ATMANI NAJIB

7) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe à droite et à gauche de a alors f admet un extremum en a
8) f est deux fois dérivable sur un intervalle$I$.
a) Si f''est positive sur I alors C_f est convexe sur I.
b) Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I.
c) Si f'' s'annule en $\boldsymbol{a}$ en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Q24. Concours de Médecine et pharmacie 2022

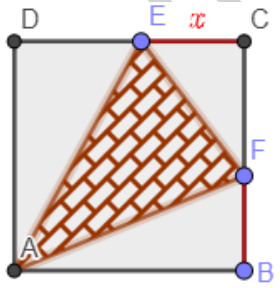
$ABCD$ est un carré de coté **1**

On place les points E et F respectivement sur les côtés $[AB]$ et $[BC]$ tel que : $BE = CF = x$

Les valeurs de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimal est :

A ☐ 0 **B** ☐ $\frac{1}{4}$ **C** ☐ $\frac{1}{3}$ **D** ☐ $\frac{1}{2}$ **E** ☐ *autre*

Solution : L'aire du triangle EFD est :



$$f(x) = A_{ABCD} - A_{FCD} - A_{EBF} - A_{AED} = 1 - \frac{1-x}{2} - \frac{x(1-x)}{2} - \frac{x}{2}$$

$$f(x) = \frac{2 + x - 1 + x^2 - x - x}{2} = \frac{x^2 - x + 1}{2} \text{ et } f'(x) = \frac{2x-1}{2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Les valeurs de x pour laquelle l'aire du triangle EFD est minimal est : $x = \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{8}(ua)$ est l'aire minimal du triangle EFD

x	$-\infty$ $\frac{1}{2}$ $+\infty$
$f(x)$	↘ $\frac{3}{8}$ ↗

D ☒ est la bonne réponse

E) Operations sur les fonctions dérivables

Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors $f+g$ est dérivable sur I et: $(f+g)' = f' + g'$

Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I alors $f \times g$ est dérivable sur I et: $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$

et $(f^n)' = nf' f^{n-1}$ si $n \in \mathbb{N}^*$

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

Si f et g sont dérivables sur un intervalle ouvert I et g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$$

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et <u>strictement positif sur **I**</u> alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I

Prof : ATMANI NAJIB

F) Autre formules de dérivations : $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$; $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$; $\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f^{n-1}}}$;

$(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$; $(f(g(x)))' = g'(x)\times f'(g(x))$; $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^{u(x)}$;

$(\sin u(x))' = u'(x)\cos(u(x))$; $(\cos u(x))' = -u'(x)\sin(u(x))$;

$(\tan u(x))' = u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right)$

Autre formule sous conditions : $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$ et $(f\times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{b} C_n^k f^{(k)} \times g^{(n-k)}$ (Leibnitz)

Q25. Faculté de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\cos x}{x+2\sin x}$

A ☐ La dérivé de $f(x)$ est $f'(x) = \frac{x\sin x+\cos x-2}{(x+2\sin x)^2}$

B ☐ La dérivé de $f(x)$ est $f'(x) = \frac{x\sin x+\cos x+2}{(x+2\sin x)^2}$

C ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **D** ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ **E** ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Solution : On procède par élimination des réponses :

$\forall x\neq 0$; $f'(x) = \frac{-\sin x(x+2\sin x)-\cos x(1+2\cos x)}{(x+2\sin x)^2} = \frac{-x\sin x-\cos x+2(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(x+2\sin x)^2}$

$\forall x\neq 0$; $f'(x) = \frac{-x\sin x-\cos x+2}{(x+2\sin x)^2}$ $\Rightarrow$ A ☐ faux et B ☐ faux

On a : $\forall x\neq 0$ $|f(x)| = \left|\frac{\cos x}{x+2\sin x}\right| \leq \left|\frac{1}{x+2\sin x}\right|$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2\sin x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\left(1+2\frac{\sin x}{x}\right)} = 0$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On doit donc cocher **E** ☒

Q26. Faculté de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda :

L'ensemble des solutions de l'inéquation : $1+\ln x+(\ln x)^2+(\ln x)^3 > 0$ est :

A ☐ $]0;e^{-1}[$; **B** ☐ $]0;+\infty[$; **C** ☐ $]-\infty;e^{-1}[$; D ☐ $]e;+\infty[$; **E** ☐ $\left]\frac{1}{e};+\infty\right[$

Solution : Methode1 : On procède par élimination des réponses : $D_I =]0;+\infty[$

$1+\ln 1+(\ln 1)^2+(\ln 1)^3 > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ (Vraie) . Donc : $1\in S$

$1\notin]0;e^{-1}[$ et $1\notin]e;+\infty[$ et $]-\infty;e^{-1}[\not\subset D_I \Rightarrow$ A ☐ faux et C ☐ faux et D ☐ faux

$1+\ln\frac{1}{e}+\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2+\left(\ln\frac{1}{e}\right)^3 > 0 \Leftrightarrow 0 > 0$ (Faux) . Donc : $\frac{1}{e}\notin S \Rightarrow$ **B**☐ faux

On doit donc cocher **E** ☒

Methode2 : Soit S L'ensemble des solutions de l'inéquation.

On a : $D_I =]0;+\infty[$ et on pose : $X = \ln x$

$1+\ln x+(\ln x)^2+(\ln x)^3 = 1+X+X^2+X^3 = (1+X)+X^2(1+X) = (1+X)(1+X^2)$

Prof : ATMANI NAJIB

$1+X+X^2+X^3>0 \Leftrightarrow 1+X>0 \Leftrightarrow X>-1 \Leftrightarrow \ln x>-1 \Leftrightarrow x>e^{-1} \Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$

On doit donc cocher **E** ☒

Q27 : Faculté de Médecine et pharmacie Oujda

$\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad f(x)=x^2+4\ln x+1$ et $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{6}$; alors : $f'(1)=$

A ☐ $\frac{1}{6}$ **B** ☐ $-\frac{1}{6}$ **C** ☐ 6 **D** ☐ -6 **E** ☐ *autre*

Solution : On a : $(f^{-1})'(2)=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$ et $f(1)=1^2+4\ln 1+1=2$ donc : $f^{-1}(2)=1$

Donc : $\frac{1}{6}=\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$ c'est-à-dire : $\frac{1}{6}=\frac{1}{f'(1)}$ et par suite : $f'(1)=6$: On doit donc cocher **C** ☒

Q28 : Faculté de Médecine et pharmacie Oujda :

On note : $\forall n\in\mathbb{N}^* \quad f^{(n)}$ la dérivée n iem donc : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

A ☐ $(\ln x)^{(n)}=(-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n}$ **B** ☐ $(\ln x)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{x^n}$

C ☐ $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{n!}{x^n}$ **D** ☐ $(\ln x)^{(n)}=(\ln x)^n$ **E** ☐ $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

Solution : Méthode : On procède par élimination des réponses : $D=\left]0;+\infty\right[$

On a : $(\ln x)^{(1)}=(\ln x)'=\frac{1}{x}$ et $(\ln x)^{(2)}=(\ln x)''=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$

Pour : **A** ☐ *si* : $n=1$ $(\ln x)^{(1)}=\frac{1}{x}$ et $(-1)^1\frac{(0)!}{x^1}=-\frac{1}{x}$ donc : $(\ln x)^{(n)}\neq(-1)^n\frac{(n-1)!}{x^n}\Rightarrow$ **A** ☐ faux

Pour : **B** ☐ *si* : $n=1$ $(\ln x)^{(1)}=\frac{1}{x}$ et $(-1)^1\frac{(1)!}{x^1}=-\frac{1}{x}$ donc : $(\ln x)^{(n)}\neq(-1)^n\frac{n!}{x^n}\Rightarrow$ **B** ☐ faux

Pour : **D** ☐ *si* : $n=1$ $(\ln x)^{(1)}=\frac{1}{x}$ et $(\ln x)^1=\ln x$ donc : $(\ln x)^{(n)}\neq(\ln x)^n\Rightarrow$ **D** ☐ faux

Pour : **C** ☐ *si* : $n=2$: $(\ln x)^{(2)}=-\frac{1}{x^2}$ et $(-1)^{2+1}\frac{2!}{x^2}=-\frac{2}{x^2}$ donc : $(\ln x)^{(n)}\neq(-1)^{n+1}\frac{n!}{x^n}$

$\Rightarrow$ **D** ☐ faux On doit donc cocher **E** ☒

Q29. Concours de Médecine et de pharmacie « Marrakech » Juillet 2010

Soit g et h deux fonctions définies et dérivables sur $I=[-1;1]$ telle que :

$\forall x\in I \quad g(x)=h\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)$ Alors la valeur de $g'(1)$ est :

A ☐ $h(0)$ **B** ☐ *n'existe pas* **C** ☐ $-\frac{\pi}{2}h(0)$ **D** ☐ $\frac{\pi}{2}h(0)$ **E** ☐ $-\frac{\pi}{2}h(1)$

Solution : $g'(x)=\left(h\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)\right)'=\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)'\times h'\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)=-\frac{\pi}{2}\times\sin(\frac{\pi}{2}x)\times h'\left(\cos(\frac{\pi}{2}x)\right)$

$g'(1)=-\frac{\pi}{2}\times\sin(\frac{\pi}{2})\times h'\left(\cos(\frac{\pi}{2})\right)=-\frac{\pi}{2}\times 1\times h'(0)=-\frac{\pi}{2}h'(0)$ On doit donc cocher **C** ☒

Q30. Faculté de Médecine et pharmacie et dentaire : 2023-2024

Soit f une fonction réelle ; sachant que : $f(1)=3$ et $f'(1)=-3$

La courbe de la fonction f admet au point (1, 3) une tangente d'équation :

Prof : ATMANI NAJIB

A ☐ $y=3x-2$ **B** ☐ $y=3x-6$ **C** ☐ $y=-3x+6$ **D** ☐ $y=3x$ **E** ☐ $y=-3x+2$

Solution : Methode1 : On procède par élimination des réponses : $f'(1)=\boxed{-3}$

$\Rightarrow$ A ☐ faux et B☐ faux et D ☐ faux

$f(1)=\boxed{3}$: Pour : **E** ☐ $y=-3x+2$ on a si $x=1$: $y=-3\times 1+2=-1\neq 3$ $\Rightarrow$ **E**☐ faux

On doit donc cocher **C** ☒

Methode2 :(il vaut mieux le faire) l'équation de la tangente à la courbe de f en (1, 3) est :

$$y=f'(1)(x-1)+f(1)=-3(x-1)+3=-3x+3+3=-3x+6$$

On doit donc cocher **C** ☒

Q31. Concours ENSA 2022

Soit f : $[0;+\infty[\to[0;+\infty[$; définie par : $f(x)=xe^x$; l'équation t de la tangente à La courbe de la fonction f^{-1} au point d'abscisse e est :

A ☐ $y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$ **B** ☐ $y=\frac{1}{e}x+\frac{1}{2}$ **C** ☐ $y=\frac{1}{2e}x+1$ **D** ☐ $y=\frac{1}{e}x-1$

Solution : l'équation de la tangente à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse e est :

$$y=\left(f^{-1}\right)'(e)(x-e)+f^{-1}(e) :$$

$f^{-1}(e)=x\Leftrightarrow e=f(x)=1e^1$ donc : $f^{-1}(e)=1$

Et on a : $\left(f^{-1}\right)'(e)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(e)\right)}=\frac{1}{f'(1)}$ et $f'(x)=x'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

$\Rightarrow f'(1)=(1+1)e^1=2e$ et par suite : $y=\frac{1}{2e}(x-e)+1=\frac{x-e+2e}{2e}=y=\frac{1}{2e}x+\frac{1}{2}$

On doit donc cocher **A** ☒

Q32 : Faculté de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

$\begin{cases} f(x)=x+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x\neq 0 \\ 0 \quad si\ x\neq 0 \end{cases}$ et $\left(f^{-1}\right)'(2)=\frac{1}{6}$; alors : $f'(1)=$

A ☐ f n'est pas dérivable en 0 **B** ☐ $f'(0)=0$ **C** ☐ $f'(0)=1$

D ☐ Pour $x\neq o$; $f'(x)=1+{}^2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ **E** ☐ f est dérivable en 0 et $f'(0)=2$

Solution : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1+x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}1+\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ on pose : $t=\frac{1}{x}$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\frac{\sin t}{t}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}1+\frac{\sin t}{t}$$

On a : $-1\leq\sin t\leq 1$ donc : si $t>0$ par passage a la limite : $-\frac{1}{t}\leq\frac{\sin t}{t}\leq\frac{1}{t}$ donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{\sin t}{t}=1+0=1$

De même : $\lim\limits_{x\to-\infty}1+\frac{\sin t}{t}=1+0=1$ On doit donc cocher **C** ☒

Q33 : Concours ENSA

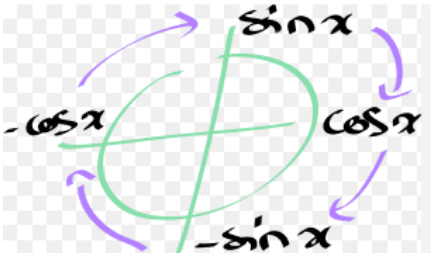
Soit f une fonction réelle : $f(x)=e^{-x}\sin x$ et $f^{(4)}$ sa dérivée d'ordre 4 ; alors : $f^{(4)}(x)=$

A ☐ $-f(x)$ **B** ☐ $-4f(x)$ **C** ☐ $4f(x)$ **D** ☐ $-3f(x)$

Prof : ATMANI NAJIB

Solution : On utilise la formule : $(u\times v)' = u'\times v + u\times v'$

$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = -f(x) + e^{-x}\cos x$



$f^{(2)}(x) = f''(x) = -f'(x) - e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = \cancel{f(x)} - e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \cancel{f(x)}$

$f^{(2)}(x) = f''(x) = -2e^{-x}\cos x$

$f^{(3)}(x) = 2e^{-x}\cos x + 2e^{-x}\sin x = 2e^{-x}\cos x + 2f(x)$

$f^{(4)}(x) = -2e^{-x}\cos x - 2e^{-x}\sin x + 2f'(x)$

$f^{(4)}(x) = -2e^{-x}\cos x - 2f(x) - 2f(x) + 2e^{-x}\cos x = -4f(x)$ On doit donc cocher **B**☒

Remarques : 1) Pour étudier : $f(x) = u(x)^{v(x)}$ on écrit $f(x)$n sous la forme : $f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$

2) Pour calculer la dérivée de $|f|$, on procède comme suit :
- Exprimer $|f|$ sans le symbole de la valeur absolue sur des intervalles de Df
- Calculer la dérivée des fonctions obtenues sur ces intervalles.

3) Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition

G) Autre* Théorèmes *:

1)Théorème de Rolle : (Pour SM)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que : $f(a) = f(b)$.
Alors il existe un réel $c \in]a, b[$; tel que : $f'(c) = 0$.

2) Théorème des accroissements finiesT.A.F : (Pour SM)

a) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

b) Inégalité des accroissements finies I.A.F : (Pour SM)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur :$]a, b[$
S'ils existent deux réels M et m tels que : $m \le f'(x) \le M$: $\forall x \in]a;b[$

Alors : $m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a)$

3) Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est dérivable sur $\boldsymbol{I}$ et $(\forall x \in I)(|f'(x)| \le k$ (où $k \in \mathbb{R}*+$)
Alors :$(\forall(x, y) \in I^2)(|f(x) - f(y)| \le k|x - y|)$

Prof: ATMANI NAJIB

Résumé de Cours : FONCTIONS PRIMITIVES

1) Soit f une fonction définir sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I si : a) F est dérivable sur I b) $(\forall x \in I)$ $(F'(x) = f(x))$

2)Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

3) Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la : forme : $F + \lambda$ où λ est un réel.

4) Si F_1 et F_2 sont deux fonctions primitives d'une fonction f sur I alors :
$(\forall x \in I)$ $(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

5)Si f admet une fonction primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0 Primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

6) Si F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :
a) $(F + G)$ est une fonction primitive de la fonction $(f + g)$ sur I
b) (αF) est une fonction primitive de la fonction (αf) sur I

7)Tableau des fonctions primitives usuelles. **Opérations sur les fonctions primitives.**

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b) + c$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arcta\,n(x) + c$

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v'ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :
La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

8)Quelque formule utile pour calculer les primitives

$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$; $1+\tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$; $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$

$cosx.\,cosy = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]$; $sinx.siny = -\frac{1}{2}[cos(x+y) - cos(x-y)]$

$sinx.\,cosy = \frac{1}{2}[sin(x+y) + sin(x-y)]$; si $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; On a : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Q34 : Concours Faculté de Médecine et de pharmacie Juillet 2007 « Marrakech »

Q11. Soit u la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par : $u(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2}$

Si U est la primitive de la fonction u qui s'annule en 0 alors : **A** ☐ $U(x) = ln(x+1) - \frac{2x}{1+x}$

B ☐ $U(x) = \frac{2x}{1+x}$ **C** ☐ $U(x) = ln(x+1) + \frac{x}{1+x}$ **D** ☐ $U(x) = ln\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{2x}{1+x}$ **E** ☐ $U(x) = 2ln(x+1) - \frac{x}{1+x}$

Solution :

Methode1 : $u(x)=\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)-2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{-2}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+-2\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)'}{x+1}+-2\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}$

Donc : les primitives de la fonction u sont : $U(x)=\ln|x+1|+2\frac{1}{x+1}+k$

$U(0)=\ln|0+1|+2\frac{1}{0+1}+k=0 \Leftrightarrow 2+k=0 \Leftrightarrow k=-2$

Donc : $U(x)=\ln|x+1|+\frac{2}{x+1}-2=\ln|x+1|+\frac{2-2x-2}{x+1}=\ln(x+1)-\frac{2x}{x+1}$ car : $x\in]-1;+\infty[$

On doit donc cocher **A** ☒

Méthode2 : $U'(x)=\left(\ln(x+1)-\frac{2x}{1+x}\right)'=\frac{(x+1)'}{x+1}-\left(\frac{2x+0}{x+1}\right)'=\frac{1}{x+1}-\frac{2\times1-1\times0}{(x+1)^2}$ car : $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

$U'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x+1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x-1}{(x+1)^2}=u(x)$ et puisque : $U(0)=\ln(0+1)-\frac{2\times0}{1+0}=0$

On doit donc cocher **A** ☒

Q35. Concours de Médecine et de pharmacie Juillet 2006 « Oujda »

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=2x\left(1+\ln\left(1+x^2\right)\right)$

Une primitive de la fonction g est : **A** ☐ $G(x)=x^2\ln(1+x^2)$ **B** ☐ $G(x)=x^2+2x\ln(1+x^2)$

C ☐ $G(x)=(1+x^2)\ln(1+x^2)$ **D** ☐ $G(x)=2x\ln(1+x^2)+1$ **E** ☐ $G(x)=x^2\left(x+\frac{1}{2}\ln^2(1+x^2)\right)$

Solution : Si : $G(x)=(1+x^2)\ln(1+x^2)$;

$G(x)=\left((1+x^2)\ln(1+x^2)\right)'=\left((1+x^2)\right)'\ln(1+x^2)+(1+x^2)\left(\ln(1+x^2)\right)'$

$G(x)=2x\ln(1+x^2)+(1+x^2)\frac{2x}{1+x^2}=2x\ln(1+x^2)+2x=2x\left(1+\ln(1+x^2)\right)$

On doit donc cocher **C** ☒

Prof : ATMANI NAJIB

La fonction logarithme népérien :

A) fonction logarithme et propriétés : La fonction logarithme népérien notée ln est l'unique fonction, dénie et dérivable sur $]0;+\infty[$ et Vérifiant $\ln 1=0$ pour tout réel $x\in]0;+\infty[$, $(\ln x)'=\frac{1}{x}\succ 0$ Il est continu et dérivable et strictement croissant sur $]0;+\infty[$

Pour tous réels : $\forall x\succ 0$; $\forall r\in\mathbb{Q}$; $\forall y\succ 0$

1) $\ln x=\ln y \Leftrightarrow x=y$ 2) $lnx>0\Leftrightarrow x>1$ 3) $x\le y\Leftrightarrow \ln x\le \ln y$ 4) $lnx<0\Leftrightarrow 0<x<1$

5) $ln(x\times y)=\ln x+\ln y$ 6) $e\simeq 2,71828\cdots$ et $\ln(e)=1$ 7) $ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln x$ 8) $ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$

9) $ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}lna$ 10) $ln(x^r)=r\ln x$ 11) $ln(e^x)=x$ $\forall x\in\mathbb{R}$ 12) $(e^{\ln x}=x)$ $(\forall x\succ 0)$

13) $e^x=y\Leftrightarrow x=\ln y$ $\forall x\in\mathbb{R}$ et $\forall y\succ 0$

B) Dérivée et primitives de la fonction $x\to ln(u(x))$

1)Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors la fonction :$f(x)=ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et $(\forall x\in I)$ ($f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$)

2)Si u est une fonction dérivable sur I et ne s'annule pas sur I alors les fonctions primitives de la fonction $x\to\frac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions ;$F(x)=l\,n(|u(x)|)+Cte$

C) FONCTIONS LOGARITHMIQUES DE BASE a ET PROPRIETES

Soit : $(a\succ 0)$ et $(a\neq 1)$; On note $\log_a$ la fonction logarithmique de base a définie sur $]0;+\infty[$ par :

$(\forall x\in]0,+\infty[)$ ($\log_a=\frac{\ln x}{\ln a}$)

$\forall x\succ 0$; $\forall r\in\mathbb{Q}$; $\forall y\succ 0$

1) $\log_a(x\times y)=\log_a x+\log_a y$ 2) $\log_a(1/x)=-\log_a x$ 3) $\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$

4) $a^x=e^{x\ln a}$ 5) $\log_e=\frac{\ln x}{\ln e}=\ln x$ 6) $\log_a(x^r)=r\log_a x$ 7) $\log_a(\sqrt{x})=(1/2)\log_a x$

8) $\forall x\in]0;+\infty[$; $(\log_a(x))'=\frac{1}{x\ln a}$ donc La fonction $\log_a$ est une bijection de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$

9) $(\forall x>0)(\forall y>0)(\log_a(x)=\log_a(y)\Leftrightarrow x=y)$

10) $(\forall x>0)(\forall r\in\mathbb{Q})(\log_a(x)=r\Leftrightarrow x=a^r$

11) $\log_a$ strictement croissante si $(a\succ 1)$ et $\log_a$ Strictement décroissante si $(0\prec a\prec 1)$

D)Cas particulier a = 10 ; logarithme décimal :

La fonction logarithmique de base 10 s'appelle la fonction logarithmique décimal et se note par log et $\forall x\in]0;+\infty[$: ($\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}$) et on a : $log\,(10)=1$

1) $(\forall x>0)$ $(\forall r\in\mathbb{Q})$ $(log(x)=r\Leftrightarrow x=10^r)$

2) $(\forall r\in\mathbb{Q})$ $(log\,(10^r)=r$ 3) $log(x)>r\Leftrightarrow x>10^r$

Prof: ATMANI NAJIB

La fonction Exponentielle :

A) Propriétés et définition : La fonction ln admet une fonction réciproque définie de $]-\infty;+\infty[$ Vers $]0;+\infty[$ appelée fonction Exponentielle népérienne notée : exp et qui est strictement monotone sur $\mathbb{R}$ et on a *pour tout x et y dans* $\mathbb{R}$:

1) $e^{x+y}=e^x\times e^y$ 2) $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ 3) $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$

4) $e^{rx}=\left(e^x\right)^r$ $(r\in\mathbb{Q})$ 5) $\left(e^{\ln x}=x\right)$ $(\forall x\succ 0)$ 6) $\left(\ln\left(e^x\right)=x\right)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

7) $(\forall y\succ 0)(\forall x\in\mathbb{R})\left(e^x=y\right)\Leftrightarrow\left(x=\ln y\right)$ 8) $(\forall y\succ 0)(\forall x\in\mathbb{R})\left(e^x=e^y\right)\Leftrightarrow\left(x=y\right)$

9) $(\forall y\succ 0)(\forall x\in\mathbb{R})\left(e^x\geq e^y\right)\Leftrightarrow\left(x\geq y\right)$

10)La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\left(e^x\right)'=e^x$

11)Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(\forall x\in I)(\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)})$

12)Si u est une fonction dérivable alors : une primitive de $u'(x)\,.\,e^{u(x)}$ est $e^{u(x)}$.

B)Représentation *et Tableau de variation* de la fonction *exp* :

Les courbes C_{ln} et C_{exp} sont symétriques par rapport à la première bissectrice (Δ) : $y=x$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$exp(x)$	0 ↗	1	e	$+\infty$

C)FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE *a*

Soit $a>0$ et $a\neq 1$; on a : 1)$(\forall x\in\mathbb{R})$ $a^x=e^{x\ln a}$ 2)fonction $\exp_a$ est définie sur $\mathbb{R}$

3) $\forall x\in\mathbb{R}$; $a^x\succ 0$ 4) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall y\in\mathbb{R}_+^*$ $a^x=y\Leftrightarrow x=\log_a y$

5) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\log_a\left(a^x\right)=x$ 6) $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $a^{\log_a(x)}=x$

7) $(\forall a\in\mathbb{R}*+)(\forall b\in\mathbb{R}*+)(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})$; $a^x\times a^y=a^{x+y}$ 8) $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ 9) $(a\times b)^x=a^x\times b^x$

10) $\left(a^x\right)^y=a^{x\times y}$ 11) $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$ 12) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$ 13) $\left(a^x\right)'=a^x\times\ln a$ 14) $a^{rx}=\left(a^x\right)^r$

15)a) $x\to a^x$ est strictement croissante si $a\succ 1$

b) $x\to a^x$ est strictement décroissante si $0\prec a\prec 1$

16)$(\forall x\in\mathbb{R})\left(a^x\right)'=\left(\ln a\right)a^x$

17)Si u est une fonction dérivable alors : une primitive de $u'(x)a^{u(x)}$ est $\dfrac{1}{\ln a}a^{u(x)}$

Q.36. Faculté de Médecine et de pharmacie « Marrakech » 2007

L'ensemble des solutions de l'équation : $3e^{2x}-4e^x+1=0$ dans $\mathbb{R}$ est :

A☐ $\varnothing$ **B**☐ $\{0;\ln 3\}$ **C**☐ $\{1\}$ **D**☐ $\{0\}$ **E**☐ $\{-\ln 3;0\}$

Solution : On procède par élimination des réponses :

Prof : ATMANI NAJIB

$3e^{2\times 0}-4e^{0}+1=3e^{0}-4e^{0}+1=3-4+1=0$ donc : $0\in S$ $\Rightarrow$**A ☐ faux et C ☐ faux**

$3e^{2\times(-\ln 3)}-4e^{-\ln 3}+1=3\frac{1}{e^{\ln 9}}-4\frac{1}{e^{\ln 3}}+1=\frac{3}{9}-\frac{4}{3}+1=\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+1=0$ Donc : $-\ln 3\in S$

$\Rightarrow$**B ☐ faux et D ☐ faux**

On doit donc cocher **E ☒**

Q37. Concours de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0[$ par : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

A ☐ La droite d'équation : $y=-x+4$ est une asymptote a C_f au voisinage de $-\infty$

B ☐ La dérivé de $f(x)$ en $x=-5$ est $f'(-5)=7$

C ☐ La droite d'équation : $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ est une tangente a C_f au point M d'abscisse : $x_M=-3$

D ☐ La fonction : $H(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est une primitive de la fonction f

E ☐ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=+\infty$

Solution : On procède par élimination des réponses :

Pour : A ☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x+4)=\lim\limits_{x\to-\infty} 2x+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=-\infty\neq 0$ $\Rightarrow$A ☐ faux

Pour : B ☐ f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et $f'(x)=1-\frac{6}{x(x-1)}\Rightarrow f'(-5)=\frac{4}{5}$ $\Rightarrow$B ☐ faux

Pour : **C** ☐ On a : $f'(-3)=1-\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

L'équation de la tangente au point M d'abscisse : $x_M=-3$ est : $y=f(-3)+f'(-3)(x+3)=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\frac{3}{4}$ On doit donc cocher C ☒ c'est fini

Mais on peut vérifier facilement que : D et E sont fausse

Remarque2 : On traite d'abord les questions qu'on trouve faciles

Q38. Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $g(x)=\frac{(2x)^x}{(x)^{2x}}$ pour tous $x\succ 0$

la $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ est:

A ☐ $+\infty$ **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ 0 **E** ☐ g n'admet pas de limite en $+\infty$

Solution : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(2x)^x}{(x)^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x\ln(2x)}}{e^{2x\ln(x)}}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x\ln(2x)-2x\ln(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(\ln 2x-2\ln(x))}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(\ln x+\ln 2-2\ln(x))}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x(\ln 2-\ln(x))}=0$

On doit donc cocher **D☒**

Q39. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

L'ensemble des solutions de l'équation : $\left(\frac{1}{13}\right)^{x^2-3x}=169$ dans $\mathbb{R}$ est :

☐ $S=\{1\}$ ☐ $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$ ☐ $S=\{1;2\}$ ☐ $S=\{-1;1;2\}$ ☐ $\varnothing$

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de Cours : LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

A) Définition : Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.
L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Remarque : Pour simplifier l'écriture d'une équation différentielle on note l'inconnu (qui est une fonction) y au lieu de $y(x)$.

B) L'équation : $y' = ay + b$ $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}*$ et $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$.

Soit a un réel non nul et b un réel ; (E) $y' = ay + b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ .La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions :

$x \to y(x) = \lambda e^{x} - \dfrac{b}{a}$ où λest un réel.

Remarque : Le réel λ dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales

C) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES : $ay'' + by' + cy = 0$

Soit a un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.

1) Considérons l'équation différentielle : (E): $ay'' + by' + cy = 0$

L'équation (1): $ar^2 + br + c = 0$ à variable réelle r s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$.

2)L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est dite à coefficients constants si a, b et c sont des réels donnés.
On Supposera $a \neq 0$

a) Linéarité : L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ possède la propriété suivante Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est aussi une solution. A cause de cette propriété, on dit que l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ est linéaire.

b) Résolution de $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{ay'' + by' + cy = 0}$

Soit l'équation différentielle :(E) $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a \neq 0$ et soit (E_1): $ar^2 + br + c = 0$ son équation Caractéristique. $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E_1)

1) Si $\Delta > 0$ l'équation (E_1) a deux racines : r_1 et r_2 Réelles et distinctes et les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B réels

2) Si $\Delta < 0$ l'équation (E_1) a deux racines : z_1 et z_2 complexes conjugués et si : $z_1 = p + qi$ alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = e^{px}\left(A\cos qx + B\sin qx\right)$ où A et B réels

3) Si $\Delta = 0$ l'équation (E_1) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fonctions :
$y(x) = \left(Ax + B\right)e^{rx}$ Où A et B sont des réels.

Remarque : Les solutions de l'équation différentielle :(E): $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions :
$y = \alpha cos\omega x + \beta\ sin\omega x$ où α et β sont des réels.

<u>Q40. Concours Médecine Dentaire Juillet 2018</u>

On considère l'équation différentielle : (E) $y'' - 2y' + 5y = 0$

la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

A ☐ $e^{2x}\left(a\cos x + b\sin x\right)$ **B** ☐ $\left(ax + b\right)e^{2x}$ **C** ☐ $ae^{x} + be^{2x}$ **D** ☐ $e^{x}\left(a\cos 2x + b\sin 2x\right)$

<u>Solution :</u> Son équation Caractéristique est : $r^2 - 2r + 5 = 0$

Son discriminant est : $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4\times 1\times 5 = 4 - 20 = -16$

Deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + i\sqrt{16}}{2} = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i \Rightarrow z_1 = 1 + 2i = p + qi$

Alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x) = e^{px}\left(A\cos qx + B\sin qx\right)$ où A et B réels

C'est-à-dire : $y(x) = e^{1x}\left(A\cos 2x + B\sin 2x\right)$ On doit donc cocher **D**☒

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de Cours : SUITES NUMERIQUES

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

A) Suite majorée minorée bornée croissante décroissante convergente

- $(u_n)_{n\in I}$ est majorée s'il existe un réel M tel que : $u_n \leq M \quad \forall n \in I$
- $(u_n)_{n\in I}$ est minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in I : m \leq u_n$
- Une suite est bornée si elle est majorée et minorée.

$(u_n)_{n\in I}$ est bornée si et seulement si: s'il existe un réel positif M tel que : $\forall n \in I \ |u_n| \leq M$

- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si et seulement si: $\forall n \in I$; $u_{n+1} \geq u_n$
- La suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si et seulement si: $\forall n \in I$; $u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite qui tend vers une limite finie l s'appelle une suite convergente sinon elle est dite divergente
- Toute suite convergente est bornée
- Si une suite admet une limite finie l cette limite est unique
- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

B) Suite arithmétique : $(u_n)_{n\in I}$ arithmétique : si et seulement si: $\forall n \in I$; $u_{n+1} = u_n + r$ Le réel r la raison de la suite et si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r et u_p l'un de ses termes alors :1)

$u_n = u_p + (n-p)r \quad ; \forall n \in I$ 2) $S_n = u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$

3) $u_{p-1} + u_{p+1} = 2u_p$

4) Si $r \succ 0$ $(u_n)_{n\in I}$ est une suite strictement croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Si $r \prec 0$ $(u_n)_{n\in I}$ est une suite strictement décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

5) Exemple de suite arithmétique : $u_n = an + b$ et $r = a$

6) la raison d'une suite arithmétique est : $r = \frac{u_n - u_p}{n-p}$

Exemple :1) Calculer : $S_1 = 1+3+5+...+99$

2) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... + 100x^{99}$; calculer : $f(-1)$

Solution : 1) $S_1 = 1+3+5+...+99$: somme des termes d'une suite arithmétique raison $r = 2$

$u_0 = 1$ et $u_n = u_0 + nr = 1 + 2n = 99 \Rightarrow n = 49$

$S_1 = \frac{(49-0+1)}{2}(u_0 + u_{49}) = 50 \times 50 = 2500$

2) $f(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100 = (1+3+5+...99) - (2+4+6+..100)$

$S_2 = 2+4+6+..100$: somme des termes d'une suite arithmétique raison $r = 2$

$u_0 = 2$ et $u_n = u_0 + nr = 2 + 2n = 100 \Rightarrow n = 49$

$S_1 = \frac{(49-0+1)}{2}(u_0 + u_{49}) = 50 \times 51$ et $f(-1) = 50 \times 50 - 50 \times 51 = -50$

C)Suite géométrique : $(u_n)_{n\in I}$ géométrique si et seulement si : $u_{n+1} = qu_n \quad \forall n \in I$;

q s'appelle la raison de la suite.

Prof : ATMANI NAJIB

Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q et si p est un entier naturel alors :

1) $u_n = q^{n-p}u_p \quad \forall n\in I$ 2) $u_{p-1}\times u_{p+1} = (u_p)^2$

3) $s_n = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + ... + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

Si $q = 1$ alors : $s_n = (n-p+1)u_p$ et Si $q \neq 1$ alors : $s_n = u_p \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

4) la raison d'une suite géométrique vérifie : $q^{n-p} = \dfrac{u_n}{u_p}$ donc : $q = \sqrt[n-p]{\dfrac{u_n}{u_p}}$ si $q \succ 0$

Remarques :1) Si on a : $v_n = e^{u_n}$

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors (v_n) est une suite géométrique de raison $q = e^r$

2)Si on a : $v_n = \ln(u_n)$ et $u_n \succ 0$

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q alors (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = \ln q$

3) Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors : $(k\times u_n)$ est une suite arithmétique de raison $k\times r$

4) Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q alors $(k\times u_n)$ est une suite géométrique de raison q

5) Si $u_n = an+b+q^n$ alors : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} + u_n = a\dfrac{n(1+n)}{2} + (n+1)b + \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

6) La limite d'une suite polynôme est la limite de son plus grand terme

7) La limite d'une suite rationnelle est la limite du rapport des termes de plus grand degré

8) $\lim|u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim u_n = 0$

9)Si $(u_n)_{n\in I}$ est une suite convergente alors elle est bornée et la réciproque st fausse

10) Toute suite croissante et minorée par son premier terme et toute suite décroissante est majorée par son premier terme

10) Théorème de Césaro : Si $\lim u_n = L \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_1+u_2+...+u_n}{n} = L$

11)Si (u_n) est une suite convergente alors tout suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ de (u_n) est convergente est converge vers la même limite en particulier (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

et si on montre que (u_{2n}) et (u_{2n+1})ne converge pas vers la même limite alors (u_n) diverge (bon)

<u>Q41. Concours de Médecine et pharmacie Oujda 2015</u>

On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par : $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1}\dfrac{2}{3^p}$ Si $n \geq 1$; $v_n = -5\left(\sqrt{2}\right)^n$ Alors est égale à : **A** ☐ : $u_n = 2(1-3^n)$; **B** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$; **C** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$; **D** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -5$; **E** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

<u>Solution :</u> On remarque que : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -5\left(\sqrt{2}\right)^n = -\infty$ car $\sqrt{2} \succ 1$

$\Rightarrow$**B**☐ fausse **et D**☐ fausse

$u_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1}\dfrac{2}{3^p} = 2\sum\limits_{p=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^p = 2\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^0 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^1 + ... + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ Somme des termes d'une suite géométrique raison

$q = \dfrac{1}{3}$ donc : $u_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1}\dfrac{2}{3^p} = 2\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}} = 2\dfrac{3}{2}\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right) = 3\left(1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$

Prof: ATMANI NAJIB

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $\left(0 \prec \frac{1}{3} \prec 1\right)$ On doit donc cocher **C**☒

Q42 : Concours de Médecine et pharmacie Oujda

La somme $S = \sum\limits_{k=0}^{k=35} k^2$ est égale à :

A ☐ 14512 **B** ☐ 16510 **C** ☐ 14910 D ☐ 14215 E ☐ *autre*

Solution : Remarque : $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ c'est une somme usuelle à connaitre

$$S = \sum_{k=0}^{k=35} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 35^2 = \frac{35(35+1)(70+1)}{6} = \frac{35\times 36\times 71}{6} = 35\times 6\times 71 = 14910$$

On doit donc cocher **C**☒

Q43. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

Soit le produit $P_n = \prod\limits_{k=1}^{k=n}(n+1)^k$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ alors **:**

A ☐ $P_n = (n+1)^n$ **B** ☐ $P_n = (n+1)^{\frac{n+1}{2}}$ **C** ☐ $P_n = (n-1)^{n^{\frac{n+1}{2}}}$ **D** ☐ $P_n = (n+1)^{n^{\frac{n-1}{2}}}$

E ☐ **Autre**

Solution : Methode1 : Remarque : $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ c'est une somme usuelle à connaitre

$$P_n = \prod_{k=1}^{k=n}(n+1)^k = (n+1)^1 \times (n+1)^2 \times \ldots \times (n+1)^n = (n+1)^{1+2+\ldots+n} = (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

On doit donc cocher **E**☒ autre

Methode2 : On procède par élimination des réponses : $P_1 = \prod\limits_{k=1}^{k=1}(n+1)^k = (1+1)^1 = 2$

et $P_2 = \prod\limits_{k=1}^{k=2}(n+1)^k = (2+1)^1 \times (2+1)^2 = 3\times 9 = 27$

Pour : A ☐ $P_1 = (1+1)^1 = 2$ $\Rightarrow$A ☐ probablement vraie

Pour : B ☐ $P_1 = (1+1)^1 = 2$ $\Rightarrow$B ☐ probablement vraie

Pour : **C** ☐ On a : $P_1 = (1-1)^{1^{\frac{1+1}{2}}} = 0$ $\Rightarrow$C ☐ Faux

Pour : **D**☐ On a : $P_1 = (1+1)^{1^{\frac{1-1}{2}}} = 2^0 = 1$ $\Rightarrow$D ☐ Faux

Pour : A ☐ $P_2 = (2+1)^2 = 9$ $\Rightarrow$A ☐ Faux

Pour : B ☐ $P_2 = (2+1)^{\frac{2+1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27}$ $\Rightarrow$B ☐ Faux

On doit donc cocher E ☒ *autre*

Q44. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

La somme $S = \sum\limits_{k=0}^{k=2020} \frac{1}{i^k}$ est égale à : **A** ☐ 0 **;** **B** ☐ 1 **;** **C** ☐ $\frac{1}{i-1}$ **;** **D** ☐ $i-1$ **;** **E** ☐ *autre*

Solution : Remarque : $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ c'est une somme usuelle à connaitre

Prof: ATMANI NAJIB

$$S=\sum_{k=0}^{k=2020}\frac{1}{i^k}=\frac{1}{i^0}+\frac{1}{i^1}+\frac{1}{i^2}+\ldots+\frac{1}{i^n}=\left(\frac{1}{i}\right)^0+\left(\frac{1}{i}\right)^1+\left(\frac{1}{i}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{i}\right)^n$$

Somme des termes d'une suite géométrique raison $q=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i$

$$S=\frac{1-(-i)^{2021}}{1-(-i)}=\frac{1-(-i)^{2021}}{1+i}=\frac{1-(-i)(-i)^{2020}}{1+i}=\frac{1-(-i)\left((-i)^2\right)^{1010}}{1+i}=\frac{1-(-i)(-1)^{1010}}{1+i}=\frac{1+i}{1+i}=1$$

On doit donc cocher **B**☒

Q45. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

Soit le produit $P_n=\prod_{k=-n}^{k=n}k$ alors : **A** ☐ $P_n=(n!)^2$ **B** ☐ $P_n=(-1)^n(n!)^2$ **C** ☐ $P_n=0$ **D** ☐ $P_n=-(n!)^2$ **E** ☐ $P_n=(-1)^{n+1}(n!)^2$

Solution : $P_n=\prod_{k=-n}^{k=n}k=-n\times\ldots\times 0\times\ldots\times n=0$ (On doit passer par 0 dans le produit)

On doit donc cocher **C**☒

Q46. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

$\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n=\prod_{k=0}^{n}\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}$

A ☐ $u_n=\frac{6n+3}{n+4}$ **B** ☐ $u_n=\frac{n+4}{3n+6}$ **C** ☐ $u_n=\frac{n+4}{6n+3}$ **D** ☐ $u_n=\frac{3n+6}{n+4}$ **E** ☐ $u_n=\frac{3n-6}{n+4}$

Solution : On procède par élimination des réponses : $u_0=\prod_{k=0}^{0}\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}=\frac{0^2+5\times0+6}{0^2+5\times0+4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Pour : A ☐ $u_0=\frac{3}{4}$ ⇒A ☐ Faux

Pour : B ☐ $u_0=\frac{0+4}{3\times0+6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ⇒B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $u_n=\frac{0+4}{6\times0+3}=\frac{4}{3}$ ⇒C ☐ Faux

Pour : **D**☐ On a : $u_0=\frac{3\times0+6}{0+4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ ⇒**D** ☐ probablement vraie

Pour : **E** ☐ $u_0=\frac{3\times0-6}{0+4}=-\frac{6}{4}=-\frac{3}{2}$ ⇒A ☐ Faux

On doit donc cocher **D**☒

Remarque1 : pour d'autre exercices si 2 propositions sont vraies on doit calculer : u_1 ou $u_2\ldots u_p$

Remarque2 : pour cet exercice : $u_1=\prod_{k=0}^{1}\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}=\frac{0^2+5\times0+6}{0^2+5\times0+4}\times\frac{1^2+5\times1+6}{1^2+5\times1+4}=\frac{3}{2}\times\frac{12}{10}=\frac{9}{5}$

$$u_2=\prod_{k=0}^{2}\frac{k^2+5k+6}{k^2+5k+4}=\frac{0^2+5\times0+6}{0^2+5\times0+4}\times\frac{1^2+5\times1+6}{1^2+5\times1+4}\times\frac{2^2+5\times2+6}{2^2+5\times2+4}=\frac{9}{5}\times\frac{10}{9}=2$$

Prof : ATMANI NAJIB

D) limites et l'ordre et techniques de calculs des limites :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites

1) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers L et : $(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N): u_n\geq 0$ Alors : $L\geq 0$

2) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes tels que : $(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\ v_n\leq u_n)$ Alors : $\lim v_n\leq \lim u_n$

3) si $(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\ v_n\leq u_n)$ et $\lim v_n=+\infty$ alors : $\lim u_n=+\infty$

4) si : $(\exists N\in\mathbb{N})(\forall n>N)(\ v_n\leq u_n)$ et $\lim u_n=-\infty$ alors : $\lim v_n=-\infty$

5) si l un réel tel que: $|u_n-l|\leq v_n \quad \forall n\geq p$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

6) Si $w_n\prec u_n\prec v_n$ et $\forall n\geq p$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=l$ alors : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

7) si $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n)=\pm\infty$ Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin n}{f(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos n}{f(n)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{f(n)}=0$

8)Si $|u_n|\leq M$ (c'est-à-dire : (u_n) bornée) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n=0$

9) si $0\leq u_{n+1}\leq ku_n$ et $\forall n\geq p$ et $0\prec k\prec 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$ exemple : $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$ (prendre $n\geq 3$ et calculer :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2}{n+1}\prec\dfrac{1}{2}\prec 1$ donc : $0\leq u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}u_n$ et $0\prec\dfrac{1}{2}\prec 1$.....

10) si $0\prec ku_n\leq u_{n+1}$ et $\forall n\geq p$ et $1\prec k$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

Exemple : $\forall n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}=e^{u_n}+u_n$ et $u_0=-2017$.

On pose : $v_n=e^{u_n}\Rightarrow v_{n+1}=v_ne^{v_n}$, $v_0=e^{u_0}=e^{-2017}\succ 0\Rightarrow v_0\leq v_n$ or $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}=e^{v_n}\Rightarrow e^{u_0}\leq\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

$\Rightarrow 0\prec e^{u_0}v_n\leq v_{n+1}$ et $e^{u_0}\succ 1\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

E) Suite de la forme : $v_n=f(u_n)$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; et (u_n)une suite numérique telle que

$(\exists N\in\mathbb{N})$ $(\forall n>N)$ ($u_n\in I$) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$ et f continue en l Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)=f(l)$

F) limite de Suite de la forme : a^n **et** n^p

1) a) si $a\succ 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=+\infty$ b) si $-1\prec a\prec 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n=0$ c) si $a\leq -1$ (a^n) n'a pas de limites

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p=+\infty$ si $p\in\mathbb{N}^*$

G) Suite de la forme : $u_{n+1}=f(u_n)$: Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n)une suite numérique telle que :

a) f est continue sur I b) $f(I)\subset I$ c) $(\forall n\in\mathbb{N})(\ u_{n+1}=f(u_n))$

d) $u_0\in I$ (donc $(\forall n\in\mathbb{N})(\ u_n\in I)$ e) (u_n) est convergente

Alors la suite (u_n)tend vers l solution de l'équation :$f(x)=x$

H) Les suites adjacentes :

1) Deux suites numériques (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

a) L'une est croissante l'autre est décroissante.

Prof : ATMANI NAJIB

b) $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$

2)Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes et (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante alors

$(\forall n \in \mathbb{N})(\ u_n \leq v_n$

I) Les suites de la forme : Etude : $u_{n+1} = au_n + b$

1) $u_{n+1} = au_n + b$

a) Si $a = 0$ la suite est stationnaire.
b) Si $a = 1$ la suite est arithmétique de raison : $r = b$
c) Si $b = 0$ la suite est géométrique de raison : $q = a$
d) Si $a \neq 1$ et $b \neq 0$ la suite n'est ni arithmétique ni géométrique

On peut définir une suite géométrique : (v_n) : $v_n = u_n - l$ de raison : $q = a$ avec : $l = \frac{b}{1-a}$ (solution de l'équation : $x = ax + b$

et si $-1 \prec a \prec 1$ et $b \neq 0$ on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et si $a \succ 1$ et $b \neq 0$ on a : $\lim_{n\to+\infty} u_n = sign(v_0) \times \infty$

2) $u_{n+1} = au_n + b$; $a \neq 1$

Pour déterminer la $\lim_{n\to+\infty} u_n$ On résout l'équation : $x = ax + b$ sa solution est : $\alpha = \frac{b}{1-a}$

a)Si $a \succ 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

- si $u_0 \succ \alpha$ et (u_n) est croissante alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- si $u_0 \prec \alpha$ et (u_n) est décroissante alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b)Si $0 \prec a \prec 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

- si $u_0 \succ \alpha$ alors (u_n) est décroissante

- si $u_0 \prec \alpha$ alors (u_n) est croissante

c)Si $-1 \prec a \prec 0$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ et (u_n) n'est ni croissante ni décroissante

d)Si $a \prec -1$ et $u_0 \neq \alpha$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

<u>Q47. Exemple1 : ☹Médecine Oujda : 2013-2014</u>

$\forall n \in \mathbb{N};\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ et $u_0 = -2$ et $v_n = u_n - 2$

Laquelle des propositions suivantes est vraie :

A) (u_n) est décroissante **B)** $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ **C)** (v_n) est une suite arithmétique de raison : $r = \frac{1}{2}$

D) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n = -\frac{1}{2^{n-2}}$ **E)** $u_n = 2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

<u>Solution :</u> 1) $u_1 = \frac{1}{2}(-2) + 1 = 0 \succ u_0$ et $a = \frac{1}{2} \succ u_0$

A) (u_n) est décroissante $\Rightarrow (A)$: *faux*

C) $l=\frac{1}{2}l+1 \Leftrightarrow l-\frac{l}{2}=1 \Leftrightarrow \frac{l}{2}=1 \Leftrightarrow l=2$ donc : automatiquement (v_n) : $v_n=u_n-l=u_n-2$ est une suite géométrique de raison : $q=a=\frac{1}{2}$ et donc : $v_n=v_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=-4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=-2^2\times\frac{1}{2^n}=-\frac{1}{2^{n-2}} \Rightarrow (D): Vraie$

fin les autres sont faux

Remarque : Puisque : $u_n=v_n+2$ alors : $u_n=2-4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\lim\limits_{n\to+\infty} 2-4\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$

Q48. Exemple2 : ☹ **Médecine Oujda**

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}=-\frac{1}{3}u_n+1$ et $u_0=1$ et $v_n=u_n-\frac{3}{4}$

Laquelle des propositions suivantes est vraie :

A) (u_n) est croissante **B)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ **C)** (v_n) est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{3}$

D) $\forall n\in\mathbb{N};\ v_n=-\frac{1}{4\times 3^n}$ E) $u_n=\frac{1}{4}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\right]$

Solution : $\frac{3}{4}$ est solution de $x=-\frac{1}{3}x+1$ donc : (bon) automatiquement (v_n) : $v_n=u_n-l=u_n-\frac{3}{4}$ est une suite géométrique de raison : $q=a=-\frac{1}{3}$

A) $a=-\frac{1}{3}\prec 0 \Rightarrow (u_n)$ est n'est pas monotone $\Rightarrow (A)$: *faux*

B) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\neq 1$ si la limite existe c'est $\frac{3}{4} \Rightarrow (B)$: *faux*

Remarque : en appliquant le résumé : $-1\prec -\frac{1}{3}\prec 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{3}{4}$ et (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

C) (v_n) est une suite géométrique de raison : $q=\frac{1}{3} \Rightarrow (C)$: *faux* car $a=q=-\frac{1}{3}$

D) $\forall n\in\mathbb{N};\ v_n=v_0\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}=4\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \Rightarrow (D)$: *faux*

E) $u_n=\frac{1}{4}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n+3\right]$ donc : automatiquement $\Rightarrow (E)$: *Vraie*

Q49. Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

$(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite définie par $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ Si $n\geq 2$;

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A ☐ : 1 ; **B** ☐ 0 ; **C** ☐ $+\infty$; **D** ☐ $\frac{1}{2}$; **E** ☐ La limite n'existe pas

Solution : $u_n=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\left(\frac{2^2-1}{2^2}\right)\times\left(\frac{3^2-1}{3^2}\right)\times\ldots\times\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$

Prof : ATMANI NAJIB

$$u_n=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\times\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\times\ldots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\ldots\times\frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)}\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}$$

$u_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}$ **et** $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}\times\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$ On doit donc cocher **D** ☒

Q50. Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

Soit : $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ deux suites définies par : $u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ et $\ln(v_n)=u_n\ln2$

Choisir la bonne réponse : **A** ☐ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ln2$ **B** ☐ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ln2$

C ☐ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=1$ **D** ☐ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=2$ **E** ☐ : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=2$

Solution : $u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ somme des termes d'une suite

géométrique de raison : $q=\frac{1}{2}$ et $u_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$ car : $-1\prec\frac{1}{2}\prec1$ et comme : $v_n=e^{u_n\ln2}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=v_n=e^{\ln2}=2$ On doit donc cocher **E** ☒

Q51. Concours de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda :

Choisir la bonne réponse

A ☐ : Si $n\in\mathbb{N}^*$; $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\ldots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{n+3}{4(n+1)\times(n+2)}$

B ☐ Si $n\in\mathbb{N}^*$; $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

C ☐ Si $n\in\mathbb{N}^*$; $\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{90}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)$

D ☐ Si $n\in\mathbb{N}^*$ et $S_n=\sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{k}{n^2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=0$

E ☐ Si $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq2$ alors : $1!+2!+\ldots+(n-1)!\geq n!$

Solution : On procède par élimination des réponses :

Pour : A ☐ **:** Méthode1

Si $n=2$; $\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}\neq\frac{2+3}{4(2+1)\times(2+2)}\Rightarrow$ A ☐ faux

Méthode2 : On a : et on détermine les nombres : a ; b et c

$\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{n+2}$ Et on trouve que : $\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{2}-\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}+\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}\Rightarrow\text{A ☐ faux}$$

Prof : ATMANI NAJIB

Pour : **C** ☐ Si $n\in\mathbb{N}^*$; $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{90}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)$

Pour : **C** ☐ **:** <u>Méthode1</u>

Si $n=1$; $\sum_{k=2}^{1+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{90}\left(1+\frac{1}{10^1}\right)=\frac{1}{90}\frac{11}{10}=\frac{11}{900}$ et $\sum_{k=2}^{1+1}\frac{1}{10^k}\neq\frac{1}{90}\left(1+\frac{1}{10^1}\right)$ $\Rightarrow$C ☐ faux

<u>Méthode2 :</u> $\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k}=\frac{1}{10^2}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right)=\frac{1}{90}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\Rightarrow$C ☐ faux

Pour : **E** ☐ Si $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$ alors : $1!+2!+...+(n-1)!\geq n!$

Si $n=2$; $1!\geq 2!$ $\Rightarrow$E ☐ faux

On doit donc cocher **B** ☒

<u>Remarque :</u> $1^3+2^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ c'est une somme usuelle à connaitre

J) Les suites de la forme : Etude : $u_{n+1}=\frac{au_n+b}{cu_n+d}$ et u_0 donné ; $c\neq 0$; $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

1cas : $\Rightarrow f'(x)=\frac{ad-bc}{cx+d}=0$ $\Rightarrow(u_n)$ est stationnaire $ad-bc=0$:

2cas : $ad-bc\neq 0$: **1)** On résout l'équation : $x=\frac{ax+b}{cx+d}$

a) Si l'équation admet une seule solution : l on peut définir une suite arithmétique :

(v_n) : $v_n=\frac{1}{u_n-l}$ de raison : $r=v_1-v_0=\frac{2c}{a+d}$ et donc : $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$

et on a : $v_n=v_0+nr\Rightarrow u_n=\frac{1}{v_n}+l$; $\lim_{n\to+\infty}v_n=\pm\infty$ (dépond de r) et donc : $\lim_{n\to+\infty}u_n=l$

<u>Exemple :</u> $u_{n+1}=\frac{3u_n-4}{u_n-1}$ et $u_0=3$ et $v_n=\frac{2}{u_n-2}$

Solution : $x=\frac{3x-4}{x-1}\Leftrightarrow x(x-1)=3x-4\Leftrightarrow x^2-4x+4=0\Leftrightarrow(x-2)^2=0\Leftrightarrow x-2=0\Leftrightarrow x=2$

L'équation admet une seule solution : $l=2$ on peut définir une suite arithmétique :

(v_n) : $w_n=\frac{1}{u_n-2}$ de raison : $r'=\frac{2c}{a+d}=\frac{2}{2}=1$ et donc : $v_n=2\frac{1}{u_n-2}=2w_n$ est une suite arithmétique de raison : $r=2r'=2$: $\lim_{n\to+\infty}u_n=2$

b) Si l'équation admet deux solutions : $l_1\neq l_2$ On peut définir une suite géométrique : (v_n) : $v_n=\frac{u_n-l_1}{u_n-l_2}$

et de raison : $q=\frac{v_1}{v_0}=\frac{cl_2+d}{cl_1+d}$ et donc : $u_n=\frac{l_2v_n-l_1}{v_n-1}$ et $v_n=v_0q^n$

-Si $-1\prec q\prec 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty}v_n=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=l_1$

-Si $q\succ 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty}v_n=\pm\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}u_n=l_2$

-Si $q\leq -1$ alors : (v_n) n'a pas de limites et donc : (u_n) n'a pas de limites

Prof : ATMANI NAJIB

-Si $q=1$ $\Rightarrow (v_n)$ est stationnaire $\Rightarrow (u_n)$ est stationnaire

<u>Remarque :</u> pour la monotonie de $(u_n) \Rightarrow f'(x)=\dfrac{ad-bc}{cx+d}$

1) Si : $ad-bc>0$ $\Rightarrow$ f est croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone.

Plus précisément :

❶ Si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante.

❷ Si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante.

2) Si f est décroissante sur l'intervalle I alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires (l'une croissante l'autre décroissante !!)

<u>Q52. Exemple2 : ☹Médecine rabat 2014</u>

$u_{n+1}=\dfrac{3}{4-u_n}$ et $u_0=0$ et $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-3}$ et $w_n=\ln v_n$

<u>Répondre par vrai ou faux devant les propositions suivantes :</u>

1) $\forall n \in \mathbb{N};\ v_n=\dfrac{1}{3^{n+1}}$ 2) (w_n) une suite arithmétique

3) $\forall n \in \mathbb{N};\ \ln(v_0 \times v_1 \times ... v_n)=-(n+1)(n+2)\ln(\sqrt{3})$ 4) (u_n) est convergente

<u>Solution :</u> $u_{n+1}=\dfrac{3}{4-u_n}$; $f(x)=\dfrac{3}{4-x}$; $x=\dfrac{3}{4-x} \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$

$\Rightarrow$ L'équation admet deux $(l_1=1) \neq (l_2=3)$

$\Rightarrow v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n-3}$: (v_n) une suite géométrique de raison : $q=\dfrac{v_1}{v_0}=\dfrac{cl_2+d}{cl_1+d}=\dfrac{4-3}{4-1}=\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow v_n=v_0 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=\dfrac{1}{3^{n+1}} \Rightarrow (1): vraie$

2)On $w_n=\ln v_n$ et puisque (v_n) une suite géométrique de raison : $q=\dfrac{1}{3}$ alors : (w_n) une suite arithmétique de raison : $r=\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\ln(3) \Rightarrow (2): vraie$

3) $\ln(v_0 \times v_1 \times ... v_n)=\ln(v_0)+\ln(v_1)+...\ln(v_n)=w_0+w_1+...+w_n$ et (w_n) une suite arithmétique de raison : $r=-\ln(3)$

$\ln(v_0 \times v_1 \times ... v_n)=(n+1)\dfrac{w_0+w_n}{2}=(n+1)\dfrac{-\ln 3-\ln 3-(\ln 3)n}{2}=-\dfrac{(\ln 3)(n+1)(2+n)}{2} \Rightarrow (3): vraie$

4) (u_n) est convergente $\Rightarrow (4): vraie$ Puisque : $-1 \prec q=\dfrac{1}{3} \prec 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l_1=1$

<u>Q53. Exemple3 : ☹ Concours de Médecine Marrakech : 2014</u>

Choisir la bonne réponse

$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ u_{n+1}=\dfrac{5u_n}{3u_n+5}$ et $u_1=1$ et $v_n=\dfrac{5}{u_n}$; (v_n) une suite arithmétique de raison

1) $-\dfrac{1}{3}$ 2) $\dfrac{1}{3}$ 3) (v_n) n'est pas arithmétique 4) 3 5) $\dfrac{1}{2}$

Prof : ATMANI NAJIB

Solution : $u_{n+1}=\frac{5u_n}{3u_n+5}$; $f(x)=\frac{5x}{3x+5}$; $x=\frac{5x}{3x+5}\Leftrightarrow 3x^2=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow$ l'équation admet une solution unique : $(l=0)\Rightarrow(v'_n)$: $v'_n=\frac{1}{u_n-l}=\frac{1}{u_n}$ est arithmétique de raison : $r'=\frac{2c}{a+d}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

et donc : $v_n=\frac{5}{u_n}$ est aussi est arithmétique de raison : $r=5\times\frac{3}{5}=3\Rightarrow(4):la\,bonne\,reponse$

Exemple : $u_{n+1}=\frac{7u_n+3}{3u_n+7}$ et $u_0=\frac{7}{3}$ et $v_n=\frac{u_n-1}{u_n+1}$

Autre cheminement : On résout l'équation : $x=\frac{ax+b}{cx+d}$ et soient α et β ses solutions s'ils existe

1)Si (u_n) est convergente alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha\,ou\,\beta$

2)On détermine : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ à partir des remarques sur (u_n)

K) Les suites de la forme : Etude : $u_0=a$ et $u_{n+1}=(u_n)^p$; $p\in\mathbb{N}$ et $p\geq 2$

1)Si $a\succ 1$ alors : (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$

2) si $0\prec a\prec 1$ alors (u_n) est décroissante alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

L) Les suites de la forme : Etude : $u_0=a$ et $u_{n+1}=\sqrt[p]{u_n}$; $p\in\mathbb{N}$ et $p\geq 2$

1)Si $a\succ 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

2) si $0\prec a\prec 1$ alors (u_n) est croissante

3) si $a\succ 1$ alors (u_n) est décroissante

M) Les suites de la forme : Etude : $u_{n+1}\leq ku_n$ et $0\prec k\prec 1$

Si $u_n\succ 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

N) Les suites de la forme : $v_n=u_n^{f(n)}$ avec (u_n) une suite strictement positive

Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ On utilise la relation : $v_n=e^{\ln(v_n)}$ Exemple : $u_n=\sqrt[n]{n}$ et $v_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

O) Les suites de la forme : $u_n=\frac{a^n+b^n}{c^n+d^n}$ avec : $(a;b;c;d\succ 0)$ et $(d\succ c)$: Pour déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ on factorise au numérateur par b^n et on factorise au dénominateur par d^n : Exemple : $u_n=\frac{7^n+3^n}{2^n-5^{n+1}}$

P) Les suites de la forme : $u_n=\frac{\cos P(n)}{n^m}$ et $u_n=\frac{\sin P(n)}{n^m}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0$

Q) Les suites de la forme : $u_n=\frac{n^m}{a^n}$ et $a\succ 0$

- Si $a\succ 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

- Si $0\prec a\prec 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ Exemple : $u_n=\frac{n^{100}}{2^n}$ et $v_n=\frac{n^{100}}{(0,3)^n}$

Prof : ATMANI NAJIB

R) Etude Des suites récurrentes de la forme : $u_{n+1} = f(u_n)$

Voici une méthode générale pour étudier une suite récurrente (u_n)définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction définie sur un intervalle I

Définition : Une suite (u_n) définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f une fonction définie sur un intervalle I

<u>Exemple :</u> Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

Donc : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ et $u_0 = 0$

• <u>Etape 1</u> : Etudier la fonction f sur son ensemble de définition (monotonie, croissance,)

• <u>Etape 2</u> : Résoudre l'équation aux limites possibles $l = f(l)$. En effet, si la suite (u_n)converge, sa limite sera solution de cette équation.

• <u>Etape 3</u> : Déterminer un intervalle I stable par f sur lequel f est monotone, et tel que $u_0 \in I$. On sait alors que $u_n \in I$ pour tout n≥0. Souvent, c'est le tableau de variations de f qui donne la réponse.

Il a des cas où on ne peut pas y arriver pour u_0, mais où c'est vrai pour u_1, ou u_2.

Par exemple, si $u_{n+1} = u_n^2$ et $u_0 = -2$, alors $u_1 = 4$ est dans l'intervalle [0, +∞[qui est stable par $x \mapsto f(x) = x^2$, et sur lequel cette fonction est croissante.

• Etape 4 - premier cas : la fonction f est croissante sur I.

Dans ce cas, la suite (u_n)est monotone sur I. Son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$: ❶

Si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n)est croissante.

❷ Si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante.

On conclut alors souvent de l'une des 2 façons suivantes :

➢ On arrive à prouver que (u_n)est bornée (parce que II l'est par exemple). Dans ce cas, on applique le théorème de convergence des suites croissantes majorées, et on détermine la limite grâce à l'équation aux limites possibles.

➢ On prouve que (u_n)est croissante, et on sait que u_0 est supérieur strict à toute solution de $l = f(l)$.

Alors f ne peut pas converger, sinon sa limite vérifierait $l \geq u_0$ et ne pourrait pas être solution de l'équation aux limites possibles. Et une suite croissante qui ne converge pas tend nécessairement vers +∞.

• <u>Etape 4 -</u> deuxième cas : la fonction f est décroissante sur I.

Dans ce cas, on pose : $g = f \circ f$, g qui est croissante sur I, puis $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Alors (v_n)et (w_n) vérifient la relation de $v_{n+1} = g(v_n)$ et $w_{n+1} = g(w_n)$), avec g croissante sur l'intervalle I. On se ramène donc à étudier les suites comme dans le cas précédent.

Rappelons que la suite (u_n)converge si et seulement si (v_n)et (w_n)convergent vers la même limite.

Théorème1 : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n)une suite numérique telle que :a) f est continue sur I b) f(I) $\subset I$ c) $(\forall n \in \mathbb{N})$ ($u_{n+1} = f(u_n)$) d) $u_0 \in I$ e) (u_n) est convergente

Alors la suite (u_n)tend vers l solution de l'équation $f(x) = x$

Théorème2 : Localisation du point fixe ($f(x) = x$)

Soit f une fonction continue sur I. Supposons que le segment [a, b] est stable par f c'est-à-dire $f([a, b]) \subset [a, b]$ Alors f possède un point fixe dans l'intervalle [a, b].

Prof : ATMANI NAJIB

Méthode : $u_{n+1} = f(u_n)$; Supposons que f est continue et strictement croissante sur un intervalle I et $u_0 \in I$ et (u_n) est convergente alors pour calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ on résout l'équation $f(x) = x$

Si l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution : l_1 alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$

Si l'équation $f(x) = x$ admet une 2 solution : $l_1 \in I$ et $l_2 \notin I$ $(l_1 \neq l_2)$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l_1$

Si l'équation $f(x) = x$ admet une 2 solution : $l_1 \in I$ et $l_2 \in I$ $(l_1 \neq l_2)$ alors : on utilise le signe de la suite ou la monotonie pour choisir entre : l_1 *et* l_2

Théorème3 : Supposons que f est continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$ et $u_0 \in I$

1) Si f est croissante sur I alors la suite (u_n) est monotone.

Plus précisément :

❶ Si $u_0 \leq u_1$ alors (u_n) est croissante.

❷ Si $u_0 \geq u_1$ alors (u_n) est décroissante.

2) Si f est décroissante sur l'intervalle I alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires (l'une croissante l'autre décroissante !!)

Et s'ils sont convergentes on a alors : leurs limites respectives : l *et* l' sont tels que :

$f \circ f(l) = l$ *et* $f \circ f(l') = l'$

Remarque : Il est faux de dire que f croissante donne (u_n) croissante

Exemple1 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = \alpha$ avec : $\alpha \succ 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$

1) Montrer que $1 \leq u_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) En déduire que (u_n) est convergente et Calculer la limite de la suite (u_n)

Solutions : 1) <u>Méthode1 : sans utiliser la fonction associer</u>

Montrons que $1 \leq u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $1 \leq u_0$ car $1 < \alpha$

Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence :

Supposons que : $1 \leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $1 \leq u_{n+1}$??

Remarque importante : on peut essayer d'écrire : u_{n+1} sous une autre écriture pour pouvoir faire des encadrements : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} = \dfrac{2(u_n + 2) - 3}{u_n + 2} = \dfrac{2(u_n + 2)}{u_n + 2} - \dfrac{-3}{u_n + 2} = 2 - \dfrac{-3}{u_n + 2}$

On a : $1 \leq u_n$ donc : $3 \leq u_n + 2$ donc : $\dfrac{1}{u_n + 2} \leq \dfrac{1}{3}$ donc : $\dfrac{-3}{u_n + 2} \geq \dfrac{-3}{3}$ donc : $\dfrac{-3}{u_n + 2} \geq -1$

Donc : $2 + \dfrac{-3}{u_n + 2} \geq 1$ Donc : $1 \leq u_{n+1}$

Prof: ATMANI NAJIB

Méthode2 : utiliser la fonction associer

$u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n+2}=f(u_n)$ Donc : $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$ $Df=\mathbb{R}-\{-2\}$

On a : $1\leq u_n$: $\forall n\in\mathbb{N}$ donc : $I=[1;+\infty[$

Etude des variations de f : $f'(x)=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)'=\frac{3}{(x+2)^2}\succ 0$

Donc : La fonction f est strictement croissante sur $Df=\mathbb{R}-\{-2\}$ donc sur : $I=[1;+\infty[$

Le tableau de variations de f sur $I=[1;+\infty[$

x	1 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$1 \nearrow 2$

$f(I)\subset I$

Montrons que $1\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ؟؟؟؟

1étapes : n=0 on a : $1\leq u_0$ car $1<\alpha$ Donc la proposition est vraie pour n=0

2étapes : Hypothèse de récurrence : Supposons que : $1\leq u_n$

3étapes : Montrons alors que : $1\leq u_{n+1}$??

On a : $1\leq u_n$ donc : $f(1)\leq f(u_n)$ car f est strictement croissante sur : $I=[1;+\infty[$

Donc : $1\leq u_{n+1}$ CQFD

2) Montrons que la suite (u_n) est décroissante ????

Remarque : La fonction f est croissante sur : $I=[1;+\infty[$

Donc : la suite (u_n)est monotone. Mais on ne s'est pas s'il est croissant ou décroissant

Si on a : $u_0=a$ par exemple : $u_0=1$ on calculera : $u_1=?$

❶ Si $u_0\leq u_1$ alors (u_n)est croissante.

❷ Si $u_0\geq u_1$ alors (u_n)est décroissante.

Mais ici dans l'exercice : $u_0=n'est\ pas\ fixé$

Etude du signe de : $u_{n+1}-u_n=?$ Cela revient aussi à étudier le signe de : $f(x)-x=?$

$$f(x)-x=\frac{2x+1}{x+2}-x=\frac{2x+1-x(x+2)}{x+2}=\frac{-x^2+1}{x+2}=\frac{1-x^2}{x+2}=\frac{(1-x)(1+x)}{x+2}$$

Si $x\in I=[1;+\infty[\Leftrightarrow x\geq 1$ donc : $f(x)-x\leq 0\Leftrightarrow f(x)\leq x$

On a : $1\leq u_n$ donc : $f(u_n)\leq u_n$ donc : $u_{n+1}\leq u_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Donc : la suite (u_n) est décroissante

$$f(x)-x=0\Leftrightarrow\frac{(1-x)(1+x)}{x+2}=0\Leftrightarrow 1-x=0\ ou\ 1+x=0\Leftrightarrow x=1\ ou\ x=-1$$

Mais on a : $1\leq u_n$ donc : $\lim_{n\to+\infty}u_n=1$

Prof : ATMANI NAJIB

Q54 : Concours de Médecine et pharmacie 2018-2019 FES

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 1,0001$ **et** $\forall n \in \mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} = u_n^{2018}$ alors la limite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **:**

A ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ **B** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **C** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **D** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ **E** ☐ *n' exise pas*

Solutions : Méthode1 : $u_{n+1} = u_n^{2018}$

$u_1 = u_0^{2018} = (1,0001)^{2018} == (1,0001)^{2018^1}$

$\Rightarrow u_2 = u_1^{2018} = \left((1,0001)^{2018}\right)^{2018} = (1,0001)^{2018^2}$

De proche en proche on vérifie que : $\Rightarrow u_n = (1,0001)^{2018^n}$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2018^n = +\infty$ car $2018 \succ 1$ et $1,0001 > 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,0001)^{2018^n} = +\infty$

$\Rightarrow$ **C** ☐ la bonne réponse

Méthode2 : $u_{n+1} = u_n^{2018}$: $u_0 = 1,0001$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^{2018}$

$f'(x) = 2018x^{2017} \succ 0$ sur $I =]0;+\infty[$ ¨

Donc : La fonction f est strictement croissante sur $I =]0;+\infty[$

$f(x) - x = x^{2018} - x = x\left(x^{2017} - 1\right)$;

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^{2017} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^{2017} - 1 = 0$ *ou* $x = 0 \Leftrightarrow x^{2017} = 1$ *ou* $x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = 0$

Étudions le signe de : $f(x) - x$; $x^{2017} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^{2017} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

x	0		1		0,0001		$+\infty$
x	0	+		+			
$x2017-1$		−	0	+			
$f(x)-x$	0	−	0	+		croissante	

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : strictement croissante car $u_0 \in]0;+\infty[$ et $f(x) - x \geq 0$ et puisqu'il n'y a pas de point fixe alors **C** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Q55. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 0,999$ **et** $\forall n \in \mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} = u_n^{2022}$ alors la limite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **:**

A ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ **B** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **C** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **D** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ **E** ☐ *n' exise pas*

Solution : Méthode1 : $u_{n+1} = u_n^{2022}$

$u_1 = u_0^{2022} = (0,999)^{2022} = (0,999)^{2022^1}$

$\Rightarrow u_2 = u_1^{2022} = \left((0,999)^{2022}\right)^{2022} = (0,999)^{2022^2}$

De proche en proche on vérifie que : $\Rightarrow u_n = (0,999)^{2022^n}$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2022^n = +\infty$ car $1 \prec 2022$ et $0 \prec 0,999 \prec 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} (0,999)^{2022^n} = 0$

$\Rightarrow$ **B** ☐ la bonne réponse

Prof : ATMANI NAJIB

Méthode2 : $u_{n+1} = u_n^{2022}$: $u_0 = 0,999$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = x^{2022}$

$f'(x) = 2022x^{2021} \succ 0$ sur $I =]0;+\infty[$ ¨

Donc : La fonction f est strictement croissante sur $I =]0;+\infty[$

$f(x) - x = x^{2022} - x = x(x^{2021} - 1)$;

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x(x^{2021} - 1) = 0 \Leftrightarrow x^{2021} - 1 = 0$ *ou* $x = 0 \Leftrightarrow x^{2021} = 1$ *ou* $x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = 0$

Étudions le signe de : $f(x) - x$; $x^{2021} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^{2021} \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$

point fixe

x	0	0,999	1	$+\infty$
x	0	+		+
$x2021-1$		−	0	+
$f(x)-x$	0 décroissant	−	0	+

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : strictement décroissante car $u_0 \in]0;1[$ et $f(x) - x \leq 0$ et puisque 0 est un point fixe alors : **B** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Q56. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$u_0 = 4$ **et** $\forall n \in \mathbb{N}$ **:** $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ alors la limite la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **:**

A ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ **B** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ **C** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ **D** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ **E** ☐ *n' exise pas*

Solution : Méthode1 : $u_{n+1} = u_n^{\frac{1}{2}}$

$$u_1 = u_0^{\frac{1}{2}} = (4)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\left(\frac{1}{2}\right)^1} \Rightarrow u_2 = u_1^{\frac{1}{2}} = \left((4)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = (4)^{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

De proche en proche on vérifie que : $\Rightarrow u_n == (4)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $0 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

$\Rightarrow$ **A** ☐ la bonne réponse

Méthode2 : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$: $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = \sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \succ 0$ sur $I =]0;+\infty[$ ¨

Donc : La fonction f est strictement croissante sur $I =]0;+\infty[$

$f(x) - x = \sqrt{x} - x = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$;

$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} = 0$ *ou* $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1$ *ou* $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *ou* $x = 0$

Étudions le signe de : $f(x) - x$; $1 - \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{x} \Leftrightarrow x \leq 1$

Prof : ATMANI NAJIB

(point fixe)

x	0		1		4	$+\infty$
$1-\sqrt{x}$		$+$	0	$-$		
$f(x)-x$	0	$+$	0	$-$	décroissante	

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : strictement décroissante car $u_0 \in]1;+\infty[$ et $f(x)-x \leq 0$ et puisque 1est un point fixe alors : **A** ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Q57. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

La limite de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1,999....999$ ou le 9 est écrit n+1 fois est :

A ☐ 0 **B** ☐ $+\infty$ **C** ☐ 3 **D** ☐ 2 **E** ☐ 1,99

Solution : Méthode1: $u_n = 1,999....999 = 1 + 0,999....999$

$$u_n = 1 + 9\times 0,\underbrace{111....111}_{n+1\ fois\ 1} = 1 + 9\times\left(0,1 + 0,01 + ... + \underbrace{0,000....001}_{n+1\ fois\ 0}\right)$$

$$u_n = 1 + 9\times\left(10^{-1} + 10^{-2} + ... + 10^{-(n+1)}\right) = 1 + \left(9\times 10^{-1}\times\frac{1-10^{-(n+1)}}{1-10^{-1}}\right)$$

$u_n = 1 + \left(1 - 10^{-(n+1)}\right) = 2 - 10^{-(n+1)}$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} = 0$

On doit donc cocher **D** ☒

Méthode2: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1,999....$

On pose : $l = 1,999....$ donc : $10\times l = 19,999....$ par suite : $10\times l - l = 19 - 1$

Donc : $9\times l = 18$ c'est-à-dire : $l = \frac{18}{9} = 2$ On doit donc cocher **D** ☒

Q58. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

La limite de la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1,181818....18$ ou le 18 est écrit n fois est :

A ☐ $1,19$ **B** ☐ $\frac{11}{9}$ **C** ☐ $\frac{19}{18}$ **D** ☐ $\frac{13}{11}$ **E** ☐ $+\infty$

Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1,181818...$

On pose : $l = 1,181818...$ donc : $100\times l = 118,181818....$ par suite : $100\times l - l = 118 - 1$

Donc : $99\times l = 117$ **c'est-à-dire :** $l = \frac{117}{99} = \frac{13}{11}$

On doit donc cocher **D** ☒

Q59. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

$\forall n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n - 1$ et $u_0 = -1$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

A ☐ $-\infty$ **B** ☐ 0 **C** ☐ $+\infty$ **D** ☐ 1 **E** ☐ *autre*

Solution : Méthode1:

Prof : ATMANI NAJIB

Puisque la suite s'écrit sous la forme : $u_{n+1}=au_n+b$; $a\neq 1$ on peut utiliser le résumé suivant pour déterminer la $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:On résout l'équation : $x=ax+b$ sa solution est : $\alpha=\dfrac{b}{1-a}$

a)Si $a\succ 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\pm\infty$

- si $u_0\succ\alpha$ et (u_n)est croissante alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

- si $u_0\prec\alpha$ et (u_n)est décroissante alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

b)Si $0\prec a\prec 1$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$

- si $u_0\succ\alpha$ alors (u_n)est décroissante

- si $u_0\prec\alpha$ alors (u_n)est croissante

c)Si $-1\prec a\prec 0$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\alpha$ et (u_n) n'est ni croissante ni décroissante

d)Si $a\prec -1$ et $u_0\neq\alpha$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

Application : $x=2x-1\Leftrightarrow x=1$

On a : $a=2\succ 1$ et $u_0=-1\prec 1$ donc : (u_n)est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$

On doit donc cocher **A** ☒

<u>Méthode2:</u> $u_{n+1}=2u_n-1$ et $u_0=-1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=2x-1$

$f'(x)=2\succ 0$ Donc : La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$f(x)-x=2x-1-x=x-1$; $f(x)-x=0\Leftrightarrow x-1=0\Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Étudions le signe de : $f(x)-x$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x-1$			$-$	0	$+$
$f(x)-x$	décroissante		$-$	0	$+$

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : strictement décroissante car $u_0\prec 1$ et $f(x)-x\leq 0$ et puisqu'il n'y a pas de point fixe alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty$: On doit donc cocher **A** ☒

<u>Q60. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie</u>

$\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$ et $u_0=0$ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

A ☐ -1 **B** ☐ *0* **C** ☐ 2 **D** ☐ *1* **E** ☐ *autre*

<u>Q61. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie</u>

$\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+2}{u_n+2}$ et $u_0=0$ le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

A ☐ $u_n=\dfrac{2n}{n+1}$ **B** ☐ $u_n=\dfrac{2(4^n-1)}{4^n+2}$ **C** ☐ $u_n=\dfrac{3^n-1}{3^n+1}$ **D** ☐ $u_n=\dfrac{2n-1}{n+2}$ **E** ☐ $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$

<u>Solution :</u> <u>Méthode1 :</u> Puisque la suite s'écrit sous la forme : $u_{n+1}=\dfrac{au_n+b}{cu_n+d}$; $a\neq 1$ et $ad-bc\neq 0$ on peut utiliser le résumé suivant pour déterminer la $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$:

Prof : ATMANI NAJIB

On résout l'équation : $x=\frac{ax+b}{cx+d}$

1) Si l'équation admet une seule solution : l alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $v_n=\frac{1}{u_n-l}$ est une suite arithmétique de raison : $r=v_1-v_0=\frac{2c}{a+d}$

2) Si l'équation admet deux solutions : $l_1 \neq l_2$ On peut définir une suite géométrique : (v_n) : $v_n=\frac{u_n-l_1}{u_n-l_2}$

et de raison : $q=\frac{v_1}{v_0}=\frac{cl_2+d}{cl_1+d}$ et donc : $u_n=\frac{l_2v_n-l_1}{v_n-1}$ et $v_n=v_0q^n$

-Si $-1\prec q\prec 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty} v_n=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n=l_1$

-Si $q\succ 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty} v_n=\pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n=l_2$

-Si $q\leq -1$ alors : (v_n) n'a pas de limites et donc : (u_n) n'a pas de limites

-Si $q=1 \Rightarrow (v_n)$ est stationnaire $\Rightarrow (u_n)$ est stationnaire

Application du résumé : 1) $x=\frac{3x+2}{x+2} \Leftrightarrow x^2+2x=3x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-2)=1+8=9\succ 0$; $l_1=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2$ et $l_2=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1$; $q=\frac{l_2+2}{l_1+2}=\frac{-1+2}{2+2}=\frac{1}{4}$

On a : $-1\prec q\prec 1$ donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n=l_1=2$ On doit donc cocher **C** ☒

2) $v_n=\frac{u_n-l_1}{u_n-l_2}$; $v_0=\frac{u_0-2}{u_0+1}=\frac{0-2}{0+1}=-2$; $v_n=-2\left(\frac{1}{4}\right)^n$

et $u_n=\frac{l_2v_n-l_1}{v_n-1}=\frac{-v_n-2}{v_n-1}=\frac{2\left(\frac{1}{4}\right)^n-2}{-2\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}=\frac{\frac{-2}{(4)^n}+2}{\frac{2}{(4)^n}+1}=\frac{-2+2(4)^n}{2+(4)^n}=2\frac{(4)^n-1}{(4)^n+2}$

On doit donc cocher **B** ☒

<u>Méthode2 :</u> $u_{n+1}=\frac{3u_n+2}{u_n+2}$ et $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=\frac{3x+2}{x+2}$

$f'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}\succ 0$ car : $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Donc : La fonction f est strictement croissante sur les intervalles du domaine de définition

$f(x)-x=\frac{3x+2}{x+2}-x=\frac{3x+2-x^2-2x}{x+2}=\frac{-x^2+x+2}{x+2}$; $f(x)-x=0 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

$\Delta=1^2-4\times2\times(-1)=1+8=9\succ 0$; $x_1=\frac{-1+\sqrt{9}}{-2}=-1$ et $x_2=\frac{-1-\sqrt{9}}{-2}=2$

Étudions le signe de : $f(x)-x$

Prof : ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		-2		-1		0		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$				$+$	
$-x2+x+2$		$-$		$-$	0	$+$			0	$-$	
$f(x)-x$		$+$	‖	$-$	0	$+$	croissante		0	$-$	

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : strictement croissante car $-1\le u_0=0\le 1$ et $f(x)-x\ge 0$ et puisque 2 est un point fixe alors : alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$: On doit donc cocher **C**☒

2) On doit choisir la valeur de : u_n en fonction de n

On procède par élimination des réponses : <u>a) On a :</u> $u_0=0$

Pour : A ☐ $u_0=\frac{2\times 0}{0+1}=0$ $\Rightarrow$A ☐ probablement vraie

Pour : B ☐ $u_0=\frac{2\left(4^0-1\right)}{4^0+2}=\frac{2(1-1)}{1+2}=0$ $\Rightarrow$B ☐ probablement vraie

Pour : **C** ☐ On a : $u_0=\frac{3^0-1}{3^0+1}=0$ $\Rightarrow$C ☐ probablement vraie

Pour : **D**☐ On a : $u_0=\frac{2\times 0-1}{0+2}=-\frac{1}{2}\neq 0$ $\Rightarrow$**D** ☐ Faux

Pour : **E** ☐ $u_0=\frac{2\times 0+1}{0+2}=\frac{1}{2}\neq 0$ $\Rightarrow$A ☐ Faux

Donc : il reste seulement 3 possibilités : A ☐ **; B** ☐ **; C** ☐

<u>b) On passe à :</u> $u_1=\frac{3u_0+2}{u_0+2}=\frac{3\times 0+2}{0+2}=1$

Pour : A ☐ $u_1=\frac{2\times 1}{1+1}=1$ $\Rightarrow$A ☐ probablement vraie

Pour : B ☐ $u_1=\frac{2\left(4^1-1\right)}{4^1+2}=\frac{6}{6}=1$ $\Rightarrow$B ☐ probablement vraie

Pour : **C** ☐ On a : $u_1=\frac{3^1-1}{3^1+1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq 1$ $\Rightarrow$C ☐ Faux

Donc : il reste seulement 2 possibilités : A ☐ **; B** ☐

<u>c) On passe à :</u> $u_2=\frac{3u_1+2}{u_1+2}=\frac{3\times 1+2}{1+2}=\frac{5}{3}$

Pour : A ☐ $u_2=\frac{2\times 2}{2+1}=\frac{4}{3}\neq\frac{5}{3}$ $\Rightarrow$A ☐ Faux

Donc : il reste seulement B ☐ **automatiquement** la bonne réponse car une seule réponse est vraie
On doit donc cocher **B**☒

<u>Q62 : Concours de Médecine et pharmacie Oujda</u>

Soit $V_n=\sum_{k=0}^{k=n} k\times k!$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n=$

A ☐ 1 B ☐ $+\infty$ C ☐ e ☐ 0 E ☐ $autre\,limite$

<u>Solution :</u> On a $V_n=\sum_{k=0}^{k=n} k\times k!=\sum_{k=0}^{k=n}\left((k+1)-1\right)\times k!=\sum_{k=0}^{k=n}(k+1)\times k!-k!$

Prof : ATMANI NAJIB

Mais : $(k+1)\times k! = (k+1)!$ donc :

$$V_n = \sum_{k=0}^{k=n}(k+1)! - k! = (\cancel{1!} - 0!) + (\cancel{2!} - \cancel{1!}) + (\cancel{3!} - \cancel{2!}) + \times\ldots + (\cancel{n!} - \cancel{(n-1)!}) + ((n+1)! - \cancel{n!})$$

$V_n = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$ C'est une somme télescopique :

Remarque : $\sum_{k=n}^{m} a_{k+1} - a_k = a_{m+1} - a_n$ dans notre exercice : $V_n = \sum_{k=0}^{k=n}(k+1)! - k! = (n+1)! - 0!$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty}(n+1)! - 1 = +\infty$ On doit donc cocher **B**☒

Q63. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$ et $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a) La suite (v_n) est :

A ☐ Arithmétique de raison 2 B ☐ Géométrique de raison -2

C ☐ Arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ D ☐ Géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) l'expression de u_n en fonction de n est :

A ☐ $u_n = 4e^{-\ln 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ B ☐ $u_n = \dfrac{-1}{4e^{2\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}}$ C ☐ $u_n = 4e^{-\ln 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ D ☐ $u_n = \frac{1}{4}e^{\ln 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c) La valeur de la limite $\lim_{n\to+\infty} u_n$ est égale à : A ☐ $\frac{1}{4}$ B ☐ -4 C ☐ 4 D ☐ $-\frac{1}{4}$

Solution : a) Méthode1 : On a : $u_1 = 1$ et $u_2 = 2\sqrt{u_1} = 2$ et $u_3 = 2\sqrt{u_2} = 2\sqrt{2}$

Donc : $v_1 = \ln(u_1) - \ln(4) = -\ln(4) = -2\ln 2$ et $v_2 = \ln(u_2) - \ln(4) = -\ln 2$ et

$v_3 = \ln(u_3) - \ln(4) = -\frac{1}{2}\ln 2$; Comparons : $v_2 - v_1$ et $v_3 - v_2$

$v_2 - v_1 = -\ln 2 + 2\ln 2 = \ln 2$ et $v_3 - v_2 = -\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2$

Donc : $v_2 - v_1 \neq v_3 - v_2$ alors :La suite (v_n) n'est pas Arithmétique par suite: **A** ☐ faux et **C** ☐ faux

$\frac{v_2}{v_1} = \frac{-\ln 2}{-2\,\mathrm{n}\,2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{v_3}{v_2} = \frac{-\frac{1}{2}\ln 2}{-\ln 2} = \frac{1}{2}$ donc : **B** ☐ faux Par suite il reste **D**

On doit donc cocher **D**☒

Méthode2 : On calcul : v_{n+1} :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln(4) = \ln\left(2\sqrt{u_n}\right) - \ln(4) = \ln 2 + \ln\left(\sqrt{u_n}\right) - 2\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(u_n) - \ln(2) = \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) - 2\ln(2)\right) = \frac{1}{2}v_n$$

La suite (v_n) est Géométrique de raison $\frac{1}{2}$ On doit donc cocher **D**☒

b) Pour Déterminer l'expression de u_n en fonction de n parmi les réponses proposés

Méthode1 : On procède par élimination des réponses : a) On a : $u_1 = 1$

Pour : A ☐ $u_1 = 4e^{-\ln 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^1} = 4e^{-2\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1} = 4e^{-\ln 2} = \frac{4}{e^{\ln 2}} = \frac{4}{2} = 2 \neq 1$ ⇒A ☐ Faux

Prof : ATMANI NAJIB

Pour : B ☐ $u_1 = \dfrac{-1}{4e^{2\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^1}} = \dfrac{-1}{4e^{\ln 2}} = \dfrac{-1}{8} \neq 1 \Rightarrow$ B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $u_1 = 4e^{-\ln 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}} = 4e^{-\ln 4} = 4\dfrac{1}{e^{\ln 4}} = \dfrac{4}{4} = 1 \Rightarrow$ C ☐ probablement vraie

Pour : **D**☐ On a : $u_1 = \dfrac{1}{4}e^{\ln 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^1} = \dfrac{1}{4}e^{2\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}e^{\ln 2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \neq 1 \Rightarrow$ **D** ☐ Faux

On doit donc cocher **C**☒

<u>Méthode2 :</u> La suite (v_n) est Géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc : $v_n = v_1 q^{n-1} = -2\ln 2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$v_n + \ln(4) = \ln(u_n) \Leftrightarrow u_n = e^{-2\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\ln(4)} \Leftrightarrow u_n = e^{-2\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \times e^{\ln(4)} \Leftrightarrow u_n = 4e^{-\ln 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

On doit donc cocher **C**☒

<u>Q64. Concours de Médecine et de pharmacie Juillet 2007 Université Cadi Ayyad</u>

Soit (v_n) est une suite Arithmétique de raison $r \succ 0$ telle que : $v_0 = 1$ et $v_4^2 + v_2^2 = 10$

La raison de la suite (v_n) est égale à : **A**☐ 1 **B**☐ $\frac{5}{2}$ **C**☐ $\frac{2}{5}$ **D**☐ 2 **E**☐ -1

<u>Solution :</u> <u>Méthode1 :</u> On procède par élimination des réponses : $v_n = v_0 + nr = 1 + nr$

$v_2 = 1 + 2r$ et $v_2 = 1 + 4r$ La raison $r \succ 0 \Rightarrow$ **E**☐ -1 Faux

Pour :**C** ☐ $r = 1$: $v_4^2 + v_2^2 = 5^2 + 3^2 \neq 10 \Rightarrow$ A ☐ Faux

Pour : **C**☐ $r = \dfrac{2}{5}$: $v_4^2 + v_2^2 = \left(\dfrac{13}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{9}{5}\right)^2 = \dfrac{169}{25} + \dfrac{81}{25} = \dfrac{250}{25} = 10 \Rightarrow$ **C** ☐ vraie

On doit donc cocher **C**☒

<u>Méthode2 :</u> $v_n = v_0 + nr = 1 + nr$; $v_2 = 1 + 2r$ et $v_2 = 1 + 4r$

$$v_4^2 + v_2^2 = 10 \Leftrightarrow (1+4r)^2 + (1+2r)^2 = 10 \Leftrightarrow 16r^2 + 8r + 1 + 4r^2 + 4r + 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow 20r^2 + 12r + 2 = 10 \Leftrightarrow 5r^2 + 3r - 2 = 0$$

$\Delta = 3^2 + 4\times 2\times 5 = 9 + 10 = 49 \succ 0$; $r_1 = \dfrac{-3+\sqrt{49}}{10} = \dfrac{-3+7}{10} = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$ et $r_2 = \dfrac{-3-\sqrt{49}}{10} \prec 0$ (rejeté car $r \succ 0$)

On doit donc cocher **C**☒

Remarque : on peut remarquer simplement que : $r = \dfrac{2}{5}$ vérifie cette équation.

<u>Q65. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie</u>

Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = \dfrac{1}{2} \\ w_{n+1} = -1 - \dfrac{1}{4w_n} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

La limite de la suite (w_n) est égale à : **A** ☐ 0 **B**☐ 1 **C** ☐ $\frac{1}{2}$ **D** ☐ $-\frac{1}{2}$ **E** ☐ -1

<u>Solution :</u> <u>Méthode1 :</u> $w_{n+1} = -1 - \dfrac{1}{4w_n} = \dfrac{-4w_n - 1}{4w_n + 0}$

Prof : ATMANI NAJIB

Puisque la suite s'écrit sous la forme : $w_{n+1}=\dfrac{aw_n+b}{cw_n+d}$; $a\neq 1$ et $ad-bc\neq 0$ on peut utiliser le résumé suivant pour déterminer la $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$:

On résout l'équation : $x=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ et Si l'équation admet une seule solution : l alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=l$

Application : $x=-1-\dfrac{1}{4x}\Leftrightarrow x+1=-\dfrac{1}{4x}\Leftrightarrow 4x^2+4x+1=0\Leftrightarrow (2x+1)^2=0\Leftrightarrow 2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-\dfrac{1}{2}$ On doit donc cocher **D**☒

<u>Méthode2 :</u> $w_{n+1}=-1-\dfrac{1}{4w_n}$ et $w_1=-1-\dfrac{1}{4w_0}=-1-\dfrac{1}{4w_0}=-1-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{2}$ et $w_{n+1}=f(w_n)$ où

$f(x)=-1-\dfrac{1}{4x}$; $f'(x)=\dfrac{1}{4x^2}\succ 0$

Donc : La fonction f est strictement croissante sur les intervalles du domaine de définition

$f(x)-x=-1-\dfrac{1}{4x}-x=-\dfrac{4x^2+4x+1}{4x}=-\dfrac{(2x+1)^2}{4x}$; $f(x)-x=0\Leftrightarrow (2x+1)^2=0\Leftrightarrow \boxed{x=-\dfrac{1}{2}}$

Étudions le signe de : $f(x)-x$

fixe

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$f(x)-x$	$+$		0	$+$ || $-$	

croissante

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : strictement croissante car $-\dfrac{3}{2}=w_1\leq -\dfrac{1}{2}$ et $f(x)-x\geq 0$ et puisque $-\dfrac{1}{2}$ est un point fixe alors : alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-\dfrac{1}{2}$: On doit donc cocher D☒

<u>Q66. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie</u>

Cocher la bonne réponse :Soit (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$ telle que : $v_0=2$ .Alors la raison de la suite Arithmétique (w_n) définie par : $w_n=\ln(v_n)$ est :

A☐ $\dfrac{-1}{\ln 4}$ **B**☐ $-2\ln 2$ **C**☐ $2\ln 4$ **D**☐ $\ln 4$ **E**☐ $\dfrac{1}{\ln 4}$

<u>Solution :</u> si (v_n) est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{4}$ alors $w_n=\ln(v_n)$ est automatiquement Arithmétique de raison $r=\ln q=\ln\dfrac{1}{4}=-\ln 4=-2\ln 2$ On doit donc cocher **B**☒

<u>Q67. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie</u>

Soit (x_n) la suite définie par : $\begin{cases} x_0=\dfrac{1}{2} \\ x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2}{3}x_n^2+2} \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

La limite de la suite (x_n) est égale à : A ☐ -1 B☐ $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ C ☐ 0 D☐ $\sqrt{6}$ E ☐ $\sqrt{2}$

<u>Solution :</u> $x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2}{3}x_n^2+2}$ et $x_0=\dfrac{1}{2}$ et $x_{n+1}=f(x_n)$ où $f(x)=\sqrt{\dfrac{2}{3}x^2+2}$

Prof : ATMANI NAJIB

$f'(x)=\dfrac{\frac{4}{3}x}{\sqrt{\frac{2}{3}x^2+2}}\succ 0$ sur : $]0;+\infty[$ Donc : La fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

$f(x)-x=\sqrt{\frac{2}{3}x^2+2}-x=\dfrac{\frac{2}{3}x^2+2-x^2}{\sqrt{\frac{2}{3}x^2+2}+x}=\dfrac{-\frac{1}{3}x^2+2}{\sqrt{\frac{2}{3}x^2+2}+x}$;

$f(x)-x=0\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x^2+2=0\Leftrightarrow x^2=6\Leftrightarrow \boxed{x=\sqrt{6}}$ dans $]0;+\infty[$

Étudions le signe de : $f(x)-x$

point fixe

x	0	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{6}$	$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$

croissante

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : strictement croissante car $0\le x_0=\frac{1}{2}\le\sqrt{6}$ et $f(x)-x\ge 0$ et puisque $x=\sqrt{6}$ est un point fixe alors : alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\sqrt{6}$: On doit donc cocher **D**☒

Q68. Concours de Médecine et pharmacie 2021

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=0$ et $u_1=1$ et $u_n=\sqrt{\dfrac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}}$; $\forall n\in\mathbb{N}^*$

La limite de la suite (u_n) est égale à : A ☐ 0 B☐ $+\infty$ C ☐ 1 D☐ $\sqrt{2}$ E ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Solution : $u_n=\sqrt{\dfrac{u_{n+1}^2+u_{n-1}^2}{2}}\Leftrightarrow 2u_n^2=u_{n+1}^2+u_{n-1}^2$ **on pose :** $v_n=u_n^2$

Donc : $\Leftrightarrow 2v_n=v_{n+1}+v_{n-1}$ et on sait qu'une suite qui vérifie cette égalité $\forall n\in\mathbb{N}$ c'est une Arithmétique de raison : $r=v_1-v_0=u_1^2-u_0^2=1-0=1\succ 0$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$ et on a : $u_n=\sqrt{v_n}$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ On doit donc cocher B☒

On peut montrer que : $u_n=\sqrt{n}$ car : $v_n=v_0+nr=0+1\times n=n$

Q69. Concours de Médecine et pharmacie 2020

Soit (w_n) la suite définie par : $w_0=\frac{1}{2}$ et $w_{n+1}=(w_n-1)^2+1$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Si la suite (w_n) est convergente La limite de la suite (w_n) est égale à :

A ☐ 0 **B**☐ 2 **C** ☐ 1 **D** ☐ $\frac{1}{2}$ **E** ☐ -1

Solution : $w_{n+1}=-1-\dfrac{1}{4w_n}$ **et** $w_{n+1}=(w_n-1)^2+1$; $\forall n\in\mathbb{N}$ **et** $w_{n+1}=f(w_n)$ **où**

$f(x)=(x-1)^2+1$ **;** Si la suite (w_n) est convergente Sa limite vérifie : $f(x)=x$

$f(x)=x\Leftrightarrow (x-1)^2+1-x=0\Leftrightarrow x^2-2x+1+1-x=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

$\Delta=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1\succ 0$; $x_1=\dfrac{3+\sqrt{1}}{2}=2$ et $x_2=\dfrac{3-\sqrt{1}}{2}=1$

On doit choisir entre : $l_1=2$ et $l_1=1$ (on dit 2 et 1 points fixes de f)

Prof : ATMANI NAJIB

$f'(x)=2(x-1)=2x-2$

Donc : La fonction f est strictement croissante sur $[1;+\infty[$ et $f([1;+\infty[)=\left[f(1);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=[1;+\infty[$

Mais : $w_0=\frac{1}{2}\notin[1;+\infty[$ alors que : $w_1=(w_0-1)^2+1=\left(\frac{1}{2}-1\right)^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}\in[1;+\infty[$

Étudions le signe de : $f(x)-x=x^2-3x+2$

point fixe point fixe

x	1	$\frac{5}{4}$	2	$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$	0	$+$

Décroissante

PROF/Atmani najib

Donc : la suite (w_n) est : strictement décroissante car $1\prec\frac{5}{4}=w_1\prec 2$ et $f(x)-x\leq 0$ et puisque 1 est un point fixe alors : alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=1$: On doit donc cocher **C**☒

Q70. Concours de Médecine et pharmacie 2021

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n^2+u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$

Si la limite de suite (u_n) existe ; La limite de la suite (u_n) est égale à :

A ☐ 1 **B**☐ $+\infty$ **C** ☐ 0 **D** ☐ -1 **E** ☐ *autre*

Solution : Méthode1 : $u_{n+1}-u_n=u_n^2\geq 0$ donc : la suite (u_n) est croissante

et Toute suite croissante et minorée par son premier terme donc : $u_n\geq 1$; $\forall n\in\mathbb{N}$

On a : la limite de suite (u_n) existe et si on suppose que la suite (u_n) est majorée alors (u_n) est convergente vers $l\in\mathbb{R}$ (car croissante) et puisque : $u_n\geq 1$ alors par passage à la limite on a donc : $l\geq 1$

et (u_n) est convergente vers $l\in\mathbb{R}$ alors : $l=f(l)$ avec : $f(x)=x^2+x$

Donc : $l=l^2+l\Leftrightarrow 0=l^2\Leftrightarrow \boxed{0=l}$ mais : $0\prec 1$ *contradiction* avec : $l\geq 1$

Donc :la suite (u_n) n'est pas majorée et puisque (u_n) est croissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$

On doit donc cocher **B**☒

Méthode2 : $u_{n+1}=u_n^2+u_n$; $\forall n\in\mathbb{N}$ et $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ où $f(x)=x^2+x$

$f'(x)=2x+1\succ 0$ sur $[0;+\infty[$ Donc : La fonction f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$

$f(x)-x=x^2\geq 0$; $f(x)-x=0\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow \boxed{x=0}$ (on dit 0 point fixe de f)

Étudions le signe de : $f(x)-x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)-x$	0	$+$	

croissante

Prof:ATMANI NAJIB

Donc : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est : croissante et $f(x)-x\leq 0$ et puisqu'il n'y a pas de point fixe alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$: On doit donc cocher **B**☒

Prof : ATMANI NAJIB

Q71. Concours de Médecine et pharmacie 2022

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 \in]0;1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$; ou f est définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$; On a alors : La limite de la suite (u_n) est égale à :

A ☐ 0 **B**☐ $\frac{1}{3}$ **C** ☐ 1 **D**☐ $+\infty$ **E** ☐ autre réponse

Solution : Comme le u_0 n'est pas donné avec précision et que la réponse est la même pour chaque : $u_0 \in]0;1[$ on peut fixer un cas particulier pour u_0 qui nous donne un résultat satisfaisant ; mais qu'elle valeur donner a u_0 ?

On a :si la limite de suite (u_n) existe alors automatiquement c'est un point fixe c'est-à-dire : $f(1) = 1$

$$f(x) - x = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} - x = \frac{\sqrt{x} - x\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x} - x\sqrt{x} - x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}(1-x) - x\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\sqrt{1-x}\left(\sqrt{1-x}-\sqrt{x}\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} = 0 \text{ ou } \sqrt{1-x} - \sqrt{x} = 0$$

$$f(x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } \boxed{x = \frac{1}{2} \in]0;1[}$$

Si on prend par exemple : $u_0 = \frac{1}{2}$ alors : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et par suite : $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

et de proche en proche on montre que : $u_n = \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (suite constante)

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$ On doit donc cocher **E**☒ autre réponse

Q72. Préparation pour le concours de Médecine et pharmacie

La limite de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{(-1)^n\left(2^n+1\right)(n-1)}{n2^n}$ est égale à :

A ☐ 0 **B** ☐ -1 **C** ☐ 1 **D** ☐ $-\infty$ **E** ☐ n'admet pas de limites

Solution : $u_{2n} = \frac{(-1)^{2n}\left(2^{2n}+1\right)(2n-1)}{2n2^{2n}} = \frac{\left(2^{2n}+1\right)(2n-1)}{2n2^{2n}}$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2^{2n}+1\right)(2n-1)}{2n2^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n}+1}{2^{2n}} \times \frac{2n-1}{2n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}\right) \times \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n} = 1\times 1 = 1$$

$$u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}\left(2^{2n+1}+1\right)(2n)}{(2n+1)2^{2n+1}} = -\frac{\left(2^{2n+1}+1\right)(2n)}{(2n+1)2^{2n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{\left(2^{2n+1}+1\right)(2n)}{(2n+1)2^{2n+1}} = -\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2n+1}+1}{2^{2n+1}} \times \frac{2n+1}{2n+1} = -\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2^{2n+1}}\right) \times \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{2n} = -1\times 1 = -1$$

On sait que si une suite admet une limite alors il est unique : dans notre exercices la même suite admet deux limites

Par suite : On doit donc cocher **E**☒ autre réponse

Remarque :si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} \neq \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1}$ alors la suite : (u_n) n'admet pas de limites

Prof: ATMANI NAJIB

Q73. Concours ENSA 2018

(u_n) Une suite réelle ; Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n=2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}$ est égale à :

A □ 0 **B**□1 **C** □ $+\infty$ **D**□ 2

Solution : Methode1 : Cet exercice est une application d'un théorème dit théorème de Césaro :

Théorème de Césaro : Si $\lim u_n = L\in\mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_1+u_2+...+u_n}{n}=L$

Si on connait d'avance ce théorème on peut répondre à la question très rapidement en choisissant le D□ **2** comme réponse correcte.

En effet, considérons à la place de u_n le terme : u_n-u_{n-1} et ceci pour tout $n\in\mathbb{N}$

Comme on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-u_{n-1}=2\in\mathbb{R}$ alors : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(u_1-u_0)+(u_2-u_1)+...+(u_n-u_{n-1})}{n}=L=2$: Théorème de Césaro :

C'est-à-dire : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n-u_0}{n}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}-\frac{u_0}{n}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_0}{n}=2\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=2$

Methode2 : Mais, un élève du lycée ne connait pas ce théorème, et pourtant s'il est malin, il peut quand même répondre à la question, en prenant un cas très particulier d'une suite arithmétique de raison 2 car ce résultat doit être vraie pour toute suite qui vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-u_{n-1}=2\in\mathbb{R}$

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 2 C'est-à-dire : u_n et de premier terme $u_0=0$

Alors : $u_n=2n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}-u_n=2$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}=2$$

Par suite : On doit donc cocher **D**□ 2

Remarque : Dans les concours et puisque on ne nous demande pas les détails des solutions il est préférable de connaitre le maximum si c'est possible de théorèmes d'un niveau supérieur mais **sinon** ont doit se débrouiller on traitants des cas particuliers

Q74. Concours ENSA 2018

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}$ est égale à :**A** □ 0 **B**□1 **C** □ $-\infty$ **D**□ $+\infty$

Solution : Methode1 :

Remarque : Si $|u_n|\le M$ (c'est-à-dire : (u_n) bornée) et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=0$ Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\times v_n=0$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\sin^2 n-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\times\cos^3 n$ Et on a : $|\sin^2 n|\le 1$ et $|\cos^3 n|\le 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}=0-0=0$$

Methode2 :

$$\left|\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}\right|=\left|\frac{\sin^2 n}{n}+-\frac{\cos^3 n}{n}\right|\le\left|\frac{\sin^2 n}{n}\right|+\left|-\frac{\cos^3 n}{n}\right|\le\frac{|\sin^2 n|}{n}+\frac{|\cos^3 n|}{n}\le\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\le\frac{2}{n}$$

$$\left|\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}-0\right|\le\frac{2}{n}\text{ et }\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}=0\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}=0$$

Par suite : On doit donc cocher **A**□ 2

Prof : ATMANI NAJIB

Q75. Concours ENSA 2018

a) Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}^*$ **par :** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

A ☐ $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$ **B**☐ $u_{2n} - u_n \leq \frac{1}{4}$ **C** ☐ $u_{2n} - u_n < \frac{1}{3}$ **D**☐ $u_{2n} - u_n < \frac{1}{2}$

Solution : Methode1 (pour les concours) : On procède par élimination des réponses :

On a : $u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} = 1$ **et** $u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Pour : $n = 1$: $u_{2\times 1} - u_1 = u_2 - u_1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

Donc : **B** ☐ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4}\right)$ Faux $\Rightarrow$ **B** ☐ Faux

C ☐ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2} < \frac{1}{3}\right)$ Faux $\Rightarrow$ **C** ☐ Faux

D☐ $\Rightarrow \left(\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\right)$ Faux $\Rightarrow$ **D** ☐ Faux

On doit donc cocher **A**☒

Methode2 : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \Rightarrow u_{2n} - u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

$$n+1 \leq k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} 1 \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n+1}^{2n} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n}\left(2n - (n+1) + 1\right) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1}\left(2n - (n+1) + 1\right) \Rightarrow \frac{n}{2n} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \frac{n}{n+1} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \Rightarrow u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$$

b) Pour la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ On a **:**

A ☐ $u_{2^{10}} \geq 6$ **B**☐ $u_{2^{10}} < 6$ **C** ☐ $u_{2^{10}} = 3$ **D**☐ $u_{2^{10}} < 5$

Solution : D'après a) on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$

Donc : $u_{2\times 2^{k-1}} - u_{2^{k-1}} \geq \frac{1}{2}$; $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10} u_{2^k} - u_{2^{k-1}} \geq \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2} \Rightarrow u_{2^{10}} - u_1 \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} 1 \text{ (somme télescopique)}$$

$$\Rightarrow u_{2^{10}} - 1 \geq \frac{1}{2}(10 - 1 + 1) \Rightarrow u_{2^{10}} - 1 \geq 5 \Rightarrow u_{2^{10}} \geq 6$$

On doit donc cocher **A**☒

Q76. Concours ENSA 2018 :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ **:** On pose : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ On a alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n$ est égale à :

A ☐ 0 **B**☐ $\ln 2$ **C** ☐ $+\infty$ **D**☐ 2

Solution : Methode1 (pour les concours) : On procède par élimination des réponses :

Prof : ATMANI NAJIB

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$: $1\le k\le n\Rightarrow n+1\le n+k\le 2n\Rightarrow \frac{1}{2n}\le\frac{1}{n+k}\le\frac{1}{n+1}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}1\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}1\Rightarrow\frac{1}{2n}n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\le\frac{1}{n+1}n\Rightarrow\frac{1}{2}\le u_n\le\frac{n}{n+1}\prec 1$

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ \frac{1}{2}\le u_n\prec 1$ et si (u_n) est convergente alors : $\frac{1}{2}\le\lim_{n\to+\infty}u_n\le 1$

Pour : **C**☐ $\frac{1}{2}\le u_n\prec 1\Rightarrow$ **C** ☐ Faux

Pour : **A**☐ **et D**☐ Fausses car on a : $\frac{1}{2}\le\lim_{n\to+\infty}u_n\le 1$

Il reste seulement : B☐ $\ln 2$ On doit donc cocher **B**☒

<u>Q77. Concours ENSA : Marrakech 2010-2011</u>

03. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n^2}$; $\forall n\in\mathbb{N}$ alors :

A ☐ la suite (u_n) est croissante et tend vers $+\infty$ **B** ☐ la suite (u_n) est décroissante et tend vers 0

C ☐ la suite (u_n) est convergente vers 1 **D** ☐ $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{2}\le u_n$

<u>Solution</u> : $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n}{1+u_n^2}-u_n=\frac{u_n-u_n-u_n^3}{1+u_n^2}=\frac{-u_n^3}{1+u_n^2}\le 0$ **car** $u_n\ge 0$; $\forall n\in\mathbb{N}$ (à démontrer facilement par récurrence : pour le concours il faut le remarquer seulement)

Donc :la suite (u_n) est décroissante est minorée par 0 donc convergente

Sa limite vérifie : $f(x)=x$

$f(x)=x\Leftrightarrow\frac{x}{1+x^2}=x\Leftrightarrow x+x^3-x=0\Leftrightarrow x^3=0\Leftrightarrow x=0$

La suite (u_n) est décroissante et tend vers 0 On doit donc cocher **B**☒

Prof : ATMANI NAJIB

Formules trigo importantes :

Formules de transformations :1) Pour tous réels x et y on a :

$cos\,(x-y) = cosx.\,cosy + sinx.\,siny$ (1) ; $cos\,(x+y) = cosx.\,cosy - sinx.\,siny$ (2)

$sin\,(x+y) = sinx.\,cosy + cosx.\,siny$ (3) ; $sin\,(x-y) = sinx.\,cosy - cosx.\,siny$ (4)

Pour tout réel x on a : $cos(2x) = 2cos^2x - 1$ et $cos(2x) = 1 - 2sin^2x$ et $sin(2x) = 2sinx.\,cosx$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1$ et $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$

$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$ et $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ et $1+\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et $1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$;

$\sin\theta = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ et $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

Formules de la tangente : *Soient* x et y deux réels tels que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

1) Si $(x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$

2) si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ alors : $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

3) Si $(x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ alors : $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$

Les valeurs trigonométriques en fonction de : t = tan ($\frac{x}{2}$)

1) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ 2) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ 3) $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

Transformations des sommes en produits : Pour tous réels, q, on a :

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ et $cos\,p + cos\,q = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\,cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

$cos\,p - cos\,q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\,\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Transformations des produits en sommes : Pour tous réels x, y on a :

$cosx.\,cosy = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]$; $sinx.\,siny = -\frac{1}{2}[cos(x+y) - cos(x-y)]$

$sinx.\,cosy = \frac{1}{2}[sin(x+y) + sin(x-y)]$

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

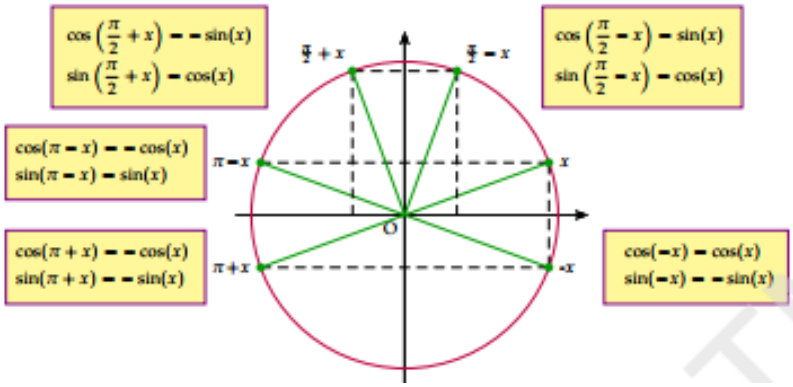
on utilise la Formule d'Euler : pour tout réel θ on a : $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

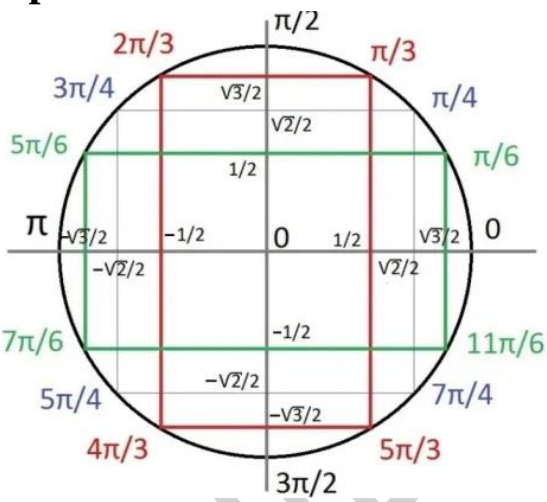
Les angles associés : Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Prof : ATMANI NAJIB

Arcs associés





Transformation de acosx + bsinx : Soient a et b deux réels non nuls on a :

$$a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)\ ;\ \cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ \text{ et }\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Par suite : $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\cos x+\sin\varphi\sin x\right)$

D'après la formule d'addition : $a\cos x+b\sin x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x-\varphi\right)$

Autres propriétés : La fonction : $x\to\sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire.
La fonction : $x\to\cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et paire.

<u>Q78 : 2020-2021 Concours de Médecine et pharmacie et Dentaire</u>

Si θ est un nombre réel alors $\cos^3\theta$ est égale à :

A ☐ $\frac{1}{8}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)$ **B** ☐ $\frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)$ **C** ☐ $\frac{1}{4}\left(\sin 3\theta+3\sin\theta\right)$

D ☐ $\frac{1}{8}\left(3\cos\theta-\cos 3\theta\right)$ **E** ☐ $\frac{1}{8}\left(\sin 3\theta+3\sin\theta\right)$

<u>Solution :</u> Méthode1 : (par élimination des réponses) : puisque θ est quelconque

Pour $\theta=0$ On a : $\cos^3 0=1$

A ☐ $\frac{1}{8}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)$: $\frac{1}{8}\left(\cos\left(3\times 0\right)+3\cos\left(0\right)\right)=\frac{1}{8}\left(1+3\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow$ **A** ☐ Faux

B ☐ $\frac{1}{4}\left(\cos 3\theta+3\cos\theta\right)$: $\frac{1}{4}\left(\cos\left(3\times 0\right)+3\cos\left(0\right)\right)=\frac{1}{4}\left(1+3\right)=1\Rightarrow$ **B** ☐ probablement vraie

C ☐ $\frac{1}{4}\left(\sin 3\theta+3\sin\theta\right)$: $\frac{1}{4}\left(\sin\left(3\times 0\right)+3\sin\left(0\right)\right)=\frac{1}{4}\left(0+0\right)=0\Rightarrow$ **C** ☐ Faux

D ☐ $\frac{1}{8}\left(3\cos\theta-\cos 3\theta\right)$: $\frac{1}{8}\left(3\cos\left(0\right)-\cos\left(3\times 0\right)\right)=\frac{1}{8}\left(3-1\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow$ **D** ☐ Faux

E ☐ $\frac{1}{8}\left(\sin 3\theta+3\sin\theta\right)$: $\frac{1}{8}\left(\sin\left(3\times 0\right)+3\sin\left(0\right)\right)=\frac{1}{8}\left(0+0\right)=0\Rightarrow$ **E** ☐ Faux

$\Rightarrow$ **B** ☐ et forcement vraie (car une seule réponse est vraie)

On doit donc cocher **B** ☒

Méthode2 : on fait une linéarisation de : $\cos^3\theta$

On a : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ donc : $\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot\left(e^{-i\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}\right)\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+3e^{i2\theta}e^{-i\theta}+3e^{\theta i}e^{-2i\theta}+e^{-3i\theta}\right)=\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)=\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$

Or on sait que : $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $2\cos n\theta = e^{in\theta} + e^{-in\theta}$

Donc : $\cos^3\theta = \frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta + 6\cos\theta\right) = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta = \frac{1}{4}\left(\cos 3\theta + 3\cos\theta\right)$

On doit donc cocher **B** ☒

Q79 : Concours ENSA : (une seule réponse correcte)

Le nombre tels que : $\cos 5\theta$ est égale à :

A ☐ $\cos^5\theta + 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$ **B** ☐ $\cos^5\theta + 5\cos^3\theta\sin^2\theta + 10\cos\theta\sin^4\theta$

C ☐ $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + \cos\theta\sin^4\theta$ **D** ☐ $\cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

Solution : Méthode1 : (par élimination des réponses) : puisque θ est quelconque

Pour $\theta = 0$ On a : $\cos(5\times 0) = 1$ et toutes les propositions sont vraies

Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$ On a : $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

A ☐ **les calculs** $\Rightarrow$ **A** ☐ Faux

B ☐ **les calculs** $\Rightarrow$ **B** ☐ Faux

C ☐ **es calculs** $\Rightarrow$ **C** ☐ Faux

D ☐ **es calculs** $\Rightarrow$ **D** ☐ probablement vraie

$\Rightarrow$ **D** ☐ et forcement vraie (car une seule réponse est vraie) On doit donc cocher **D** ☒

Méthode2 : *On utilise une méthode complexe*

Car la méthode trigo est long ($\cos 5\theta = \cos(4\theta + \theta)$.....

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow \left(e^{i\theta}\right)^5 = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$

Donc : $\cos 5\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)^5 = \mathrm{Re}\left(\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^5\right)$; $\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^5 = ?$

On utilise : Formule du binôme de Newton : $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $b \in \mathbb{R}$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1}a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$ *et pour déterminer les* C_n^k on utilise le triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

$\cos 5\theta = \mathrm{Re}\left(\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^5\right)$ (on prend seulement la partie reel)

$\cos 5\theta = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$

On doit donc cocher **D**☒

Q80 : Concours ENSA 2022 : (une seule réponse correcte)

Le nombre tels que : $\cos\frac{\pi}{16}$ est égale à :

A ☐ $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$ **B** ☐ $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ **C** ☐ $\frac{1}{16}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ **D** ☐ $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

Solution : on sait que : $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{16} = \frac{1+\cos 2\frac{\pi}{16}}{2} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}$ et aussi $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1+\cos 2\frac{\pi}{8}}{2} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Donc : $\cos\frac{\pi}{8} = \mp\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ car $0 \le \frac{\pi}{8} \prec \frac{\pi}{2}$ $(\cos\frac{\pi}{8} \succ 0)$

Donc : $\cos^2\frac{\pi}{16} = \frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}$ par suite : $\cos^2\frac{\pi}{16} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

On doit donc cocher **D** ☒

Prof : ATMANI NAJIB

Q81 : Concours ENSA : (une seule réponse correcte)

La limite : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}}$ est : **A** ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ $+\infty$

Solution : Méthode1 : On va utiliser de la règle de l'hôpital :

On a : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}} = "\frac{0}{0}"$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\cos x+\sin x}{1} = \sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} = \boxed{2}$ **C** ☒ est la bonne réponse

Méthode2 : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\cos x\frac{\tan x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{x-\frac{\pi}{6}}$ et on sait que : $\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \sqrt{3}\cos x\times \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\tan x-\tan\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}\times(\tan x)'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $(\tan x)' = 1+\tan^2 x$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1+\tan^2\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right) = \frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\times\frac{4}{3} = \boxed{2}$

Méthode3 : On va transformer : $\sqrt{3}\sin x-\cos x$

Utilisons l'astuce suivant : $a\cos x+b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$: $\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$\sqrt{3}\sin x-\cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{6}\cos x\right) = 2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ car on sait que :

$\sin(x-y) = \sin x.\cos y-\cos x.\sin y$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} 2\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{x-\frac{\pi}{6}}$; On pose $X = x-\frac{\pi}{6}$ si $x\to\frac{\pi}{6}$ alors : $X\to 0$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3}\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{6}} = \lim\limits_{X\to 0} 2\frac{\sin X}{X} = 2\times 1 = 2$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de Cours sur les nombres complexes

A)L'ensemble $\mathbb{C}$; définition et vocabulaire

il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ ses éléments s'appelles des nombres complexes qui vérifie : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et contient un nombre non réel noté i et qui vérifie/ $i^2 = -1$ et tout nombre complexe z s'écrit et de façon unique comme :
$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ où a et b réels
Le réel a s'appelle la partie réel de z ; on écrit : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Re}(\boldsymbol{z})$
Le réel $\boldsymbol{b}$ s'appelle la partie imaginaire du nombre complexe z ; on écrit : $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Im}(\boldsymbol{z})$
L'écriture : $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{ib}$ s'appelle l'écriture algébrique du nombre complexe $\boldsymbol{z}$.

1)Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x';y') \in \mathbb{R}^2$ deux nombres complexes :

$z = z' \Leftrightarrow x = x' ety = y'$

2) L'ensemble des nombres complexe n'est pas ordonné.
3) l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$
$(\forall x \in \mathbb{R})(x = x + 0i)$ et $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$
4) L'ensemble $i\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, s'appelle L'ensemble des imaginaires purs :
$\boldsymbol{i}\mathbb{R} = \{\boldsymbol{iy} / \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\} z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow Re(z) = 0$
5) $\mathbb{R} \cup i\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ et $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ ($\subsetneq$: inclus strictement)
6) L'addition dans l'ensemble $\mathbb{C}$ est : Associative et Commutative et 0 est l'élément neutre et Chaque élément z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'opposé de z noté $(-z)$
7) Multiplication dans $\mathbb{C}$ est : Associative et Commutative et 1 est l'élément neutre et Chaque élément z non nul z dans $\mathbb{C}$ a un symétrique appelé l'inverse de z noté : $(\frac{1}{z}$ ou $z^{-1})$ $z \times \frac{1}{z} = 1$

8)On general les calculs dans $\mathbb{C}$ s'éffectuent de meme facon que sur $\mathbb{R}$ seulement on remplace i^2 par -1 et on a :
a) $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$
b) $z^0 = 1$et $(\forall n \in \mathbb{N}*)$($z^n = \underbrace{z \times z \times \ldots \times z}$) $n\ fois$
c) $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ d) $z^{n+m} = z^n \times z^m$ e) $z^{n-m} = z^n / z^m$ f) $\left(z^n\right)^m = z^{n \times m}$
g) $z^n - z_1^n = \left(z - z_1\right)\left(z^{n-1} + z^{n-2}z_1 + \ldots + z^1 z_1^{n-2} + z_1^{n-1}\right)$
h) Si $z \neq 1$ alors : $S = 1 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ (somme des termes d'une suite géométrique)
k) $\left(z + z_1\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k z_1^{n-k}$ formule de binôme de newton

Lorsque Im(z) = 0, z = a est réel.
Lorsque Re(z) = 0, z = ib est appelé imaginaire pur.

B)L'interprétation géométrique et représentation d'un nombre complexe :

Le plans $(\mathcal{P})$ est muni du repère orthonormé $\mathcal{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$ et soit $\mathcal{V}_2$ le plan vectoriel associé à $(\mathcal{P})$.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe le couple (a, b) est associé à un point unique M dans le plan $(\mathcal{P})$.
1) Le point $M(a, b)$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$
2) Le complexe z s'appelle l'affixe du point $\boldsymbol{M}$
on écrit : $z = aff(M)$ et on écrit : $z_M = a + ib$
3) Le vecteur $\vec{u}$ s'appelle l'image du nombre complexe dans le plan $(\mathcal{P})$ et Le complexe z s'appelle l'affixe du vecteur $\vec{u}$ on écrit : $z = aff(\vec{u})$ on écrit : $z_{\vec{u}} = a + ib$
7) Le plan $(\mathcal{P})$ s'appelle un plan complexe
a)L'axe $\left(O;\vec{u}\right)$ s'appelle l'axe des réels
b) L'axe $\left(O;\vec{v}\right)$ s'appelle l'axe des imaginaires

Dans tout qui va suivre le plan complexe est muni d'un repère $\mathcal{R}\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$

Prof : ATMANI NAJIB

8)Les complexes z = a ∈ R sont des nombres réels et sont représentés sur l'axe des Réels.
9)Les complexes z = ib, b ∈ R sont des imaginaires purs et sont représentés l'axe des imaginaires purs.
10) Les opérations sur les affixes :
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dans $\mathcal{V}_2$; M et N deux points dans le plan $(\mathcal{P})$ et α un réel ; On a :
1) $aff(A) = aff(B) \Leftrightarrow A = B$ et $aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$
2) $aff(\vec{u} + \vec{v}) = aff(\vec{u}) + aff(\vec{v})$
3) $aff(\alpha\vec{u}) = \alpha \times aff(\vec{u})$
4) $aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A) = z_B - z_A$
5) Soient $[AB]$ un segment de milieu I ; on a : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$
6) Pour 2 points pondérés : $G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ on a $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}$ pour 3 points pondérés :
$G = Bar\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ on a : $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
7)Soient A, B et C trois points distincts du plan d'affixes respectifs : z_A, z_B et z_C
A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$

C) LE CONJUGUE D'UN NOMBRE COMPLEXE.

1)Soient x et y deux réels et $z = x + iy$. Le conjugué du nombre z est le nombre complexe noté $\bar{z}$ défini par :
$\bar{z} = x - iy$ et les images de z et $\bar{z}$ sontsymétriques par rapport à l'axe des réels.
2) $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$
a) si $z = x + iy$ alors $z \times \bar{z} = x^2 + y^2$
b) $\bar{\bar{z}} = z$ c) $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$ d) $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ e) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$ f) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$
g) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ h) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$ k) $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$ l) $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$
m) $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ $n \in \mathbb{Z}$ n) $\overline{\lambda z} = \lambda \bar{z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

D) LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE :

1)Soit : $z = x + iy$ un nombre complexe avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$
Le réel positif : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ s'appelle le module du nombre complexe z
2) Pour tous complexes z et z' et pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a :
a) $|\bar{z}| = |-z| = |z|$ b) $|z|^2 = z\bar{z}$ c) $|z| = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$ d) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ e) $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
f) $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ et $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ si $z \neq 0$ g) $|z^n| = |z|^n$ si $z \neq 0$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$ h) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
i) Si M est l'image du nombre complexe z alors : $|z| = OM$
j) Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors : $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = |z_B - z_A|$

E) forme trigonométriqe et argument d'un complexe

1)Le plan complexe est menu d'un repère $(O;\vec{u};\vec{v})$ et $z \in \mathbb{C}^*$ et $M(z)$ son image. L'argument du nombre complexe z une mesure (en radian) de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$ On le note par $\boldsymbol{arg(z)}$
2) $z \in \mathbb{C}^*$ et $y \in \mathbb{R}^*$

Prof: ATMANI NAJIB

a) $z \in \mathbb{R}^{*-} \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi[2\pi]$ b) $z \in \mathbb{R}^{*+} \Leftrightarrow \arg z \equiv 0[2\pi]$

c) $\arg(iy) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \succ 0$ et $\arg(iy) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ si $y \prec 0$

d) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg z[2\pi]$ e) $\arg \bar{z} \equiv -\arg z[2\pi]$

3) Tout nombre complexe non nul z à une écriture de la forme :
$z = |z|(cos\theta + i\ sin\theta)$ Où $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$
Cette écriture s'appelle la forme trigonométrique du nombre complexe non nul $\boldsymbol{z}$

4) $z \in \mathbb{C}^*$ Si on a $z = r(cos\theta + i\ sin\theta)$ avec $r \succ 0$

Alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ on écrit : $z = [r, \theta]$

5)Soit z et z' deux nombres complexes non nuls : a) $\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [rr', \theta\theta']$
b) $\arg(1/z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $1/[r, \theta] = [1/r, -\theta]$
c) $\arg(z/z') \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$ et on a : $[r, \theta] / [r', \theta'] = [r/r', \theta - \theta']$
d) $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$
e) $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$ et on a : $-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$
f) $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ et on a : $\overline{[r;\theta]} = [r, -\theta]$

$z = bi \in i\mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[b; \frac{\pi}{2}\right]$; $z = bi \in i\mathbb{R}^{*-} \Rightarrow z = \left[-b; -\frac{\pi}{2}\right]$;

$z = a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = [a; 0]$; $z = a \in \mathbb{R}^{*-} \Rightarrow z = [-a; \pi]$

$z = a - ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[a\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$; $z = -a - ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[a\sqrt{2}; 5\frac{5\pi}{4}\right]$

$z = -a + ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[a\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$; $z = a + ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[a\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

$z = a - ai\sqrt{3}$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; -\frac{\pi}{3}\right]$; $z = -a - ai\sqrt{3}$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; -\frac{2\pi}{3}\right]$

$z = -a + ai\sqrt{3}$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; \frac{2\pi}{3}\right]$; $z = a + ai\sqrt{3}$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; \frac{\pi}{3}\right]$

$z = a\sqrt{3} - ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; -\frac{\pi}{6}\right]$; $z = -a\sqrt{3} - ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; -\frac{5\pi}{6}\right]$

$z = -a\sqrt{3} + ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; \frac{5\pi}{6}\right]$; $z = a\sqrt{3} + ai$ et $a \in \mathbb{R}^{*+} \Rightarrow z = \left[2a; \frac{\pi}{6}\right]$

Remarque : $z = a + bi$

Si $a \geq 0$ et $b \geq 0$ pas de problème $z = [R; \theta]$: exemple : $z = 1 + i \Rightarrow z = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right]$

Si $a \geq 0$ et $b \leq 0$ $z = [R; -\theta]$ exemple : $z = 1 - i \Rightarrow z = \left[\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$

Si $a \leq 0$ et $b \geq 0$ $z = [R; \pi - \theta]$ exemple : $z = -1 + i \Rightarrow z = \left[\sqrt{2}; \pi - \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$

Si $a \leq 0$ et $b \leq 0$ $z = [R; \pi + \theta]$ exemple : $z = -1 - i \Rightarrow z = \left[\sqrt{2}; \pi + \frac{\pi}{4}\right] = \left[\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right] = \left[1;1010\pi + \frac{\pi}{2}\right]$

Prof : ATMANI NAJIB

Q82. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

On pose : $Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2021}$; L'écriture trigo de Z est :

A ☐ $Z=\left[1;-\frac{\pi}{2}\right]$ **B** ☐ $Z=[2;-\pi]$ **C** ☐ $Z=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$ **D** ☐ $Z=[2;0]$ **E** ☐ $Z=[1;\pi]$

Solution : $1+i=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right]$ et $1-i$ est son conjugué donc : $1-i=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{4}\right]$

Donc : $\frac{1+i}{1-i}=\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]$

$$\Rightarrow Z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2021}=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]^{2021}=\left[1^{2021};2021\frac{\pi}{2}\right]=\left[1;(2020+1)\frac{\pi}{2}\right]=\left[1;1010\pi+\frac{\pi}{2}\right]=\left[1;\frac{\pi}{2}\right]=i$$

On doit donc cocher **C**☒

Remarque : $[r;2k\pi+\alpha]=[r;\alpha]$ si $r\succ 0$ et $k\in\mathbb{Z}$

F)Les formes trigonométriques des racines carrées .(SM)

1) On appelle racine carrée d'un complexe z tout complexe u tel que $u^2=z$

2) Un complexe non nul admet deux racines carrées.

3) Soit $z=[r,\theta]$ un complexe non nul ; les racines carrées de $[r,\theta]$ sont les complexes :

$u_1=\left[\sqrt{r};\frac{\theta}{2}\right]$ et $u_2=-u_1$

G) Arguments et interpretations geometriques :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ et Soient M et M' et A, B, C et D quatre points distincts dans le plan complexe d'affixes respectifs z, z', a, b, c et d on a :

1) $\left(\overline{\overrightarrow{OM};\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\arg\left(\frac{z'}{z}\right)[2\pi]$ 2) $\left(\overline{\vec{e_1};\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\arg(b-a)[2\pi]$

3) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$ 4) $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}}\right)\equiv\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)[2\pi]$

5) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés si et seulement si : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\equiv 0[\pi]$ ou $\frac{c-a}{b-a}\in\mathbb{R}$

6) $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ et D(d)

$(AB)\parallel(CD)$ Si et seulement si : $\frac{a-b}{c-d}\in\mathbb{R}$

$(AB)\parallel(CD)$ Si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv 0[2\pi]$ Ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv\pi[2\pi]$

7) $(AB)\perp(CD)$ si et seulement si : $\frac{a-b}{c-d}\in i\mathbb{R}$

$(AB)\perp(CD)$ Si et seulement si : $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\arg\left(\frac{a-b}{c-d}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

8)Soit (C) le cercle qui circonscrit le triangle ABC, le point D appartient au cercle (C) si et seulement si : $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\left(\overline{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi]$ ou $\left(\overline{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\pi-\left(\overline{\overrightarrow{DB};\overrightarrow{DC}}\right)[2\pi]$

9) Les points A,B,C et D sont cocycliques si et seulement si : $\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d}\in\mathbb{R}^*$

Prof : ATMANI NAJIB

Q83. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$,

L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $(1-z)(i+\bar{z})\in\mathbb{R}$ est :

A ☐ Demi droite **B** ☐ Droite **C** ☐ Cercle **D** ☐ Demi-Cercle **E** ☐ $\{O\}$

Solution : Méthode1 : on pose $z=x+iy$; $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$(1-z)(i+\bar{z})=(1-x-iy)(i+x-iy)=((1-x)-iy)(x+i(1-y))\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z)=0 \Leftrightarrow (1-x)(1-y)-xy=0 \Leftrightarrow 1-y-x+xy-xy=0 \Leftrightarrow 1-y-x=0 \Leftrightarrow y=1-x$$

$\Leftrightarrow y=1-x \Rightarrow$ **B** ☐ Droite (la bonne réponse)

Méthode2 : Remarque : $|z|^2=z\bar{z}$; $(i+\bar{z})(-i+z)=|i+\bar{z}|^2\in\mathbb{R}$

$$(1-z)(i+\bar{z})\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(1-z)(i+\bar{z})(-i+z)}{-i+z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{(1-z)|i+\bar{z}|^2}{-i+z}\in\mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-z}{-i+z}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z-1}{z-i}\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{z-z_A}{z-z_B}\in\mathbb{R}$; $z_A=1; z_b=i$ (a), $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés

$\Leftrightarrow M; A; B$ *alignés* $\Leftrightarrow M\in(AB) \Rightarrow$ **B** ☐ Droite (la bonne réponse)

Q84. Concours de Médecine et pharmacie 22 (une seule réponse correcte)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct

Soit z un nombre complexe et Ω ; M et M' les points du plan complexe d'affixes respectives : $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2 et z' tel que : $z'=(1+i\sqrt{3})z+i$ alors une mesure de l'angle $(\overline{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}})$ est :**A** ☐ $\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ **B** ☐ $\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **C** ☐ $-\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ **D** ☐ $-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ **E** ☐ $\frac{\pi}{6}[2\pi]$

Solution : $(\overline{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}})\equiv\arg\left(\frac{z_{M'}-z_\Omega}{z_M-z_\Omega}\right)[2\pi] \Leftrightarrow (\overline{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}})\equiv\arg\left(\frac{(1+i\sqrt{3})2+i+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2+\frac{\sqrt{3}}{3}}\right)[2\pi]$

$$\frac{(1+i\sqrt{3})2+i+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2+2i\sqrt{3}+i+\frac{\sqrt{3}}{3}}{2+\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{2+\frac{\sqrt{3}}{3}+i(2\sqrt{3}+i)}{2+\frac{\sqrt{3}}{3}}=1+i\frac{(2\sqrt{3}+1)}{\frac{2\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}=1+\sqrt{3}i=2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Donc : $(\overline{\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'}})\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi] \Rightarrow$ **B** ☐ (la bonne réponse)

Q85. Concours de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda :

plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$(une seule réponse correcte)

A ☐ $\operatorname{Im}(z^2)=-(\operatorname{Im}(z))^2$ **B** ☐Si $|2+iz|=|2i-\bar{z}|$ alors : $\operatorname{Im}(z)=1$

C ☐ Pour un complexe non nul les points M ; N et O plan complexe d'affixes respectives :

z ; $\frac{1}{\bar{z}}$; 0 sont alignés

D ☐ Si $|1+iz|=|1-i\bar{z}|$ alors : $\operatorname{Re}(z)=0$ **E** ☐ Si $z=1+i$ alors : $z^6=-4i$

Solution : On procède par élimination des réponses :

Pour : A ☐ $\operatorname{Im}(z^2)=-(\operatorname{Im}(z))^2$ si on arrive à donner un contre-exemple c'est fini :

Prof: ATMANI NAJIB

Par exemple : $z = i$: $\text{Im}(z^2) = \text{Im}(-1) = 0$ mais $-(\text{Im}(z))^2 = -(1)^2 = -1 \Rightarrow$ A ☐ faux

Remarque : On peut même le montrer : on pose : $z = x + iy$; $(x;y) \in \mathbb{R}^2$

$\text{Im}(z^2) = \text{Im}(x^2 - y^2 + i2xy) = 2xy$ et $-(\text{Im}(z))^2 = -(y)^2 = -y^2$ donc : $\text{Im}(z^2) \neq -\text{Im}(z)^2$ en général

Pour : B ☐ si on arrive à donner un contre-exemple c'est fini :

Si on trouve un z tel que $\text{Im}(z) \neq 1$ et $|2 + iz| = |2i - \bar{z}|$ alors la proposition est fausse

Par exemple : $z = 0$: on a : $|2 + iz| = |2i - \bar{z}| = 2$ mais : $\text{Im}(z) \neq 1 \Rightarrow$ B ☐ faux

Pour : **D** ☐ si on arrive à montrer que la proposition $|1 + iz| = |1 - i\bar{z}|$ est toujours vraie : c'est à dire pas de conditions sur z alors la proposition est fausse

$|1 + iz| = |\overline{1 + iz}| = |1 - i\bar{z}|$ Car $|z| = |\bar{z}| \Rightarrow$ **D** ☐ faux

Pour : **D** ☐ On peut donner aussi un contre-exemple :

Par exemple : $z = 1$: on a : $|1 + iz| = |1 - i\bar{z}| = \sqrt{2}$ mais : $\text{Re}(1) \neq 0 \Rightarrow$ **D** ☐ faux

Pour : **E** ☐ ; $z^6 = (1+i)^6 = \left((1+i)^2\right)^3 = (2i)^3 = -8i \neq -4i \Rightarrow$ **E** ☐ faux

Par suite : C ☐ **Vraie** car les propositions A ; B ; D ; E fausses et on sait que dans le concours une seule réponse correcte : On doit donc cocher **C** ☒

Remarque1 : On peut même montrer que : Pour un complexe non nul les points M ; N et O plan complexe d'affixes respectives : z ; $\frac{1}{\bar{z}}$; 0 sont alignés

Soit $z \in \mathbb{C}^*$: $\frac{z_M - z_O}{z_N - z_O} = \frac{z}{\frac{1}{\bar{z}}} = z\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$

Donc : les points M ; N et O plan complexe d'affixes respectives : z ; $\frac{1}{\bar{z}}$; 0 sont alignés

Remarque2 : On traite d'abord les questions qu'on trouve faciles

H) LA FORME EXPONENTIELLE D'UN COMPLEXE NON NUL :

1)Soit θ un réel on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et donc : $\cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta}$:

Soit $z = [r, \theta]$ un complexe non nul, on a :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ Cette écriture s'appelle la forme exponentielle

2) Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$

a) $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ b) $z^n = r^n e^{in\theta}$ c) $\frac{1}{z'} = \frac{1}{r'}e^{-i\theta'}$ d) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

e) $\bar{z} = re^{-i\theta}$ f) $-z = re^{i(\pi+\theta)}$

g) Pour tout réel θ on a : $\left(re^{i\theta}\right)^n = (r)^n re^{in\theta}$

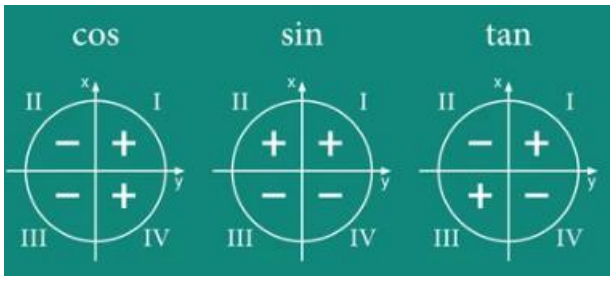
D'où : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall \theta \in \mathbb{R}$ (Formule de Moivre)

h) Pour tout réel θ on a : $e^{i(2k\pi+\theta)} = e^{i\theta}$; $\forall \theta \in \mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{Z}$

Exemple : $e^{\frac{304\pi}{3}i} = e^{\frac{3\times101\pi+\pi}{3}i} = e^{\left(101\pi+\frac{\pi}{3}\right)i} = e^{\left(\pi+100\pi+\frac{\pi}{3}\right)i} = e^{\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)i} = e^{\frac{4\pi}{3}i}$

k)Le signe de : cos et sin : voir le cercle suivant :

Prof : ATMANI NAJIB



m) Formule d'Euler : Pour tout réel θ on a : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

$(\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2;\ e^{i\alpha}+e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}+e^{-i\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)}$

(Cette égalité nous permet de déterminer la forme trigonométrique de la somme de deux complexes de même module)

Autre formule : $e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$ $e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2} = 2i\sin\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)} = 2\sin\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\pi}{2}\right)}$

$1+e^{i\theta} = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $1-e^{i\theta} = -2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $e^{i\theta}-1 = 2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

<u>Q86. Concours Médecine Dentaire Juillet 2018</u>

On pose : $a = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$

a) L'écriture exponentielle de a est :

A ☐ $a = e^{\frac{\pi}{4}i}$ **B** ☐ $a = e^{\frac{7\pi}{4}i}$ **C** ☐ $a = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ **D** ☐ $a = \sqrt{2}e^{-\frac{7\pi}{4}i}$

b) a^{2012} est : **A** ☐ -1 **B** ☐ 1 **C** ☐ $-i$ **D** ☐ i

c) $1+a+a^2+\ldots+a^{2017}$ est :

A ☐ $\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{-1+i}$ **B** ☐ $\dfrac{\sqrt{2}(1+i)}{\sqrt{2}-(1-i)}$ **C** ☐ $\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{\sqrt{2}-(1+i)}$ **D** ☐ $\dfrac{1-i}{\sqrt{2}-(1-i)}$

<u>Solution :</u> a) $1+i = \left[\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $1-i$ est son conjugué donc : $1-i = \left[\sqrt{2};-\dfrac{\pi}{4}\right]$

Donc : $a = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} = \left[\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};-\dfrac{\pi}{4}\right] = \left[1;-\dfrac{\pi}{4}\right] = \left[1;2\pi-\dfrac{\pi}{4}\right] = \left[1;\dfrac{7\pi}{4}\right] = e^{\frac{7\pi}{4}i}$

$\Rightarrow$ **B** ☐ (la bonne réponse)

b) $a = \left[1;-\dfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow a^{2012} = \left[1^{2012};-2012\dfrac{\pi}{4}\right] = [1;-503\pi] = [1;-504\pi+\pi] = [1;-2\times 252\pi+\pi] = [1;\pi] = -1$

$\Rightarrow$ **A** ☐ (la bonne réponse)

c) $1+a+a^2+\ldots+a^{2017} = 1\dfrac{1-a^{2018}}{1-a}$ la somme des termes d'une suite géo de raison : $a = q$

$a^{2018} = a^{2012}\times a^6 = -1\times\left[1^6;-6\dfrac{\pi}{4}\right] = -\left[1;-\dfrac{3\pi}{2}+2\pi\right] = -\left[1;\dfrac{\pi}{2}\right] = -i$

$1+a+a^2+\ldots+a^{2017} = \dfrac{1+i}{1-\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}-(1-i)} \Rightarrow$ **B** ☐ Droite (la bonne réponse)

Prof : ATMANI NAJIB

Q87. Concours ENSA 2022 :

L'écriture algébrique du nombre complexe : $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$ est :

A ☐ $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B** ☐ $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C** ☐ $\frac{\sqrt{3}}{2}+i$ **D** ☐ $-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$

Solution : a) $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\left[1;\frac{\pi}{3}\right]=e^{\frac{\pi}{3}i}$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}=\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)^{2023}=\left(e^{\pi i\frac{3\times674+1}{3}}\right)=\left(e^{i\left(674\pi+\frac{\pi}{3}\right)}\right)=\left(e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right)=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow$ **A** ☐ (la bonne réponse)

Q88. Concours ENSA 2022 :

Soit le nombre complexe : $z=\sqrt{3}+i$

z^5 est égale à : **A** ☐ $\bar{z}$ **B** ☐ $-8\bar{z}$ **C** ☐ $-16\bar{z}$ **D** ☐ $16\bar{z}$

Solution : $z=\sqrt{3}+i=\left[2;\frac{\pi}{6}\right]=2e^{\frac{\pi}{6}i}$

$$z^5=2^5e^{5\frac{\pi}{6}i}=32e^{\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)i}=32e^{\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)i}=32e^{\pi i}\times e^{-\frac{\pi}{6}i}=-32e^{-\frac{\pi}{6}i}=-16\times2e^{-\frac{\pi}{6}i}=-16\bar{z}$$

$\Rightarrow$ **C** ☐ (la bonne réponse)

Remarque : $e^{\pi i}=-1$; $e^{0i}=1$; $e^{2k\pi i}=e^{0i}=1$; Si : $z=re^{\alpha i}\Rightarrow\bar{z}=re^{-\alpha i}$

Q89. Concours Médecine :2021-22 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ si $z=1+i\left(1+\sqrt{2}\right)$ alors :

A ☐ $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$ **B** ☐ $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

C ☐ $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$ **D** ☐ $|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{\pi}{8}[2\pi]$

E ☐ $|z|=2\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$

Solution : $z=1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow z=(1+i)+\left(i\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow z=(1+i)+\left(i\sqrt{2}\right)$

On applique : $e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}=2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}$

$$z=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{2}}\right)=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}}{2}\right)e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}=2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\left(\frac{3\pi}{8}\right)}$$

$\Rightarrow|z|=2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$ et $\arg(z)\equiv\frac{3\pi}{8}[2\pi]$ $\Rightarrow$ **A** ☐ (la bonne réponse)

Q90 : Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ Si $z=\sqrt{5}e^{-\frac{\pi}{8}i}$ alors :

A ☐ $z=\frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}$ **B** ☐ $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

C ☐ $z=\frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}$ **D** ☐ $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

Prof ATMANI NAJIB

E ☐ $z=\frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2}$

Solution : On a : $z=\sqrt{5}e^{-\frac{\pi}{8}i}=\sqrt{5}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-\sqrt{5}i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\Rightarrow \boxed{Im(z)<0}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\succ 0$

Par suite $\Rightarrow$**C** ☐ **faux ; D** ☐ **faux**

On a : $|z|=\sqrt{5}$ **: A** ☐ $z=\frac{\sqrt{10+5\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{10-5\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow |z|=\frac{1}{2}\sqrt{10+5\sqrt{2}+10-5\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{20}=\sqrt{5}$

B ☐ $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow |z|=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{4}=1\neq\sqrt{5}$ **B** ☐ **faux**

D ☐ $z=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow |z|=1\neq\sqrt{5}$ Car il représente le conjugué de **B** ☐

D ☐ **faux**

On doit donc cocher **A** ☒

Q91 : Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

Le nombre complexe $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)^{18}$ est égale à :

A ☐ $z=-521$ **B** ☐ $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$ **C** ☐ $z=521$ **D** ☐ $z=251$ **E** ☐ $z=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Solution : $1-i\sqrt{3}z=\left[2;-\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left[\sqrt{2};-\frac{\pi}{3}\right]$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)^{18}=\left[\sqrt{2}^{18};-18\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)^{18}=\left[2^{9};-6\pi\right]=\left[2^{9};0\right]$

$\Rightarrow\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-i\sqrt{3}\right)\right)^{18}=2^{9}=512$ La bonne réponse est **C**

On doit donc cocher **C** ☒

Formules utilisées : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$, $\cos(2k\pi)=1$, $\sin(2k\pi)=0$ où $k\in Z$

Q92 : 2020-2021 Concours de Médecine et Dentaire

Si z est un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$ alors z^8 est égale à :

A ☐ $8+i8\sqrt{3}$ **B** ☐ $-8+i8\sqrt{3}$ **C** ☐ $-8-i8\sqrt{3}$ **D** ☐ $8-i8\sqrt{3}$ **E** ☐ $4+i4\sqrt{3}$

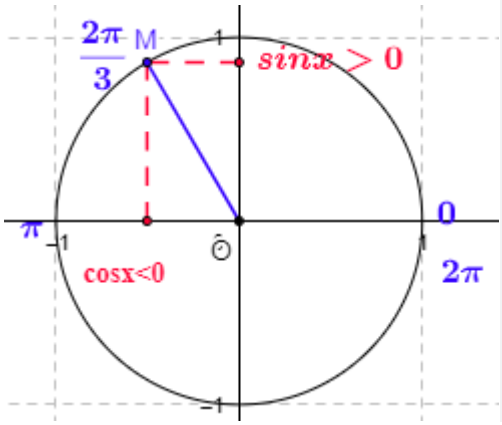
Solution :

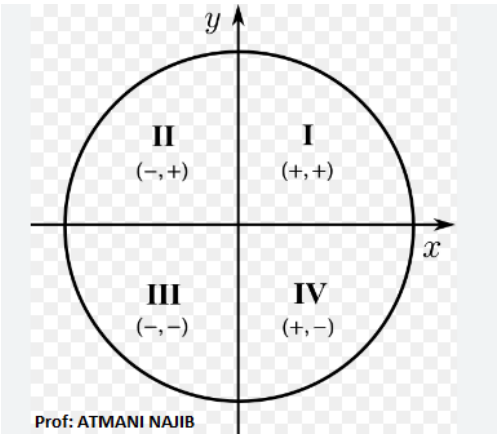
$z=\left[\sqrt{2};\frac{\pi}{3}\right]\Rightarrow z^8=\left[\sqrt{2}^8;8\frac{\pi}{3}\right]=\left[\sqrt{2}^8;\frac{6\pi+2\pi}{3}\right]=\left[\left(\sqrt{2}^2\right)^4;2\pi+\frac{2\pi}{3}\right]=\left[2^4;\frac{2\pi}{3}\right]=16\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$\Rightarrow z^8=16\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-8+8\sqrt{3}i$ On doit donc cocher **B** ☒

Remarque : Sans faire les calculs on peut remarquer que : $\frac{2\pi}{3}$ se trouve dans le 2ieme cadran : donc : $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\prec 0$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\succ 0$ c'est-à-dire la partie réelle de z^8 doit être négatif et la partie imaginaire positif et donc z^8 doit être : $-8+i8\sqrt{3}$

Prof : ATMANI NAJIB





Q93 : Concours de Médecine et Dentaire 2021-2022 Juillet 2021

Le nombre complexe $\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}$ est égale à :

A ☐ i **B** ☐ -1 **C** ☐ $7-15i$ **D** ☐ $-i$ **E** ☐ $7+15i$

Solution : On a : $\frac{7-15i}{15+7i}=\frac{i}{i}\times\frac{7-15i}{15+7i}=\frac{1}{i}\times\frac{7i+15}{15+7i}=\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}=-i$

$$\left(\frac{7-15i}{15+7i}\right)^{2021}=(-i)^{2021}=(-1)^{2021}\times i^{2021}=-i^{2021}=-\left(i^2\right)^{1010}\times i=-(-1)^{1010}\times i=-i$$

On doit donc cocher **D** ☒

Q94 : Concours de Médecine et pharmacie 2017-2018 Oujda : Juillet 2018

On pose : $A=1+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\ldots+\cos\frac{9\pi}{5}$ et $B=\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\ldots+\sin\frac{9\pi}{5}$

Soit z est le nombre complexe tel que : $z=A+iB$ Alors : z est égale à :

A ☐ $z=0$ **B** ☐ $z=-2i$ **C** ☐ $z=\frac{1}{2}$

D ☐ $z=2i$ **E** ☐ toutes les réponses proposées sont fausses

Solution : $z=A+iB=1+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\ldots+\cos\frac{9\pi}{5}+i\left(\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\ldots+\sin\frac{9\pi}{5}\right)$

$$z=1+\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\ldots+\left(\cos\frac{9\pi}{5}+i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$$

$$z=1+e^{\frac{\pi}{5}i}+e^{\frac{2\pi}{5}i}+\ldots+e^{\frac{9\pi}{5}i}=1+e^{\frac{\pi}{5}i}+\left(e^{\frac{\pi}{5}i}\right)^2+\ldots+\left(e^{\frac{\pi}{5}i}\right)^9$$

$z=1+a+a^2+\ldots+a^9=1\frac{1-a^{10}}{1-a}$: la somme des termes d'une suite géo de raison : $q=a=e^{\frac{\pi}{5}i}$

$a^{10}=\left(e^{\frac{\pi}{5}i}\right)^{10}=e^{10\frac{\pi}{5}i}=e^{(0+2\pi)i}=e^{0i}=1$ car : $e^{(\alpha+2k\pi)i}=e^{\alpha i}$ par suite : $z=\frac{1-1}{1-a}=0$

On doit donc cocher **A** ☒

Remarque : $z=A+iB=0$ donc : $A=0$ et $B=0$

Donc : $1+\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\ldots+\cos\frac{9\pi}{5}=0$ et $\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{2\pi}{5}+\ldots+\sin\frac{9\pi}{5}=0$

Prof: ATMANI NAJIB

Q95 : Concours de Médecine et pharmacie 2022

Si : $z = e^{-\theta i} - e^{\theta i}$ avec $\theta \in]0;\pi[$ Alors : $|z|$ est égale à :

A ☐ 2 **B** ☐ $2\cos\theta$ **C** ☐ $2\cos\frac{\theta}{2}$ **D** ☐ $2\sin\theta$ **E** ☐ $2\sin\frac{\theta}{2}$

Solution : On a : $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$

Donc : $z = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) - \cos\theta - i\sin\theta = \cos(\theta) - i\sin(\theta) - \cos\theta - i\sin\theta = -2i\sin(\theta)$

Donc : $|z| = |-2i\sin(\theta)| = |-2i| \times |\sin(\theta)| = 2|\sin(\theta)| = 2\sin(\theta)$ car $\sin(\theta) \geq 0$ ($\theta \in]0;\pi[$)

On doit donc cocher **D** ☒

Q96 : Concours de Médecine et pharmacie 2022

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ si : $\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi]$ et $|z| = \sqrt{2}$ la partie imaginaire de z^3 est égale à :

A ☐ 0 **B** ☐ $2\sqrt{2}$ **C** ☐ $\sqrt{2}$ **D** ☐ $-\sqrt{2}$ **E** ☐ $-2\sqrt{2}$

Solution :

$$\arg(iz) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(i) + \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{7\pi}{6} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc : $\arg(z) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ et par suite : $z = \sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}$

Donc : $z^3 = \sqrt{2}^3 e^{3\frac{2\pi}{3}i} = 2\sqrt{2}e^{2\pi i} = 2\sqrt{2}e^{0i} = 2\sqrt{2} \times 1 + 0i$ car $e^{2k\pi i} = e^{0i} = 1$

Donc : **l**a partie imaginaire de z^3 est égale à **:0** On doit donc cocher **A** ☒

Q97. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

Pour tout réel x non nul ;On considère dans Le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points : $A(|x|)$; $B(|x|e^{2i})$; $C(|x|e^{-2i})$; $D(-|x|e^{-2i})$ alors :

A ☐ les points : A ; B; C et D sont Alignés **B** ☐ $ABCD$ est un parallélogramme

C ☐ les points : A ; B; C et D sont cocycliques **D** ☐ $(AB)\parallel(CD)$

E ☐ $AB = CD$

Solution : Les affixes des points : A ; B; C et D ont le même module donc : $|x|$

Donc : les points : A ; B; C et D sont cocycliques On doit donc cocher **C** ☒

I) LES EQUATION DANS $\mathbb{C}$:

1) Les équations de second degré : $az^2 + bz + c = 0$ où a ; b et c sont des réels avec $a \neq 0$

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (E) et soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant

On a : **Si $\Delta = 0$** alors l'équation (E) admet comme solution le complexe : $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes : $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

2) Les équations de second degré : $az^2 + bz + c = 0$ $E)$ où a ; b et c sont des complexes **(2sm)**

Si $\Delta = 0$ alors l'équation (E) admet comme solution le complexe : $z = -\frac{b}{2a}$

Si $\Delta \neq 0$ l'équation (E) admet comme solution les complexes : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où δ une racine carrée de Δ

Prof : ATMANI NAJIB

Remarque1 : Si les coefficients a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux racines complexes conjugué :

Remarque2 : tout polynôme non constant admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Remarque3 : tout polynôme non constant de degré n admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$ avec leurs multiplicités :

Q98. Faculté de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda : plan muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$(une seule réponse correcte)

Pour tous z dans $\mathbb{C}$ on pose : $P(z) = 2z^3 + 14z^2 + 41z + 68$; z_1 ; z_2 et z_3 sont les solutions de l'équation : $P(z) = 0$ tel que : $z_1 \in \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im}(z_2) > 0$ et soient les points A ; B et C du plan complexe d'affixes respectives : z_1 ; z_2 et z_3

A ☐ $P(z)$ n'est pas divisible par $z+4$

B ☐ $z_2 + z_3 = 0$

C ☐ Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

D ☐ $|z_2 - z_1| = 2$

E ☐ L'affixes des points M et N tel que $BCMN$ est un carré de centre A Sont respectivement : $z_M = -13 - 5i$ et $z_N = -13 + 5i$

Solution : Pour : **A** ☐ : $P(-4) = -128 + 224 - 164 + 68 = 0$

Par suite : $P(z)$ est divisible par $z+4$ $\Rightarrow$A ☐ faux

Pour : **B** ☐ : $P(z) = (z+4)(2z^2 + 6z + 17)$

Donc : $z_1 = -4$; $z_2 = \dfrac{-3+5i}{2}$ et $z_3 = \dfrac{-3-5i}{2}$ mais : $z_2 + z_3 = -3 \neq 0$ $\Rightarrow$**B** ☐ faux

Pour : **C** ☐ : $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = \dfrac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \dfrac{-5-5i}{-5+5i} = \dfrac{i+1}{1-i} = i$ donc : $(AB) \perp (AC)$

D'autre part : $\left|\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}\right| = 1 \Rightarrow \dfrac{|z_A - z_B|}{|z_A - z_C|} = 1 \Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow AB = AC$

Donc : Le triangle ABC est isocèle et rectangle en A $\Rightarrow$ **C**☐ Vraie (finie)

On doit donc cocher **C** ☒

Pour : **D** ☐ faux : On peut le vérifier : $|z_2 - z_1| = \left|\dfrac{-3+5i}{2} + 4\right| = \sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} \neq 2$

Pour : **E** ☐ faux : On peut le vérifier : $|z_B - z_C| = 2 \times \dfrac{5}{2} = 5$ et $|z_M - z_N| = 2 \times 5 = 10$

Donc : $BCMN$ n'est pas un carré

Q99 : Concours de Médecine et pharmacie 2022 : une seule réponse correcte)

Dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des solutions de l'équation : $\dfrac{2z-1}{z+1} = z$ est :

A ☐ $\left\{-1; \dfrac{1}{2}\right\}$ **B** ☐ $\{1+i\sqrt{3}; 1-i\sqrt{3}\}$ **C** ☐ $\left\{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}; \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right\}$ **D** ☐ $\{i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$ **E** ☐ Autre réponse

Solution : Si $z \neq -1$; $\dfrac{2z-1}{z+1} = z \Leftrightarrow 2z - 1 = z(z+1) \Leftrightarrow 2z - 1 = z^2 + z \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$

Prof : ATMANI NAJIB

L'équation (E) admet comme solution les complexes : $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ On doit donc cocher **C** ☒

Q100 : **Concours ENSA :** (une seule réponse correcte)

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation a variable complexe : $z^2-2\bar{z}+3=0$

Alors : $\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=...$ **A** ☐ $-2\frac{\sqrt{6}}{7}$ **B** ☐ $2\frac{\sqrt{6}}{7}$ **C** ☐ $\frac{5}{7}$ **D** ☐ $-\frac{5}{7}$

Solution : On pose : $z=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$z^2-2\bar{z}+3=0\Leftrightarrow(x+yi)^2-2(x-yi)+3=0\Leftrightarrow x^2-y^2+2ixy-2x+2iy+3=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-y^2-2x+3+2i(xy+y)=0\Leftrightarrow(x^2-y^2-2x+3=0)\,et\,(y=0\ ou\ x=-1)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2-2x+3=0\\y=0\end{cases}ou\begin{cases}x^2-y^2-2x+3=0\\x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+3=0\\y=0\end{cases}ou\begin{cases}1-y^2+2+3=0\\x=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\cancel{\begin{cases}(x-1)^2=-2\\y=0\end{cases}}\ ou\begin{cases}y^2=6\\x=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm\sqrt{6}\\x=-1\end{cases}\Leftrightarrow z_1=-1+i\sqrt{6}\ ou\ z_2=-1-i\sqrt{6}$$

$$\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\text{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\text{Re}\left(\frac{-1+i\sqrt{6}}{-1-i\sqrt{6}}\right)=\text{Re}\left(\frac{\left(-1+i\sqrt{6}\right)^2}{\left(-1-i\sqrt{6}\right)\left(-1+i\sqrt{6}\right)}\right)=\text{Re}\left(\frac{-5-2i\sqrt{6}}{7}\right)=-\frac{5}{7}$$

On doit donc cocher **D** ☒

Q101 : **Concours ENSA :** (une seule réponse correcte)

Soit u la solution de l'équation a variable complexe : $z\bar{z}+4iz=-3+4i$ Alors :

A ☐ $\text{Re}(u)\times\text{Im}(u)=2$ **B** ☐ $\text{Re}(u)\times\text{Im}(u)=1$ **C** ☐ $\text{Re}(u)+\text{Im}(u)=2$

D ☐ u est imaginaire pur

Solution : u la solution de l'équation : $z\bar{z}+4iz=-3+4i$ Alors : $u\bar{u}+4iu=-3+4i$

On pose : $u=x+yi$ avec $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$(x+yi)(x-yi)+4i(x+yi)=-3+4i\Leftrightarrow x^2+y^2+4ix-4y=-3+4i$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2-4y=-3\ et\ 4x=4\Leftrightarrow y^2-4y+4=0\ et\ x=1\Leftrightarrow(y-2)^2=0\ et\ x=1$$

$$\Leftrightarrow y=2\ et\ x=1\Rightarrow u=1+2i\Rightarrow\text{Re}(u)=1\ et\ \text{Im}(u)=2$$

On doit donc cocher **A** ☒

Q102 : **Concours ENSA :** (une seule réponse correcte)

Soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation complexe suivante :

$2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$ Où $z\in\mathbb{C}$ et $m\in\mathbb{R}$

Alors : $\text{Im}(z_1)\times\text{Im}(z_2)=...$ **A** ☐ $\frac{1-m^2}{2}$ **B** ☐ $\frac{1+m^2}{2}$ **C** ☐ $\frac{1-m^2}{4}$ **D** ☐ $\frac{1+m^2}{4}$ **E** ☐ *autre*

Solution : $\Delta=(2im)^2$ à vérifier

L'équation (E) admet comme solution les complexes :

Prof: ATMANI NAJIB

$z_1 = \frac{2(m+1+i)+2mi}{4}$ et $z_2 = \frac{2(m+1+i)-2mi}{4}$

$z_1 = \frac{m+1+i(1+m)}{2}$ et $z_2 = \frac{m+1+i(1-m)}{2}$

$\mathrm{Im}(z_1)\times\mathrm{Im}(z_2) = \left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{1-m}{2}\right) = \frac{1-m^2}{4}$ On doit donc cocher **C** ☒

Q103 : Concours ENSA : (une seule réponse correcte)

Soient θ un nombre réel non nul et z un nombre complexe tels que : $z = \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta$

Alors : $\mathrm{Re}(z^{-3}) = \ldots$ **A** ☐ $\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}$ **B** ☐ $\frac{\cos 3\theta}{\sin^3\theta}$ **C** ☐ $\frac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$ **D** ☐ $\frac{\sin\theta}{\cos^3\theta}$

Solution : $z = \cos^2\theta + i\sin\theta\cos\theta = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta) = \cos\theta e^{i\theta}$

$z^{-3} = (\cos\theta)^{-3} e^{i\theta} \Rightarrow \mathrm{Re}(z^{-3}) = (\cos\theta)^{-3}\times\cos 3\theta = \frac{\cos 3\theta}{\cos^3\theta}$

On doit donc cocher **C** ☒

Q104 : Concours de Médecine et pharmacie 2018-2019 FES

Cochez la réponse ou les réponses justes.

Q16 : L'équation $x^{2023} + 2021x - 2022 = 0$ alors est :

A ☐ admet une seule solution dans $\mathbb{C}$

B ☐ admet 2023 solutions dans $\mathbb{R}$

C ☐ admet une seule solution dans $\mathbb{N}$

D ☐ admet une seule solution dans $\mathbb{Z}$

E ☐ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$

Solution : On peut éliminer une réponse :

A ☐ admet une seule solution dans $\mathbb{C}$ est Fausse : car c'est une équation de degré 2023 dans $\mathbb{C}$ admet exactement 2023 solutions

Méthode pour résoudre les problèmes de ce type :

Voici une démarche à suivre : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{2023} + 2021x - 2022$

On va étudier cette fonction et Dresser son tableau de variations

Bien sûr f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction POLYNOMIALE

$f'(x) = 2023x^{222} + 2021$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2023x^{222} + 2021 = 0 \Leftrightarrow x^{222} = -\frac{2021}{2023}(impossible)$; $f'(x) \succ 0$

On peut remarquer que : $f(1) = 1 + 2021 - 2022 = 0$

Le tableau de variations de f :

Prof: ATMANI NAJIB

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

f est continue et strictement croissante Sur : $\mathbb{R}$ et o est compris entre "$-\infty$" et "$+\infty$"

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et c'est 1: $1 \in \mathbb{N}$ et $1 \in \mathbb{Z}$ et $1 \in \mathbb{R}$

On doit donc cocher **C** ☒ **et D** ☒ **et E** ☒

Q105 : Concours de Médecine et pharmacie :

Cochez la réponse juste.

Q16 : L'équation $3x^4+4x^3-12x^2+4=0$:

A ☐ admet une seule solution dans $\mathbb{R}$

B ☐ admet 2 solutions dans $\mathbb{R}$

C ☐ admet 3 solutions dans $\mathbb{R}$

D ☐ admet 4 solutions dans $\mathbb{R}$

E ☐ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$

Solution : Méthode pour résoudre les problèmes de ce type :

Voici une démarche à suivre : Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+4$

On va étudier cette fonction et Dresser son tableau de variations

Bien sûr f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction POLYNOMIALE

$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x^2+x-2)$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2+x-2=0$;

$x^2+x-2=0$: $\Delta=b^2-4ac=9$; $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{9}}{2}=1$ et $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{9}}{2}=-2$

Le tableau de signe :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$12x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x2+x-2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$			-0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Prof:ATMANI NAJIB

Le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-28	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Prof: ATMANI NAJIB

f est continue et strictement décroissante Sur : $]-\infty;-2[$ et o est compris entre -28 et "$+\infty$"

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-\infty;-2[$

Sur : $]-2;0[$ f est continue et strictement croissante et o est compris entre -28 et 4

Donc : d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]-2;0[$

Un raisonnement similaire montre que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $]0;1[$ et admet une unique solution sur $]1;+\infty[$

Au total : l'équation $f(x)=0$ admet 4 solutions On doit donc cocher D ☒

Q106 : Concours de Médecine et pharmacie Oujda

Pour $z\in\mathbb{C}$ on pose l'équation : (E) $z^3=8$

L'ensemble S des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ est :

A ☐ $S=\left\{2;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i;-2\right\}$ **B** ☐ $S=\left\{2;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

C ☐ $S=\{2\}$ **D** ☐ $S=\left\{2;-1+\sqrt{3}i;-1-\sqrt{3}i\right\}$ **E** ☐ $S=\left\{2;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

<u>Solution :</u> On peut éliminer une réponse :
On peut éliminer les réponses : **A** ☐ et **C** ☐ et **E** ☐ car c'est une équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$ admet exactement 3 solutions $\Rightarrow$: **A** ☐ ; **C** ☐ et **E** ☐ **fausses**

Remarque : c'est une équation a coefficients dans $\mathbb{R}$ et si z est une solution aussi $\bar{z}$ et aussi solution : $\Rightarrow$

E ☐ $S=\left\{2;-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$ **fausse** car : $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ solution mais $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Pour : **D** ☐ : $-1+\sqrt{3}i=\left[2;\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3=\left[2^3;3\frac{2\pi}{3}\right]=[8;2\pi]=[8;0]=8$

$\Rightarrow -1+\sqrt{3}i$ est une solution et aussi $-1-\sqrt{3}i$ et 2 aussi
On doit donc cocher **D** ☒

J) LES RACINES n-EME D'UN COMPLEXE NON NUL (Pour SM)

1) Les racines n-ième de l'unité : a) On appelle racine n-ième de l'unité tout complexe u qui vérifie :
$u^n=1$

b) L'unité admet n racines n-ième qui s'écrivent de la forme : $u_k=e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ Où $k\in\{0,1,2,\ldots,(n-1)\}$

2) Les racines n-ième d'un nombre complexe non nul.

Le nombre complexe non nul : $a=re^{\theta i}$ admet n racines $n-$éme $(n\in\mathbb{N}*)$ différentes qui sont :

$u_k=\sqrt[n]{r}e^{\frac{\theta+2k\pi}{n}i}$ où $k\in\{0,1,2,\ldots,(n-1)\}$

K) LES TRANSFORMATIONS DANS LE PLAN COMPLEXE.

1) La translation : Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{V}_2$ tel que :$aff(\vec{u})=a$; la Translation $t_{\vec{u}}$ transforme $M(z)$ en $M'(z')$ si et seulement si :$z'=z+a$

Cette égalité s'appelle l'écriture complexe de la translation $t_{\vec{u}}$ de vecteur $\vec{u}$ tel que :

$\boldsymbol{aff(\vec{u})=a}$

2) L'homothétie : l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport k, admet une écriture complexe de la forme : $z'=kz+\omega(1-k)$

3) La rotation : La rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ, admet une écriture complexe de la forme :
$z'=(z-\omega)e^{\theta i}+\omega$

L) Etude de la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que: $z'=az+b$; $b\in\mathbb{C}$

1er cas: $a=0$: La transformation f est une constante, elle lie chaque point $M(z)$ au point fixe $B(b)$

2ieme cas: $a=1$: f est la transformation qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que $z'=z+b$

Dans ce cas la transformation f est une translation de vecteur $\vec{u}$ tel que : $aff(\vec{u})=b$

3éme cas : $a\in\mathbb{R}-\{0,1\}$

$f(M(z))=M'(z')\Leftrightarrow z'=az+b$; Soit : $\omega=\frac{b}{1-a}$ on a : Le point $\Omega(\omega)$ est un point invariant par f et on a :

$z'-\omega=a(z-\omega)$ qui se traduit par : $\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}$ donc :f est l'homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de Rapport a où $\omega=\frac{b}{1-a}$

Prof : ATMANI NAJIB

4éme cas : $a \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$: $\omega = \frac{b}{1-a}$ on a :$\Omega(\omega)$ est un point invariant par f.

On pose $a = e^{\alpha i}$ où $\alpha \neq 2k\pi$ (car $a \neq 1$)

$z' - \omega = a(z - \omega)$ La transformation f est la rotation de centre Ω ($\omega = \frac{b}{1-a}$) et d'angle α.

5me cas : $a \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$

La transformation plane f qui transforme $M(z)$ en $M'(z')$ tel que : $z' = az + b$ est la composition de la rotation R et de l'homothétie h ; $f = hoR$ où :

1) R est la rotation d'angle $\alpha \equiv arg(a)\ [2\pi]$ et de centre $\Omega(\omega)$ où $\omega = \frac{b}{|a| - a}$

2) h est l'homothétie rapport $r = |a|$ et de Centre O(0)

K) INTERPRETATION GEOMETRIQUE ET ENSEMBLE DE POINTS

ENSEMBLE DE POINTS	**INTERPRETATION GEOMETRIQUE**	Expression
Le cercle de centre **A(a) et de rayon** r	$AM = r$	$\lvert z-a\rvert = r$
La médiatrice du segment $[AB]$	$MA = MB$	$\lvert z-a\rvert = \lvert z-b\rvert$
La droite (AB) privée du point B	Les point A ; B et M sont alignés avec $B \neq M$	$\frac{z-a}{z-b} \in \mathbb{R}$
Le cercle de diamètre $[AB]$ privée du point B	Le triangle AMB est rectangle en M avec $B \neq M$	$\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$
La demi droite $[AC)$ privée du point A tel que C a pour affixe $(a + \cos\alpha + i\sin\alpha)$	$(\overline{\vec{u}; \overrightarrow{AM}}) \equiv \alpha[2\pi]$	$\arg(z-a) \equiv \alpha[2\pi]$

Exemple : le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $arg\, z \equiv 0[\pi]$ est :

A ☐ L'axe des réels **B** ☐ L'axe des imaginaires **C** ☐ le plan complexe

D ☐ L 'axe des réels privés du point O **E** ☐ Un demi droit d'origine O

Solution : ⇒ **D** ☐ L 'axe des réels privés du point O (la bonne réponse)

<u>Q107 : Concours de Médecine et Dentaire 2023-2024 Juillet 2023</u>

Le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 1$ tel que : $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est :

A ☐ La droit (Ox) privés du point $(1;0)$

B ☐ La droit (Oy) privés du point $(0;1)$

C ☐ Le cercle de centre O et de rayon 1

D ☐ La droit (Ox)

E ☐ Le cercle de centre O et de rayon 1 privée du point $(1;0)$

<u>Solution :</u> Méthode1 : Astuce : L'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$ est Le cercle de diamètre $[AB]$ privée du point B

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{z-(-1)}{z-1} = \frac{z-a}{z-b} \in i\mathbb{R}$$

Prof: ATMANI NAJIB

L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 1$ tel que : $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est : est Le cercle de diamètre $[AB]$ privée du point B avec : $A(-1=-1+0i)$ et $B(1=1+0i)$

Donc : le centre est $O\left(\frac{-1+1}{0}=0\right)$ et de rayon : $\frac{AB}{2}=\frac{|1-(-1)|}{2}=\frac{2}{2}=1$

Méthode2 : Soit $z \neq 1$; $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z+1}{z-1}\right)}=-\frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1}=-\frac{z+1}{z-1}$

$\Leftrightarrow (\bar{z}+1)(z-1)=-(z+1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow z\bar{z}-\bar{z}+z-1=z\bar{z}+z-\bar{z}+1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow |z|=1 \Leftrightarrow |z-0|=1$

L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 1$ tel que : $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$ est Le cercle de centre O et de rayon 1 privée du point : $B(1;0)$

La bonne réponse est : **E** ☐

<u>Q108. Concours de Médecine et de pharmacie « Rabat » 2011</u>

On considère les nombres complexes : $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Cocher la bonne réponse :

P_1 : La forme exponentielle de z^2 est : **A**☐ $4e^{i\frac{\pi}{6}}$ **B**☐ $4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ **C**☐ $4e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **D**☐ $4e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

P_2 : La forme exponentielle de z est : **A** ☐ $2e^{i\frac{\pi}{12}}$ **B** ☐ $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$ **C** ☐ $2e^{i\frac{5\pi}{15}}$ **D** ☐ $2e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

P_3 : Si $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ alors une valeur de α est :

A ☐ $\frac{\pi}{12}$ **B** ☐ $\frac{-5\pi}{12}$ **C** ☐ $\frac{5\pi}{12}$ **D** ☐ $-\frac{\pi}{12}$

<u>Solution</u> : Pour : P_1 : $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}} \Rightarrow z^2=\sqrt{2+\sqrt{3}}^2-2i\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}^2$

$\Rightarrow z^2=2+\sqrt{3}-2i\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}-2+\sqrt{3} \Rightarrow z^2=2\sqrt{3}-2i$

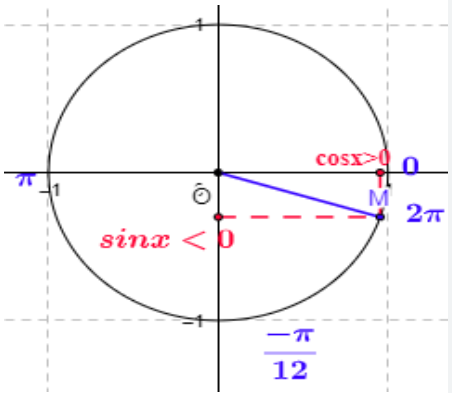
$\Rightarrow z^2=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=4\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}i\right)=4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)i\right)=4e^{-i\frac{\pi}{6}}$ La bonne réponse est : **E** ☐

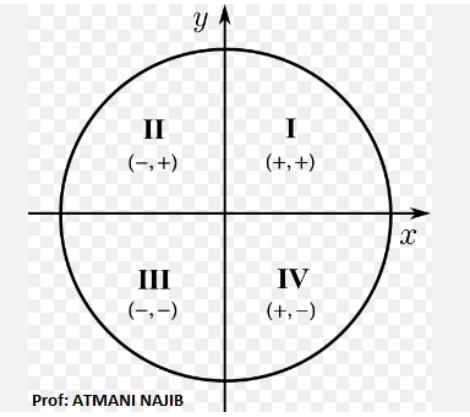
Pour : P_2 : $z^2=\left[4;-\frac{\pi}{6}\right] \Rightarrow z=\left[2;-\frac{\pi}{6}\right]$ *ou* $z=\left[2;-\frac{\pi}{6}+\pi\right] \Rightarrow 2\arg z=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \Rightarrow \arg z=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ $|z|=2$;

$\Rightarrow \arg z=-\frac{\pi}{12}$ *ou* $\arg z=-\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{11\pi}{12}$ Mais $Re(z)=\sqrt{2+\sqrt{3}} \succ 0$ et $\operatorname{Im} z=-\sqrt{2-\sqrt{3}} \prec 0$

$-\frac{\pi}{12}$ se trouve dans le 4ieme cadran : donc : $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) \succ 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \prec 0$ c'est-à-dire la partie réelle de z doit être positif et la partie imaginaire négatif et donc z doit être : $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$

Prof: ATMANI NAJIB





La bonne réponse est : **B**☐

Pour : P_2 : $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}=2e^{-i\frac{\pi}{12}}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Donc : $2\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $2\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Donc : $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

La bonne réponse est : **A**☐

Q109. Concours ENSA « Marrakech » 2010-2011

On note : Z_1 ; Z_2 ;... ; Z_n les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^n=1$; $n\in\mathbb{N};n\geq 2$

On note : $S=Z_1+Z_2+....+Z_n$ **et** $P=Z_1\times Z_2\times....\times Z_n$

Alors : **A** ☐ $S=0$ et $P=(-1)^{n+1}$ **B** ☐ $S=0$ et $P=1$

C ☐ $S=1$ et $P=(-1)^n$ **D** ☐ $S=1$ et $P=0$

Solution : On peut résoudre ce type d'exercice en traitant des cas particuliers (par élimination des réponses)

Pour $n=2$: les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $Z^2=1$ **sont :** $Z_1=1$; $Z_2=-1$

$S=Z_1+Z_2=1+(-1)=0$ **et** $P=Z_1\times Z_2=1\times(-1)=-1$

A ☐ : $\Rightarrow$ **A** ☐ probablement vraie **B** ☐ : $\Rightarrow$ **B** ☐ Faux **C** ☐ : $\Rightarrow$ **C** ☐ Faux

D ☐ : $\Rightarrow$ **D** ☐ Faux **E** ☐ probablement vraie

$\Rightarrow$ **A** ☐ et forcement vraie (car une seule réponse est vraie)

On doit donc cocher **A** ☒

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de Cours : CALCULS INTEGRALES

A) INTEGRATION D'UNE FONCTION CONTINUE.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux éléments de I ; et F une fonction primitive de f sur I. Le nombre $\boldsymbol{F(b)-F(a)}$ s'appelle l'intégrale de la fonction $\boldsymbol{f}$ entre $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ on écrit :

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

on lit somme $f(x)dx$ de $\boldsymbol{a}$ à $\boldsymbol{b}$ et on l'appelle intégrale de a à b.Le réel a s'appelle la borne inférieure de l'intégrale et le réel b s'appelle la borne supérieure

Remarque : la variable t est une variable muette, on peut le changer par n'importe qu'elle variable

Propriété1 : Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$ c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx\in\mathbb{R}$ **Propriété2 :** Soient f, g et f' des fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois éléments de I et α un réel, on a :1) $\int_a^b f'(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$ 2) $\int_a^b \alpha dx=\left[\alpha x\right]_a^b=\alpha(b-a)$

3) $\int_a^a f(x)dx=0$ 4) $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$ 5) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (Chasles)

6) $\int_a^b (f+g)(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$ (linéarité) ;

7) $\int_a^b (\alpha f)(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx$ (linéarité)

Exemple : $I=\int_0^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$: $2-e^x\geq 0\Leftrightarrow e^x\leq 2\Leftrightarrow x\leq \ln 2$

La Relation de Chasles donne : $I=\int_0^{\ln 2}\left|2-e^x\right|dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}\left|2-e^x\right|dx$

$$I=\int_0^{\ln 2}\left(2-e^x\right)dx+\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^x-2dx=\frac{1}{2}\left[2x-e^x\right]_0^{\ln 2}+\left[e^x-2x\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$

$$I=\left((2\ln 2-2)+1\right)+\left((3-2\ln 3)-(2-2\ln 2)\right)=\ln\left(\frac{16}{9}\right)$$

Q110. Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2022

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ **; si** $\int_0^1\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}dx=\frac{1}{a}$ Alors a : est égale à :

A ☐ $\ln(e-1)$ **B** ☐ $2e-1$ **C** ☐ $\ln(2e+1)$ **D** ☐ $\ln(2e-1)$ **E** ☐ $2e+1$

Solution : $\int_0^1\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}dx=\frac{1}{a}\Leftrightarrow\frac{1}{a}\int_0^1\frac{\left(e^{ax}\right)'}{1+e^{ax}}dx=\frac{1}{a}\Leftrightarrow\left[\ln\left(1+e^{ax}\right)\right]_0^1=1\Leftrightarrow\ln\left(1+e^a\right)=1\Leftrightarrow 1+e^a=e$

$\Leftrightarrow e^a=e-1\Leftrightarrow a=\ln(e-1)$ On doit donc cocher **A** ☒

Q111. Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

La valeur de l'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x\tan x}dx$ est égale à :

A ☐ $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B** ☐ $2-\sqrt{2}$ **C** ☐ $\sqrt{2}-2$ **D** ☐ $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}$ **E** ☐ $1-\sqrt{2}$

Solution : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x\frac{\sin x}{\cos x}}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}dx=\left[-\frac{1}{\sin x}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$

Prof : ATMANI NAJIB

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x \tan x} dx = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}} = -\sqrt{2}+2$$ On doit donc cocher **B** ☒

Q112. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

L'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx$ est égale à :

A ☐ 0 **B** ☐ $\ln 2+1$ **C** ☐ $\ln 2$ **D** ☐ 1 **E** ☐ $-\ln 2$

Solution : Puisque $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ donc : $\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} = \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x} = \frac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x}$

Par suite : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x} dx = \left[\ln|1+\sin^2 x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx = \ln\left|1+\sin^2\frac{\pi}{2}\right| - \ln|1+\sin^2 0| = \ln 2$$ On doit donc cocher **C** ☒

Q113. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

La valeur de l'intégrale : $\int_0^2 \frac{|1-x|}{|1-x^2|+|1+x^2|} dx$ est égale à :

A ☐ $-\frac{1}{6}$ **B** ☐ 0 **C** ☐ $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ **D** ☐ $\frac{\ln(2)}{2}$ **E** ☐ $2\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Solution : $\int_0^2 \frac{|1-x|}{|1-x^2|+|1+x^2|} dx = \int_0^1 \frac{|1-x|}{|1-x^2|+|1+x^2|} dx + \int_1^2 \frac{|1-x|}{|1-x^2|+|1+x^2|} dx$

$$I = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^2+1+x^2} dx + \int_1^2 \frac{-1+x}{-1+x^2+1+x^2} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1-x}{2} dx + \int_1^2 \frac{x-1}{2x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x) dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\ln 2}{2}$$ On doit donc cocher **D** ☒

Intégrales et ordre : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a \in I ; b \in I$ et $a \le b$

1)Si f est positive sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x) dx \ge 0$

2) Si $(\forall x \in [a;b])$; $f(x) \le g(x)$ alors : $\int_a^b f(x) dx \le \int_a^b g(x) dx$ 3) $\left|\int_a^b f(x) dx\right| \le \int_a^b |f(x)| dx$

Exemple : Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^n}\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$

On Montrer d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in [0;1]$: $\frac{e^{nx}}{1+e} \le \frac{e^{nx}}{1+e^x} \le \frac{e^{nx}}{2}$

Puis en encadre : $\frac{1}{e^n}\int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}$ et on utilise les gendarmes ……

B) LA VALEUR MOYENNE ET THEOREME DE LA MEDIANE

si f est une fonction continues sur un intervalle I et $a \in I$ et $b \in I$ et $a \le b$ alors il existe au moins un réel c dans [a ; b].Tel que : $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) dx$ et s'appelle La valeur moyenne de f sur [a ; b]

Prof : ATMANI NAJIB

C)TECHNIQUES DE CALCULS D'UNE INTEGRALE.

1) L'utilisation directe des fonctions primitives :

La fonction	Sa fonction primitive
$\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x + c$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$x^r \quad (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + c$
$sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cos(ax+b) + c$
$cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}sin(ax+b) + c$
$\frac{a}{1+x^2}$	$a \times arcta\,n(x) + c$

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u'u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'\sqrt[n]{u} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u'u^r \ (r \in \mathbb{Q}/\{-1\})$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v' ou$	$vou + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2+1}$	$arctan(u) + C$

La ligne en couleur gaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

Exemple : $I = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^2 \frac{\frac{1}{x}}{(1+\ln x)}dx = \int_1^2 \frac{1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^2 \frac{(1+\ln x)'}{(1+\ln x)}dx = \left[\ln|1+\ln x|\right]_1^2$

$I = \ln|1+\ln 2| - \ln|1+\ln 1| = \ln|1+\ln 2| = \ln(1+\ln 2)$

D)Intégration par partie :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et u' et v' sont continue sur I et soient a et b deux éléments de l'intervalle I on a :

$\int_a^b u'(x)v(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$

<u>Technique ALPES :</u> Dans certains cas, dans le cas d'une IPP, le choix de la fonction à dériver et celle à intégrer pose problème. La méthode des ALPES donne un coup de main pour s'en sortir.

ALPES :A=Arctan, Arcsin, Arccos, Argth,Argsh,Argch

L=Logarithmes

P=Polynômes

E=Exponentielles

S=Sin, cos, tan, sh, ch, th

La règle donc consiste à toujours dériver les fonctions qui se situent le plus à gauche en premier.

Si on veut par exemple intégrer $x^2\sin(x)$, on va dériver le polynôme et intégrer le sin vu que dans l'ordre de priorité, la famille P des polynômes vient avant la famille S des fonctions trigonométriques.

Q114. Concours de Médecine dentaire « Casablanca » Juillet 2009

La valeur de l'intégrale : $I = \int_0^1 xe^{x^2}dx$ est égale à :

A ☐ $\frac{1}{2}$ **B** ☐ $\frac{e-1}{2}$ **C** ☐ $\frac{e+1}{2}$ **D** ☐ ℓ **E** ☐ *autre réponse*

<u>Solution :</u> $I = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(x^2\right)' e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2\right)' e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1 - 1\right) = \frac{e-1}{2}$

On doit donc cocher **B** ☒

<u>Q115. Concours *de Médecine « Casablanca » Juillet 2004*</u>

La valeur de l'intégrale : $\int_1^e x\ln x dx$ est égale à :

A ☐ e D ☐ $e+1$ C ☐ $\frac{1}{2}$ D ☐ $\frac{e^2+1}{4}$ E ☐ *Autre réponse*

Solution : Intégration par partie : On pose : $u(x)=\ln x$; $u'(x)=\frac{1}{x}$

$v'(x)=x$; $v(x)=\frac{x^2}{2}$

Donc : $\int_1^e x\ln x dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\right)dx=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}\left[e^2-1\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$

On doit donc cocher **D**☒

Q116. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

La limite L à droite en 0 de la fonction : $\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt$ est :

A ☐ e^{-1} B ☐ $-\infty$ C ☐ $+\infty$ D ☐ 1

Solution : $\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt=\int_x^1\left(e^{-\frac{1}{t}}+\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}\right)dt=\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt+\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$

On va faire une Intégration par partie pour : $\int_x^1 1e^{-\frac{1}{t}}dt$

On pose : $u(t)=e^{-\frac{1}{t}}$; $u'(t)=\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}$

$v'(t)=1$ $v(t)=t$

$$\int_x^1 1e^{-\frac{1}{t}}dt=\left[te^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1-\int_x^1 t\frac{1}{t^2}e^{-\frac{1}{t}}dt=\left[t\times e^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1-\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

$$\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt=\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}}dt+\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt=\left[t\times e^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1-\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt+\int_x^1\frac{1}{t}e^{-\frac{1}{t}}dt$$

$$\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt=\left[t\times e^{-\frac{1}{t}}\right]_x^1=e^{-1}-x\times e^{-\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1\left(1+\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}dt=\lim_{x\to 0^+}e^{-1}-x\times e^{-\frac{1}{x}}=e^{-1}$ On doit donc cocher **A**☒

E) Intégration par changement de variable (Pour SM) : Soient g une fonction dérivable sur $[a, b]$ telle que g' continue sur $[a, b]$ et f une fonction continue sur $g([a, b])$ on a :

$\int_a^b(f\circ g)(t).g'(t)dt=\int_{g(a)}^{g(b)}f(x).dx$: Cette propriété s'appelle propriété du changement de variable.

Exemples : Calculer les intégrales suivantes : 1) $I_1=\int_1^3\frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x=\sqrt{t}$

2) $I_2=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t=e^x$

3) $I_3=\int_{e^{-2}}^{e}\frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x=\ln t$ 4) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$ on pose $x=\frac{\pi}{4}-t$

Prof : ATMANI NAJIB

Solution : 1) $I_1=\int_1^3\frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}$ on pose $x=\sqrt{t}$ On a : $x=\sqrt{t}$ donc : $\begin{cases}t=1\Rightarrow x=1\\ t=3\Rightarrow x=\sqrt{3}\end{cases}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\Rightarrow dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}$; $I_1=\int_1^3\frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2x}{(1+x^2)x}dt=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2}{1+x^2}dt$

$I_1=[2\arctan x]_1^{\sqrt{3}}=2\arctan\sqrt{3}-2\arctan 1=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$

2) $I_2=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx$ on pose $t=e^x$ On a : $t=e^x$ donc : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\ln 2\Rightarrow t=2\end{cases}$

$\frac{dt}{dx}=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$; on en déduit que : $\frac{dt}{t}=dx$

$I_2=\int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}+e^{2x}+3e^x}{1+e^{2x}}dx=\int_1^2\frac{t^3+t^2+3t}{1+t^2}\frac{dt}{t}=\int_1^2\frac{t^2+t+3}{1+t^2}dt=\int_1^2\left(t+\frac{3}{1+t^2}\right)dt$

$I_2=\left[\frac{1}{2}t^2+3\arctan x\right]_1^2$ (Continuer les calculs)

3) $I_3=\int_{e^{-2}}^{e}\frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt$; On a $I_3=\int_{e^{-2}}^{e}\frac{(\ln t)'}{\sqrt{3+\ln t}}dt$ on pose $x=\ln t$

$x=\ln t\Rightarrow dx=\frac{dt}{t}$ On a : $x=\ln t$ donc : $\begin{cases}t=e^{-2}\Rightarrow x=-2\\ t=e\Rightarrow x=1\end{cases}$

$I_3=\int_{e^{-2}}^{e}\frac{1}{t\sqrt{3+\ln t}}dt=\int_{-2}^{1}\frac{1}{\sqrt{3+x}}dx$

On sait que : $x\to 2\sqrt{3+x}$ est une primitive de : $x\to\frac{1}{\sqrt{3+x}}$ donc : $I_3=\left[2\sqrt{3+x}\right]_{-2}^{1}$ donc : $I_3=2$

4) $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)dx$ on pose $x=\frac{\pi}{4}-t$

On trouve : $I_4=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)-dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)dt$

On sait que : $\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan t}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan t}=\frac{1-\tan t}{1+\tan t}$ Donc : $1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{2}{1+\tan t}$

Donc : $I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2-\ln(1+\tan t))dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln(1+\tan t))dt$

$I_4=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2dt-I_4$ Donc: $2I_4=\ln 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}1dt\Rightarrow 2I_4=\frac{\pi}{4}\ln 2\Rightarrow I_4=\frac{\pi}{8}\ln 2$

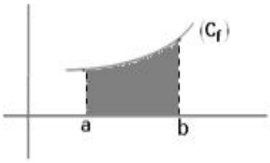
F) INTEGRALE ET SURFACE.

1)Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine situé entre la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équation :

x = a et x = b est : $A(\Delta_f)=\int_a^b|f(x)|dx\ ua$

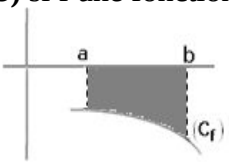
2)Si f une fonction continue et positif sur [a ; b]

Prof : ATMANI NAJIB



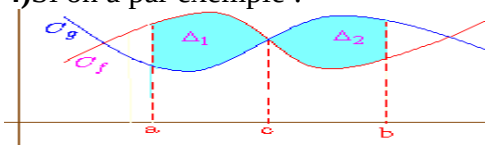
$$A(\Delta_f)=\int_a^b f(x)dx.ua$$

3) si f une fonction continue et négatif sur [a ; b]



$$A(\Delta_f)=-\int_a^b f(x)dx.ua$$

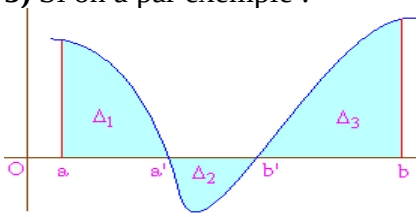
4)Si on a par exemple :



$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx$$

5) Si on a par exemple :



$$A(\Delta)=\int_a^{a'} f(x)dx+\int_{a'}^{b'} -f(x)dx+\int_{b'}^{b} f(x)dx \ \textbf{(ua)}$$

<u>Q117. Concours de Médecine et de pharmacie Juillet 2004 « Marrakech »</u>

On considère Les deux fonctions f et g définies sur $[0;+\infty[$ par :

$f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x^2$ (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=1cm$.

L'aire du domaine du plan délimité par (C_f) ;(C_g) et les droites d'équations : $x=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{3}{2}$ est : **A** ☐ $\left(\frac{1}{3}-\ln\frac{4}{3}\right)cm^2$ **B** ☐ $\left(\frac{1}{3}+\ln\frac{4}{3}\right)cm^2$ **C** ☐ $\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{4}\right)cm^2$ **D** ☐ $\left(-\frac{1}{2}-\ln\frac{4}{3}\right)cm^2$

E ☐ $\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{4}{3}\right)cm^2$

<u>Solution :</u> $I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|x^2-\frac{1}{x}\right|dx$ $x^2-\frac{1}{x}=\frac{x^3-1}{x}$ et si $x\geq 1$ alors $x^3\geq 1^3$ c'est-à-dire : $x^3-1\geq 0$

$$I=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|x^2-\frac{1}{x}\right|dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|x^2-\frac{1}{x}\right|dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\left|x^2-\frac{1}{x}\right|dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x}-x^2\right)dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$I=\left[\ln x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}+\left[\frac{x^3}{3}-\ln x\right]_{1}^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}-\ln\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{24}+\frac{9}{8}-\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{1}{24}+\frac{9}{8}+\ln(2)-\ln 3+\ln(2)$$

$I=\frac{1}{2}-\ln 3+2\ln(2)=\frac{1}{2}-(\ln 3+\ln(4))=\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{4}$ et par suite : $A(\Delta)=\left(\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{4}\right)cm^2$

On doit donc cocher **C**☒

Prof: ATMANI NAJIB

Q118. Concours ENSA

L'aire du domaine du plan délimité par la courbe d'équation : $y = \cos(\ln x)$ et les droites d'équations : $x = e^{\frac{\pi}{2}}$ et $x = e^{\pi}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\| = 2cm$.

Est égale à : **A** ☐ $2\left(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)cm^2$ **B** ☐ $2\left(e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}\right)cm^2$ **C** ☐ $\left(e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}\right)cm^2$ **D** ☐ $\left(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)cm^2$

Solution : $I = \int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}} |\cos(\ln x)| dx$; comme et si $e^{\pi} \le x \le e^{\frac{\pi}{2}}$ alors $\frac{\pi}{2} \le \ln x \le \pi$

Donc : $\cos(\ln x) \le 0$ car sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ le cosinus est négatif (voir cercle trigo)

Donc : $I = -\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx$ on pose : $\ln x = t$ donc : $x = e^t$: $\begin{cases} x = e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ x = e^{\pi} \Rightarrow t = \pi \end{cases}$ et $dx = e^t dt$

$$I = -\int_{e^{\frac{\pi}{2}}}^{e^{\pi}} \cos(\ln x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos t) \times e^t dt$$

On fait une intégration par partie deux fois….

On pose : $u(t) = -\cos t$; $u'(t) = \sin t$

$v'(t) = e^t$; $v(t) = e^t$

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos t) \times e^t dt = \left[(-\cos t) e^t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \times e^t dt = e^{\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin t \times e^t dt$$

On pose : $u(t) = -\sin t$; $u'(t) = -\cos t$

$v'(t) = e^t$; $v(t) = e^t$

$$I = e^{\pi} + \left[(-\sin t) e^t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos t \times e^t dt \Rightarrow I = e^{\pi} + 0 + e^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\cos t \times e^t dt$$

$\Rightarrow I = e^{\pi} + 0 + e^{\frac{\pi}{2}} - I \Rightarrow 2I = e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow I = \frac{e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ Par suite : $A = \frac{e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \times 4cm^2 = 2\left(e^{\pi} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)cm^2$

On doit donc cocher **A**☒

G) INTEGRALE ET CALCUL DES VOLUMES

Propriété1 : Soit (S) un solide compris entre les plans / $Z = a$ et $z = b$

Le volume par unité de volume du solide (S) est : $V_{(S)} = \int_a^b S(t) dt$ Où $S(t)$ est la surface de l'intersection du solide S et du plan $z = t$

Propriété2 : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La rotation de la courbe (C_f) au tour de l'axe des abscisses engendre un solide de volume $\boxed{V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx}$ $u.v$ (par unité de volume)

si le repere est : $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ $u.v = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

Q119. Concours médecine et de pharmacie :

$(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ Orthonormé avec : $\|\vec{i}\| = \frac{2}{3}cm$; Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ et (C) la courbe de f, Le volume en cm^3 du solide engendré par La rotation de la courbe C_f au tour de l'axe des abscisses

Prof : ATMANI NAJIB

dans l'intervalle $[0;1]$ est/

A ☐ $\frac{2\pi}{27}$ **B** ☐ $\frac{5\pi}{27}$ **C** ☐ $-\frac{2\pi}{27}$ **D** ☐ $\frac{4\pi}{27}$ **E** ☐ 4π

Solution : $I=\int_0^1 \pi\left(f(x)\right)^2 dx=\int_0^1 \pi\left(\sqrt{x\left(e^x-1\right)}\right)^2 dx=\pi\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx$

On calcul : $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx$:On utilise une intégration par partie :

On pose : $u'(x)=e^x-1$ et $v(x)=x$

Donc : $u(x)=e^x-x$ et $v'(x)=1$

Donc : $\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=\left[x\left(e^x-x\right)\right]_0^1-\int_0^1 1\left(e^x-x\right)dx$

$$\int_0^1 x\left(e^x-1\right)dx=e-1-\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=e-1-e+\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$$

Donc : $I=\frac{1}{2}\pi$ par suite : $V=\frac{1}{2}\pi\times\frac{8}{27}c^3m=\frac{4\pi}{27}c^3m$

H) SOMMES DE RIEMANN : (Pour SM) : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$; $a\prec b$

On pose : $s_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ et $S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$

Les sommes s_n et S_n s'appelle les sommes de Riemann. Les suites $(s_n)_n$ et $(S_n)_n$ sont convergentes et

$$\lim_{n\to+\infty} s_n=\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_a^b f(x)dx$$

Exemple : Calculer :1) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$ 2) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 3) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}$ 4) $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

Solution : 1) $\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

Et d'après cette expression on conclut que : $a=0$ et $a=1$ et $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

On aura : $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$$=\left[ar\tan x\right]_0^1=ar\tan 1-ar\tan 0=\frac{\pi}{4}$$

2) $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$ De l'expression on peut remarquer que :

$a=1$ et $b=2$ et $f(x)=\frac{1}{x}$ et puisque f est continue sur $[1;2]$ alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\int_1^2\frac{1}{x}dx=\left[\ln(x)\right]_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

3) On pose (changement d'indice) $j=k-n$ on obtient : $\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}$ $(n+k=n+j+n=2n+j)$

Prof : ATMANI NAJIB

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j+2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{j}{n}\right)+2}$

De l'expression on peut remarquer que : $a=0$ et $b=1$ et $f(x)=\frac{1}{2+x}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{n+k}=\int_0^1\frac{1}{2+x}dx=\left[\ln(2+x)\right]_0^1=\ln 3-\ln 2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}g\left(1+\frac{k}{n}\right)$

De l'expression on peut remarquer que : $a=1$ et $b=2$ et $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$

I) DERIVATION DE $\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt$: (Pour SM)

1) Soit f une fonction continue sur I et $a\in I$; la fonction F définie par : $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est la fonction primitive de la fonction f qui s'annule en a. La fonction F est dérivable sur I et $(\forall x\in I)$ $(F'(x)=f(x))$

J) Dérivée de la fonction $\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt$ (Pour SM)

Soit f une fonction continue sur un intervalle J ; u et v deux fonctions définie, dérivable sur I telles que : $u(I)\subset J$ et $v(I)\subset J$. La fonction $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\,dt$ est dérivable sur I et :

$(\forall x\in I)(F'(x)=v'(x)\times f(v(x))-u'(x)\times f(u(x))$

Exemple1 : étudier la dérivabilité de la fonction F définit par :F $(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}e^{-t^2}dt$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et calculer $F'(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$

<u>Solution :</u> F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ car $x\to\frac{1}{x}$ et $x\mapsto lnx$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^{*+}$ et la fonction f: $t\to e^{-t^2}$ est Continue sur $\mathbb{R}$ soit φ une fonction primitive de f.

$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}e^{-t^2}dt=\left[\varphi(t)\right]_{\frac{1}{x}}^{\ln x}$;

$\forall x\in\mathbb{R}^{*+}$ $F'(x)=(\varphi o v)'(x)-(\varphi o u)'(x)=v'(x)\times\varphi'(v(x))-u'(x)\times\varphi'(u(x))$

$F'(x)=v'(x)\times f(v(x))-u'(x)\times f(u(x))=(\ln x)'\,e^{-(\ln x)^2}-\left(\frac{1}{x}\right)'e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

$F'(x)=\frac{1}{x}e^{-(\ln x)^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}}$

Remarque1 : $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$ et $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

Remarque2 : $w(x)=\frac{\sin x\times\cos x}{1+\sin x}dx$ règles de bioche

Si $w(-x)=w(-x)$ on pose : $t=\cos x$

Prof : ATMANI NAJIB

Si $w(\pi - x) = w(x)$ on pose : $t = \sin x$

Si $w(\pi + x) = w(x)$ on pose : $t = \tan x$

Sinon : on pose : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ si $t = \tan\frac{x}{2}$ alors : $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

Q120. Concours de Médecine et Dentaire 2021-2022 Juillet 2021

L'intégrale : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ est égale à :

A ☐ $\frac{\pi}{3}$ B ☐ $\frac{\pi}{4}$ C ☐ $\frac{\pi}{6}$ D ☐ $\frac{\pi}{8}$ E ☐ $\frac{\pi}{12}$

Solution : On peut calculer : $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$ à l'aide d'un changement de variable

On pose : $t = \frac{\pi}{2} - x$: si $x = \frac{\pi}{6}$ alors : $t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et si $x = \frac{\pi}{3}$ alors : $t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ et $dt = -dx$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx = -\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$$

$$I + I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 1 dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Donc : $2I = \frac{\pi}{6} \Rightarrow I = \frac{\pi}{12}$

On doit donc cocher **E**☒

Remarque3 : $I = \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ **est ;**

Si $a = 0$ on pose : $t = bx + c$

Si $a \succ 0$ et $\Delta \succ 0$ on pose : $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}$ et $I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right) + c$

Si $a \succ 0$ et $\Delta \prec 0$ on pose : $t = \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}}$ et $I = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left(\left|t + \sqrt{t^2 + 1}\right|\right) + c$

Si $a \prec 0$ et $\Delta \succ 0$ on pose : $t = -\frac{2ax + b}{\sqrt{\Delta}}$ et $I = \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin t + c$

Remarque4 : pour $I = \int_a^b \frac{dx}{\cos^n x}$ et $I = \int_a^b \frac{dx}{\sin^n x}$

Si n pair on pose : $t = \tan x$ Si n impair on pose : $t = \tan\frac{x}{2}$

Remarque5 : si $t = \tan\frac{x}{2}$ alors : $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$

Remarque6 : $I = \int \frac{P(x)}{x - \alpha} dx$ **;avec** $\deg P \geq 1$

Pour calculer I on divise $P(x)$ par $x - \alpha$ (euclidienne) : on trouve : $P(x) = (x - \alpha)Q(x) + P(\alpha)$

On peut aussi utiliser le tableau d'orner :

Prof : ATMANI NAJIB

Exemple : $I=\int_2^3 \frac{3x^3+x^2-2x-4}{x-1}dx$

Le tableau d'orner : $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Coefficients de $P(x)$	3	1	-2	-4
1	$1\times 3=3$	3+1=**4**	4+(-2)=**2**	2+(-4)=**-2**

$P(x)=3x^2+4x+2+\frac{-2}{x-1}$ Puis on calcul I : Remarque : ($\frac{-2}{x-1}=-2\frac{(x-1)'}{x-1}$

Q121 : Concours de Médecine et Dentaire 2020-2021 Juillet 2020

L'intégrale : $\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2}dt$ est égale à :

A ☐ $\ln\frac{3}{2}$ **B** ☐ $2+\ln\frac{3}{2}$ **C** ☐ $2-\ln\frac{2}{3}$ **D** ☐ $2+\ln\frac{2}{3}$ **E** ☐ $\ln\frac{2}{3}$

Solution : Pour calculer I on divise $2t+3$ *par* $t+2$ (euclidienne) : on trouve : $2t+3=2(t+2)-1$

$$\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2}dt=\int_0^1 \frac{2(t+2)-1}{t+2}dt=\int_0^1 \frac{2(t+2)}{t+2}-\frac{1}{t+2}dt=\int_0^1 2-\frac{(t+2)'}{t+2}dt=\left[2t-\ln(t+2)\right]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{2t+3}{t+2}dt=2-\ln(3)+\ln(2)=2+\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$ On doit donc cocher **D**☒

Remarque7 : $I=\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$

Pour calculer I on calcule le discriminant de : ax^2+bx+c

Si : $\Delta=0$: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$: $I=\int \frac{1}{a(x-x_1)^2}dx=\frac{1}{a}\int \frac{(x-x_1)'}{(x-x_1)^2}dx=-\frac{1}{a}\left[\frac{1}{x-x_1}\right]$

Si : $\Delta\succ 0$: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$: $\frac{1}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{\alpha}{x-x_1}+\frac{\beta}{x-x_2}$

Puis on calcul I

Si : $\Delta\prec 0$: $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$ (la forme canonique)

On termine les calcul ☹($\int \frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+c$

Exemple1 : Calculer l' intégrale suivante : $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx$

Solution : On remarque que : $\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)$ donc : $I=\int_0^1 \frac{1}{x^2-4}dx=\int_0^1 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

et la linéarité de l'intégrale donne : $I=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$

$$I=\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{x+2}dx=\frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_0^1-\frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_0^1=-\frac{1}{4}\ln 2-\frac{1}{4}(\ln 3-\ln 2)=-\frac{1}{4}\ln 3$$

Exemple2 : Calculer $F(x)=\int \frac{x^6}{x^4-1}dx$: la division euclidienne de : x^6 par x^4-1 donne

$$F(x)=\int \frac{x^6}{x^4-1}dx=\int x^2dx+\int \frac{x^2}{x^4-1}dx$$

Prof: ATMANI NAJIB

$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}$: c'est la décomposition en élément simple de la fraction

$$F(x)=\int\frac{x^6}{x^4-1}dx=\int x^2dx+\int\frac{x^2}{x^4-1}dx=\int x^2dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}dx-\frac{1}{4}\int\frac{1}{x+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{1}{x-1}dx$$

D'où : $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

Exemple2 : Calculer $F(x)=\int\frac{1}{x^2+2x+\lambda}dx$.

Solution : $\underline{1.\ \lambda=1}$: $\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{dx}{(1+x)^2}=-\frac{1}{x+1}+C$.

$\underline{2.\ \lambda>1}$: $\int\frac{1}{x^2+2x+\lambda}dx=\int\frac{dx}{(x+1)^2+\lambda-1}$; on pose $y=x+1$:

$$F(x)=\frac{1}{\lambda-1}\int\frac{dy}{\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\int\frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}\right)}{\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\arctan\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{\lambda-1}}+C.$$

$\underline{3.\ \lambda<1}$: $x^2+2x+\lambda$ *admet deux racines réelles :* $x=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$.

$$\frac{1}{x^2+2x+\lambda}=\frac{a}{x+1-\sqrt{1-\lambda}}+\frac{b}{x+1+\sqrt{1-\lambda}}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\a\left(1+\sqrt{1-\lambda}\right)+b\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\\b=-\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\end{cases}$$

$$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\ln\left|x+1-\sqrt{1-\lambda}\right|-\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\ln\left|x+1+\sqrt{1-\lambda}\right|=\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{1-\lambda}}{x+1+\sqrt{1-\lambda}}\right|+C.$$

Remarque8 : pour $I_1=\int_a^b\cos^n x\,dx$ et $I_1=\int_a^b\sin^n x\,dx$ et $I_3=\int_a^b\tan^n x\,dx$ et $n\succ 2$

Si n impair : pour : I_1 : on a $\cos^n x=\cos x\cos^{n-1}x$ et $\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Si n impair : pour : I_2 : on a $\sin^n x=\sin x\sin^{n-1}x$ et $\sin^2 x=1-\cos^2 x$

Si n pair : pour : I_1 et I_2 on fait une linéarisation de : $\cos^n x$ et $\sin^n x$

Pour : $I_3=\int_a^b\tan^n x\,dx$ et $n\succ 2$: on a $\tan^n x=\tan^2 x\times\tan^{n-2}x=(\tan' x-1)\times\tan^{n-2}x$

Exemple1 : $I_3=\int_a^b\tan^3 x\,dx=\int_a^b(\tan' x-1)\times\tan^{3-2}x\,dx=\int_a^b(\tan' x-1)\times\tan x\,dx$

$I_3=\int_a^b\tan' x\times\tan x\,dx-\int_a^b\tan x\,dx$ Et on finit les calcules

Exemple2 : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx$ on fait une linéarisation de : $\cos^4 x$

On a : $\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ donc : $\cos^4 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{1}{16}\left(\left(e^{ix}\right)^4+4\left(e^{ix}\right)^3\cdot\left(e^{-ix}\right)+6\left(e^{ix}\right)^2\cdot\left(e^{-ix}\right)^2+4\left(e^{ix}\right)^1\cdot\left(e^{-ix}\right)^3+\left(e^{-ix}\right)^4\right)$

$$\cos^4 x=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{i3x}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}\right)=\frac{1}{16}\left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{2ix}+6\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(\left(e^{4ix}+e^{-4ix}\right)+4\left(e^{2ix}+e^{2ix}\right)+6\right)$$

Or on sait que : $2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$ et $2\cos nx=e^{inx}+e^{-inx}$

Donc : $\cos^4 x=\frac{1}{8}(\cos 4x+4\cos 2x+3)$

Prof : ATMANI NAJIB

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x dx=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 4x+4\cos 2x+3)dx=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4x+4\frac{1}{2}\sin 2x+3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 2\pi+4\frac{1}{2}\sin\pi+3\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{16}$$

Remarque9 : pour $I=\int_a^b e^x\cos x dx$ et $J=\int_a^b e^x\sin x dx$

On fait une intégration par partie deux fois….

<u>Q 122. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie</u>

L'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x dx$ est égale à : **A** ☐ $\frac{1+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ **B** ☐ $\frac{e+e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$

C ☐ $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}}}{2}$ **D** ☐ $1+e^{\frac{\pi}{2}}$ **E** ☐ $1-e^{\frac{\pi}{2}}$

<u>Solution :</u> On fait une intégration par partie deux fois….

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)e^x dx=\left[\sin(x)e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x dx$$

Donc : $I=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x dx$ une 2 ieme intégration par partie pour $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)e^x dx$ **donne :**

$$I=e^{\frac{\pi}{2}}-\left(\left[\cos x e^x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x e^x dx\right)$$ C'est-à-dire : $I=e^{\frac{\pi}{2}}-(-1+I)$

Donc : $I=e^{\frac{\pi}{2}}+1-I\Rightarrow 2I=e^{\frac{\pi}{2}}+1\Rightarrow I=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$ On doit donc cocher **A**☒

Remarque10 : pour $I=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{\pi R^2}{4}$ c'est l'aire du quart d'un cercle de centre O et de rayon R

Pour $J=\int_{-R}^R\sqrt{R^2-x^2}dx=\frac{\pi R^2}{2}$ c'est l'aire d'un demie cercle de centre O et de rayon R

<u>Q123: Concours de Médecine et pharmacie 2018-2019 FES: Juillet 2019</u>

$$I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx$$

A ☐ $I=\pi$ **B** ☐ $I=2\pi$ **C** ☐ $I=0$ **D** ☐ $I=\pi\sqrt{2}$ **E** ☐ $I=2\sqrt{2}$

<u>Solution :</u> $I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{2}^2-x^2}dx$ c'est l'aire d'un demie cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$ donc : $I=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}dx=\frac{\pi\sqrt{2}^2}{2}=\frac{\pi 2}{2}=\pi$

On doit donc cocher A ☒

Remarque11 : Pour $I=\int_{-a}^a f(x)dx=0$ si f est impaire

Pour $I=\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$ si f est paire

Prof : ATMANI NAJIB

Remarque12 : $I=\int_a^b U'(x)\cos(U(x))dx=\left[\sin(U(x))\right]$

$J=\int_a^b U'(x)\sin(U(x))dx=-\left[\cos(U(x))\right]$

$K=\int_a^b U'(x)\left(1+\tan^2(U(x))\right)dx=\int_a^b \frac{U'(x)}{\cos^2(U(x))}dx=\left[\tan(U(x))\right]$

Remarque13 : $I=\int_a^b \frac{1}{\sin x}dx$ et $J=\int_a^b \frac{1}{\cos x}dx$

Methode1 : on pose : $t=\tan\frac{x}{2}$ avec : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos x=\frac{1+t^2}{1-t^2}$

Methode2 : on remarque que : $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$ et $\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$

Q124. Concours *de Médecine « Casablanca » Juillet 2005*

La valeur de l'intégrale : $I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}$ **est égale à :**

A ☐ $I=2$ **B** ☐ $I=\frac{\pi}{3}$ **C** ☐ $I=\ln\sqrt{3}$ **D** ☐ $I=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ **E** ☐ *Autre réponse*

Solution : Methode1 : On remarque que : $\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}+\frac{\cos x}{1-\sin x}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\right)dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}-\frac{(1-\sin x)'}{1-\sin x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x|-\ln|1-\sin x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+\sin\frac{\pi}{3}\right|-\ln\left|1-\sin\frac{\pi}{3}\right|\right)$$

$$I=\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right|-\ln\left|1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\left(2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\right|=\ln\left(2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

On doit donc cocher **D** ☒

Methode2 : on pose : $t=\tan\frac{x}{2}$ et on a : $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Si $x=0$ alors : $t=0$ et si $x=\frac{\pi}{3}$ alors : $t=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $dt=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(1+t^2\right)dx$

Donc : $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{2dt}{1-t^2}=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{(1-t)(1+t)}$$

Et on a : $\frac{1}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\frac{(1+t)+(1-t)}{(1-t)(1+t)}=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+t)}{(1-t)(1+t)}+\frac{(1-t)}{(1-t)(1+t)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)$

$$I=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dt}{(1-t)(1+t)}=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(-\frac{(1-t)'}{1-t}+\frac{(1+t)'}{1+t}\right)dt=\left[-\ln|1-t|+\ln|1+t|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Prof : ATMANI NAJIB

$$I=\left[\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\right|=\ln\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|=\ln\left|\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}\right|=\ln\left|\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right|=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

Q125 : Concours de Médecine et Dentaire 2021-2022 Juillet 2021

L'intégrale : $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx$ est égale à :

A ☐ $\sqrt{\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)}$ **B** ☐ $\ln\sqrt{1+e}$ **C** ☐ $\ln(1+e)$ **D** ☐ $\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$ **E** ☐ $\sqrt{\ln(1+e)}$

Solution : Methode1 :

$$\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx=\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}\times\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(e^{x^2}+1\right)'}{e^{x^2}+1}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(e^{x^2}+1\right)\right]_0^1$$

$$\int_0^1\frac{x}{1+e^{-x^2}}dx=\frac{1}{2}\left(\ln(e+1)-\ln(1+1)\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+e)-\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)=\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$$

On doit donc cocher **D** ☒

Methode2 : $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}}dx$ on pose $t=x^2$ On a : $x=\sqrt{t}$ donc : $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=1\Rightarrow t=1\end{cases}$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\Rightarrow dx=\frac{dt}{2\sqrt{t}}\ ;\ \int_0^1\frac{x}{1+e^{-x^2}}dx=\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{1+e^{-t}}\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+e^{-t}}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{e^t}{e^t+1}dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\left(e^t+1\right)'}{e^t+1}dt$$

$$\int_0^1\frac{x}{1+e^{-x^2}}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+e^t\right)\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(\ln(1+e)-\ln(1+1)\right)=\frac{1}{2}\left(\ln(1+e)-\ln 2\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)=\ln\sqrt{\frac{1+e}{2}}$$

On doit donc cocher **D** ☒

Remarque : On peut aussi poser : $t=e^{-x^2}$

Q126: Concours de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda:

Donner la bonne réponse

A ☐ On considère La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=|x-2|+1$ alors : $\int_0^3 f(x)dx=\frac{11}{4}$

B ☐ $I=\int_{-3}^3\sqrt{9-x^2}dx$: c'est l'aire d'un demie disque de centre O et de rayon 3

C ☐ $\int_0^1 x^{2k}dx=2k+1$ avec : $k\in\mathbb{N}$ **D** ☐ $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(xe^{x^2}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{4}}-3\right)$

E ☐ $\int_0^{\pi}e^{-x}\sin 2x dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{-x}\cos 2x dx$

Solution : Pour : **A** ☐ :

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(|x-2|+1\right)dx=\int_0^2\left(|x-2|+1\right)dx+\int_2^3\left(|x-2|+1\right)dx=\int_0^2(3-x)dx+\int_2^3(x-1)dx$$

$$\int_0^3 f(x)dx=\left[3x-\frac{3}{2}x^2\right]_0^2-\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_2^3=\frac{3}{2}$$ Par suite $\Rightarrow$ **A** ☐ **faux**

Pour : **C** ☐ : $\int_0^1 x^{2k}dx=\left[\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\right]_0^1=\frac{1}{2k+1}\neq 2k+1\Rightarrow$ **C** ☐ faux

Prof : ATMANI NAJIB

Pour : **D** ☐ : $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(xe^{x^2}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{x^2}-\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi^2}{16}}-3\right)$ $\Rightarrow$ **D** ☐ **faux**

Pour : **E** ☐ : $\int_0^{\pi} e^{-x}\sin 2x dx$ $\Rightarrow$ Intégration par partie

$\int_0^{\pi} e^{-x}\sin 2x dx=\left[-e^{-x}\cos 2x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos 2x dx=\left(e^{-\pi}+1\right)-\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{-x}\cos 2x dx$ $\Rightarrow$ **E** ☐ **faux**

On doit donc cocher **B** ☒

Remarque : on a : l'aire d'un demie disque de centre O et de rayon 3 est : $Aire=\frac{\pi R^2}{2}=\frac{9\pi}{2}$

$I=\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx=2\int_0^{3}\sqrt{9-x^2}dx$ Car $\sqrt{9-x^2}$ est paire

On peut calculer : $\int_0^{3}\sqrt{9-x^2}dx$ à l'aide d'un changement de variable

On pose : $x=3\sin t$ si $x=3$ alors : $x=\frac{\pi}{2}$ et si $x=0$ alors : $x=0$ et $dx=3\cos t dt$

$I=2\int_0^{3}\sqrt{9-x^2}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9-9\sin^2 t}3\cos t dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sqrt{1-\sin^2 t}3\cos t dt=18\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$

Or : $\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}$; $I=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}1+\cos 2t dt=9\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{2}$ On doit donc cocher **B** ☒

<u>Q127 : Concours de Médecine et pharmacie :</u>

L'intégrale : $\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx$ est égale à : **A** ☐ $\frac{\pi}{2}+1$; **B** ☐ $\frac{\pi}{2}-1$; **C** ☐ $1+\frac{\pi}{4}$; **D** ☐ $-1-\frac{\pi}{4}$

<u>Solution :</u> Methode1 : (par élimination des réponses) : mais avant on va encadrer cette intégrale
En utilisant les propriétés de l'Intégrale et l'ordre :

$0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le x^2\le 1\Leftrightarrow 1\le 1+x^2\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{1+x^2}\le 1$ ❶

$0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le x^2\le 1\Leftrightarrow -1\le -x^2\le 0\Leftrightarrow 0\le 1-x^2\le 1$ ❷

❶ **et** ❷ $\Rightarrow 0\le\frac{1-x^2}{1+x^2}\le 1\Rightarrow\int_0^1 0dx\le\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx\le\int_0^1 1dx\Rightarrow 0\le I\le 1\Rightarrow I\in[0;1]$

A ☐ $\frac{\pi}{2}+1\notin[0;1]\Rightarrow$ **A** ☐ Faux

B ☐ $\frac{\pi}{2}-1$: $\frac{\pi}{2}-1\simeq\frac{3,15}{2}-1\simeq\frac{3,15}{2}-1\simeq 0,....\in[0;1]\Rightarrow$ **B** ☐ probablement vraie

C ☐ $1+\frac{\pi}{4}\notin[0;1]\Rightarrow$ **C** ☐ Faux

D ☐ $-1-\frac{\pi}{4}\notin[0;1]\Rightarrow$ **D** ☐ Faux $\Rightarrow$ **B** ☐ et forcement vraie (car une seule réponse est vraie)

On doit donc cocher **B** ☒

Methode2 : On remarque que : On la division euclidienne de : $1-x^2$ **par** $1+x^2$

OU en remarquons que : $1-x^2=-\left(1+x^2\right)+2$

$\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{-\left(1+x^2\right)+2}{1+x^2}dx=\int_0^1 -1+2\frac{1}{1+x^2}dx=\left[-x+2\arctan x\right]_0^1=-1+2\arctan 1+0+2\arctan 0=-1+2\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}-1$

On doit donc cocher **B** ☒

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé probabilités

A) Vocabulaire des probabilités et dénombrements

Dans une expérience aléatoire on ne peut pas prévoir avec certitude quel en sera le résultat

On associe alors l'ensemble Ω des résultats possibles appelé univers. Ses éléments sont appelés éventualités.

Le nombre d'éléments distincts de Ω est appelé le cardinal de Ω, on le note : Card(Ω)

3)Un évènement correspond à une partie de l'univers et Les événements formés d'un seul élément sont appelés événements élémentaires.

Si E et F sont deux événements, $\overline{E}$ est l'événement contraire de E, $E\cup F$ est la réunion de A et B, $E\cap F$ est l'intersection de E et F

E et F sont incompatibles ssi $E\cap F=\varnothing$

L'événement G =Ω est l'événement certain.

L'événement M = ∅ est l'événement impossible et on a : $E\cap\overline{E}=\varnothing$ et $E\cup\overline{E}=\Omega$

4) $card(E\cup F)=card(E)+card(F)-card(E\cap F)$

5) Si E et F sont disjoints $(E\cap F=\varnothing)$ alors : $card(E\cup F)=card(E)+card(F)$

Si $(X_i)_{1\le i\le n}$ est une famille d'ensembles disjoints deux a deux ($(X_i\cap X_j=\varnothing)$ si $(i\neq j)$) alors :

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{i=n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{i=n}card(X_i)$$

6)Si $E\subseteq F$ alors : $card(E)\le card(F)$ et $card(F-E)=card(C_F^E)=card(F)-card(E)$

7) $card(E\times F)=cardE\times cardF$

8)Soient E et F deux ensembles finis et non vides. le cardinal de L'ensemble des applications de E dans F est : $(cardF)^{cardE}=m^n$ avec : $cardF=m$ et $cardE=n$

9)Soit E un ensemble fini et non vide et $cardE)=n$ $n\in\mathbb{N}$ et soit $P(E)$ l'ensembles des parties de E on a : $cardP(E)=2^n$

B) Nombre d'arrangements avec répétitions :

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments de E est égal à n^p.

C)Nombre d'arrangements sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le nombre d'arrangements sans répétitions de p éléments de E se note : A_n^p et est égal à : $A_n^p=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times(n-p+1)$

D) Nombre de permutations sans répétitions

Soit E un ensemble fini de cardinal n. $n\in\mathbb{N}^*$

Une **permutation** des éléments de E est une liste ordonnée d'éléments de E sans répétitions et le nombre de permutations d'un ensemble fini E à n éléments est le nombre **n! (Factorielle *n*)** défini par

$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$

E) Nombre de permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont Identiques est évidemment plus petit que si tous les éléments sont distincts.

Lorsque seuls *k* éléments sont distincts ($k\le n$), chacun d'eux apparaissant n_1, n_2, ..., n_k fois, avec

$n_1+n_2+...+n_k=n$ et $n_i\ge1$, on a : $P_n=\dfrac{n!}{n_1!\times n_2!\times...\times n_k!}$ (P_n permutations avec répétitions)

Exemple : Combien de mots de 3 lettres peut-on former avec deux lettres de A et une seule lettre de B ?

Solution : AAB ; BAA ; ABA : $P_3=\dfrac{3!}{1!\times2!}=\dfrac{3\times2!}{1!\times2!}=3$

F) Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments est le nombre que l'on note par : C_n^p et on a : $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$; $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$; $C_n^0 = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^n = 1$; $C_n^p = C_n^{n-p}$; $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$: La relation de Pascal

Applications : Triangle de Pascal

La relation de Pascal permet de construire facilement un triangle qu'on nomme triangle de Pascal :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

Formule du binôme de Newton : $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $b \in \mathbb{R}$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$

Exemple :En utilisans le Triangle de Pascal

$$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1y^5$$

$$(x-y)^5 = 1x^5 - 5x^4y^1 + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5x^1y^4 - 1y^5$$

<u>Q128 : Concours de Médecine et pharmacie Oujda</u>

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$ la somme S_n est :

A ☐ $n \times 2^n$ **B** ☐ $(n-1) \times 2^n$ **C** ☐ $n \times 2^{n-1}$ **D** ☐ 2^n **E** ☐ $(n+1) \times 2^n$

<u>Solution</u> : Méthode1 (pour les concours): On procède par élimination des réponses :

On a : Pour n=1 : $S_1 = \sum_{k=1}^{1} kC_1^k = 1C_1^1 = 1 \times 1 = 1$

Pour : A ☐ $1 \times 2^1 = 1 \times 2 = 2 \neq 1 \Rightarrow$ A ☐ Faux

Pour : B ☐ $(1-1) \times 2^1 = 0 \times 2 = 2 \neq 1 \Rightarrow$ B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $1 \times 2^{1-1} = 1 \times 2^0 = 1 \times 1 = 1 \Rightarrow$ C ☐ probablement vraie pour l'instant

Pour : **D**☐ On a : $2^1 = 2 \neq 1 \Rightarrow$ **D** ☐ Faux

Pour : **E**☐ On a : $(1+1) \times 2^1 + 2 \times 2 + 4 \neq 1 \Rightarrow$ **E** ☐ Faux

On doit donc cocher **C**☒

<u>Méthode2 : Calculons :</u> $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + ... + nC_n^n$

On va utiliser Formule du binôme de Newton : $a \in \mathbb{R}$ ***et*** $b \in \mathbb{R}$

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n b^n$

On pose : $a = 1$ *et* $b = x$ alors : $(1+x)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} x^1 + C_n^2 1^{n-2} x^2 + ... + C_n^{n-1} 1^1 x^{n-1} + C_n^n x^n$

$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x^1 + C_n^2 x^2 + ... + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ et on dérive les deux membres

$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + ... + (n-1)C_n^{n-1} x^{n-2} + nC_n^n x^{n-1}$ *On donne :* $x = 1$

$n(1+1)^{n-1} = 1C_n^1 + 2C_n^2 + ... + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$

C'est-à-dire : $n \times 2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$

Prof : ATMANI NAJIB

Q129 : Préparation Concours de Médecine et pharmacie

Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{3^k}$ et $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}}$

Solution : On se ramène au terme de droite de la formule du binôme de Newton. Attention, la deuxième somme démarre à k = 1, alors que la somme démarre à k = 0 dans la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^k 1^{n-k} = \left(\frac{1}{3}+1\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}} - C_n^0 \frac{(-1)^{n-0}}{3^{0+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{3^k} - \frac{(-1)^n}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{3}\right)^k (-1)^{n-k} - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+(-1)\right)^n - \frac{(-1)^n}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \frac{(-1)^{n-k}}{3^{k+1}} = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^n - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{1}{3}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n - (-1)^n\right) = \frac{(-1)^n}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$$

Q130 : Concours ENSA :

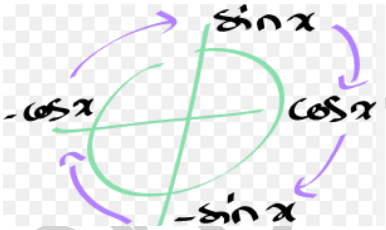
Soit f une fonction réelle : $f(x) = e^{-x}\sin x$ et $f^{(4)}$ sa dérivée d'ordre 4 ; alors : $f^{(4)}(x) =$

A ☐ $-f(x)$ **B** ☐ $-4f(x)$ **C** ☐ $4f(x)$ **D** ☐ $-3f(x)$

Solution : On utilise : (Leibnitz) : $(u+v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{b} C_n^k u^{(k)} \times v^{(n-k)}$

$(u\times v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{b} C_n^k u^{(k)} \times v^{(n-k)}$ et on a : $f(x) = e^{-x}\sin x = u\times v$

$$\left(e^{-x}\sin x\right)^{(4)} = \sum_{k=0}^{b} C_4^k e^{-x(k)} \times \sin x^{(4-k)} = C_4^0 e^{-x(0)} \times \sin x^{(4)} + C_4^1 e^{-x(1)} \times \sin x^{(3)} + C_4^2 e^{-x(2)} \times \sin x^{(2)} + C_4^3 e^{-x(3)} \times \sin x^{(1)} + C_4^4 e^{-x(4)} \times \sin x^{(0)}$$



n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Ce tableau et appelé le Triangle de Pascal.

$$\left(e^{-x}\sin x\right)^{(4)} = 1e^{-x} \times \sin x + 4\left(-e^{-x}\right)\times(-\cos x) + 6e^{-x}\times(-\sin x) + 4\left(-e^{-x}\right)\times\cos x + 1e^{-x} \times \sin x$$

Remarque : En utilisans le Triangle de Pascal on trouve les coefficients :

$$\left(e^{-x}\sin x\right)^{(4)} = f(x) + \cancel{4e^{-x}\cos x} - 6f(x) - \cancel{4e^{-x}\cos x} + f(x) = -4f(x)$$

On doit donc cocher **B**☒

G) Type de Tirage : n le nombre total de boule et p le nombre de boule tirées

Tirage simultané : Il s'agit d'une situation de combinaisons : C_n^p ; l'ordre n'a pas d'importance

Tirages successifs sans remise :

L'ordre est important Il s'agit d'une situation d'arrangement : A_n^p

Prof: ATMANI NAJIB

Tirages successifs avec remise : n^p

H) La probabilité d'un événement

1)Une situation équiprobable est une expérience où toutes les éventualités ont la même probabilité d'être réalisées et si A est un évènement alors :P(A) = $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

Donc : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}$

2) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

3) La probabilité P(A) d'un événement A est telle : $0 \leq P(A) \leq 1$ et $P(\Omega)=1$ et $P(\varnothing)=0$

4) $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$

5)Si deux événements A et B sont incompatibles alors : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

6)Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ et $P(B-A)=P(B)-P(A)$

<u>Q131. Concours de Médecine et de pharmacie « Marrakech » Juillet 2010</u>

On lance trois dés cubiques numérotées de 1 à 6 non truqués et de couleurs différentes une seule fois et d'un seul coup.

La probabilité d'obtenir une somme égale à 5 est égale à :

A☐ $\frac{5}{216}$ **B**☐ $\frac{5}{36}$ **C**☐ $\frac{1}{36}$ **D**☐ $\frac{1}{9}$ **E**☐ *autre réponse*

<u>Solution :</u> $resulat\ dé1+resulat\ dé2+resulat\ dé3=5$

le : $card\Omega=6\times6\times6=6^3$

Les possibilités sont : $1+1+3=5$; $1+2+2=5$; $1+3+1=5$; $2+1+2=5$; $2+2+1=5$; $3+1+1=5$

il Ya 6 possibilités : $p=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{6^2}=\frac{1}{36}$

On doit donc cocher **C**☒

I)Probabilité conditionnelle : Si A un événement de probabilité non nulle

La probabilité de B sachant A est : $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : $P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A)$

J) Probabilités totales : Si $A1$, $A2$,…. . An forment une partition de l'univers Ω et si pour tout i compris entre 1 et n, $P(Ai)\neq 0$ alors pour tout événement B on a : $p(B)=p(B\cap A_1)+p(B\cap A_2)+...+p(B\cap A_n)$

$p(B)=p(A_1)P_{A_1}(B)+p(A_2)P_{A_2}(B)+...+p(A_n)P_{A_n}(B)$

Cette égalité est nommée loi de probabilités totales

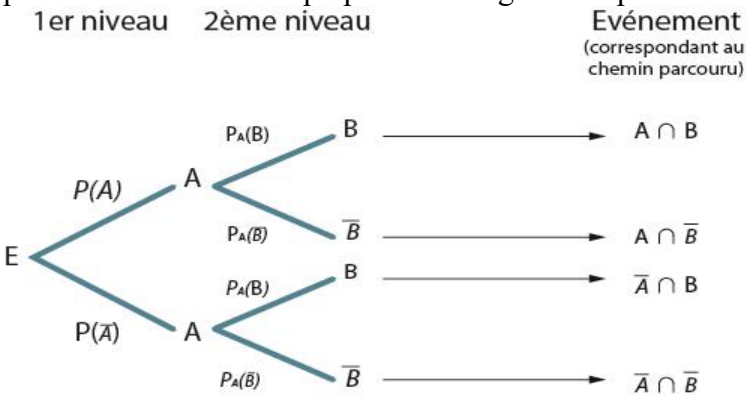
K) Événements indépendants : Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement s'ils vérifient une des trois conditions :

$P_B(A)=P(A)$ ou $P_A(B)=P(B)$ ou $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$

L) Arbre pondéré : a) Dans le cas d'une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles dans un univers E, on peut modéliser la succession de deux épreuves à l'aide d'un arbre pondéré. Pour cela, on peut envisager deux niveaux de branches : un premier niveau qui indique la probabilité de l'événement A,

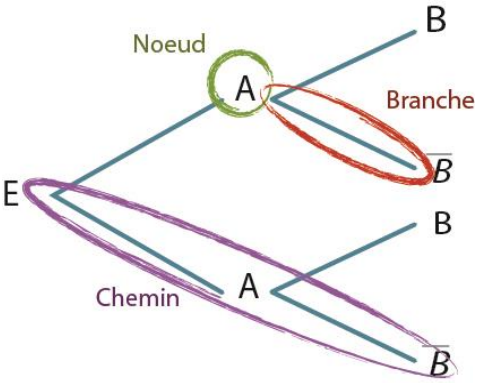
Prof : ATMANI NAJIB

puis un second niveau qui permet de figurer les probabilités conditionnelles en rapport avec l'événement B.



Une branche relie deux événements. Sur chaque branche, on note la probabilité correspondante. Ainsi, la probabilité de la branche reliant A à B est : $P_A(B)$

Un chemin est une suite de branches ; il représente l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
La probabilité d'un chemin est la probabilité de l'intersection des événements rencontrés sur ce chemin.
Un nœud est le point de départ d'une ou plusieurs branches.



Règle du produit :La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin :

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$; $P(A\cap\bar{B})=P(A)\times P_A(\bar{B})$; $P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})\times P_A(B)$; $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A})\times P_A(\bar{B})$

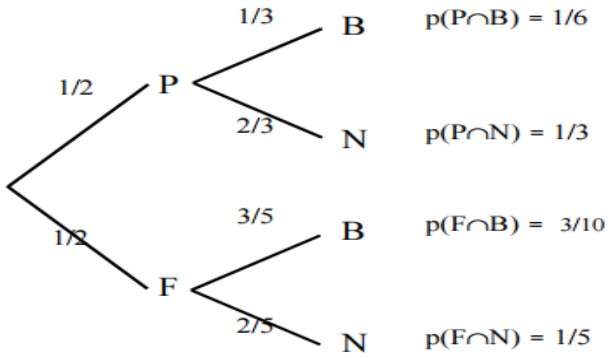
Règle de la somme : La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1 :
$P(A)+P(\bar{A})=1$ et $P_A(B)+P_A(\bar{B})=1$

b) La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à l'événement, on appelle cette probabilité la formule des probabilités totales.

Exemple : On jette une pièce.

▪ Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.

▪ Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires. On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous :



Q132. Concours de Médecine Dentaire Juillet 2018

Une usine qui fabrique des smartphones dispose de deux machines A et B
La machine A assure la fabrication de 70% du produit dont 5% sont défectueux
La machine B assure la fabrication de 30% du produit dont 1% sont défectueux
On choisit au Hazard un smartphones d'un lot

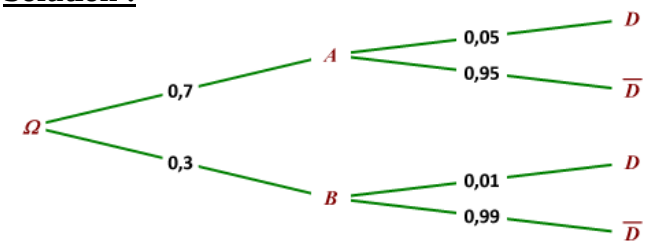
a) La probabilité de l'évènement : D **: »** le smartphone choisi est défectueux » est :

A ☐ $p(D)=\frac{6}{1000}$ **B** ☐ $p(D)=\frac{38}{1000}$ **C** ☐ $p(D)=\frac{5}{1000}$ **D** ☐ $p(D)=\frac{1}{1000}$

b) On a choisi un smartphone du lot ; sachant qu'il est défectueux
La probabilité que le smartphone soit fabriqué par la machine B est :

A ☐ $\frac{10}{38}$ **B** ☐ $\frac{38}{3}$ **C** ☐ $\frac{3}{38}$ **D** ☐ $\frac{6}{38}$

Solution :



a) $p(D)=0,7\times0,05+0,3\times0,01=0,035+0.003=0,038=\frac{38}{1000}\Rightarrow$ **B** ☐ $p(D)=\frac{38}{1000}$

b) $P_D(B)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{0,3\times0,01}{0,038}=\frac{0,003}{0,038}=\frac{3}{38}\Rightarrow$ **C** ☐ $\frac{3}{38}$

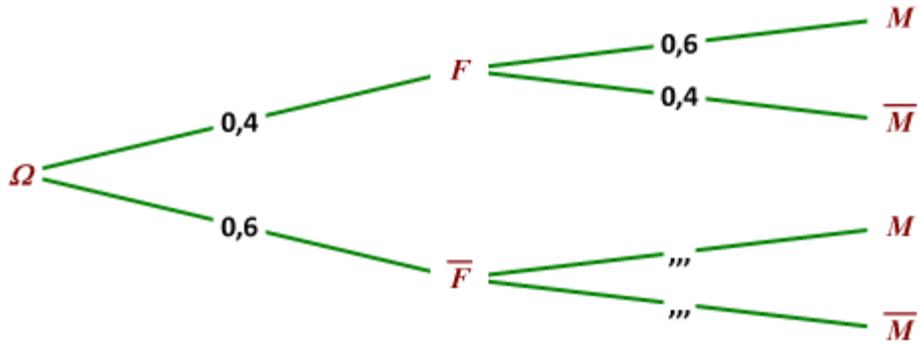
Q133. Concours de Médecine et de pharmacie Juillet 2006 « Marrakech »

Répondre en cochant les propositions justes

Une étude de la population à faire apparaître que 40 % sont des fumeurs et que 30 % ont une maladie respiratoire ; Parmi les fumeurs 60 % ont une maladie respiratoire
Une personne a été choisie dans la population
La probabilité pour qu'il soit fumeur sachant qu'il a une maladie respiratoire est :

A ☐ $0,8$ **B** ☐ $0,4$ **C** ☐ 1 **D** ☐ $0,6$ **E** ☐ $0,5$

Solution : $P(M)=0,3$; $P_M(F)=?$



$$P(M)=0,4\times0,6+0,6\times P_{\bar{F}}(M)=0,3$$

Donc : $P_{\bar{F}}(M)=\frac{0,3-0,4\times0,6}{0,6}=0,1$

$$P_M(F)=\frac{P(F\cap M)}{P(M)}=\frac{0,6\times0,4}{0,6\times0,4+0,6\times0,1}=\frac{0,24}{0,24+0,06}=0,8\Rightarrow \textbf{A} \ ☐\ 0,8$$

Q134. Concours ENSA 2013

Le comité du concours ENSA sait par expérience que la probabilité de réussir le concours est 0,95, pour l'étudiant(e) ayant mention « très bien » au Bac et de 0,5 pour celui ou celle qui a la mention « bien » au Bac et de 0,2 pour les autres. il estime aussi que parmi les candidats aux concours ENSA 2013 ;35% ont mention « très bien » et 50% ont mention « bien »

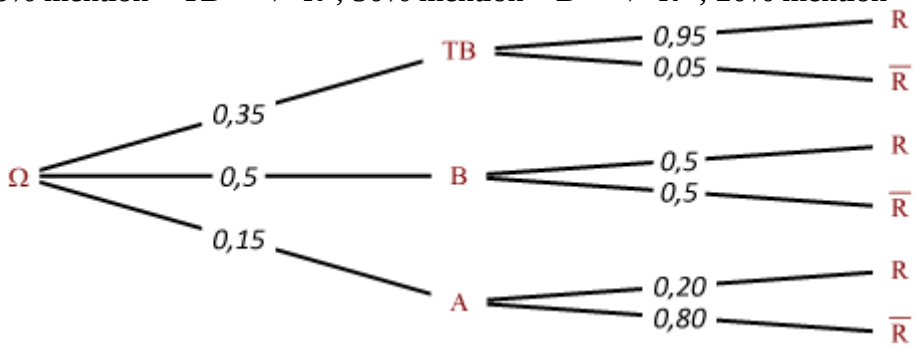
Si l'on considère un(e) candidat(e) 2013 au Hazard ayant réussi le concours ENSA ; la probabilité pour qu'il (ou elle) n'ait ni mention « très bien » ni mention « bien » est :

A ☐ $0,0144$ **B**☐ $0,0489$ **C** ☐ $0,1444$ **D** ☐ $0,0489$

Solution : il faut bien lire les énoncés et construire un arbre pondéré

35% ont mention « TB » ; 50% ont mention « B » ; 15% ont mention « A » (100%-35%-50%)

95% mention « TB » $\Rightarrow$ R ; 50% mention « B » $\Rightarrow$ R ; 20% mention « A (Autre) » $\Rightarrow$ R



Sachant que : un candidat ayant réussi le concours ENSA ; la probabilité pour qu'il (ou elle) n'ait ni mention « très bien » ni mention « bien » est : $P_R(A) = ?$ c'est La probabilité de A sachant R

$$P_R(A) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{p(A_1)P_{A_1}(R)}{p(TB)P_{TB}(R) + p(B)P_B(R) + p(A)P_A(R)} = \frac{0,15 \times 0,20}{0,35 \times 0,95 + 0,5 \times 0,5 + 0,15 \times 0,20}$$

$$P_R(A) = \frac{0,03}{0,3325 + 0,25 + 0,03} = \frac{0,03}{0,6125} = 0.0489 \Rightarrow \textbf{B}☐\ 0,0489$$

Q135. Concours ENSA 2015

Problème 1 : On considère plusieurs urnes de boules U_1 ; U_2 ; U_3 ;.....;U_n ;

Telles que : la première urne, contient trois boules jaunes et deux boules vertes et chacune des autres urnes contient deux boules jaunes et deux boules vertes.

On réalise des tirages successifs de la manière suivante :

- On tire au hasard une boule de U_1
- On place la boule tirée de U_1 dans U_2 puis on tire une boule dans U_2
- On place la boule tirée de U_2 dans U_3 , puis on tire une boule U_3 • ...etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement "la boule tirée de U_n est verte" et $P_n = p(E_n)$ sa probabilité.

Q135.01 : La valeur de P_1 est :

A ☐ $0,54$ **B**☐ $0,40$ **C** ☐ $0,44$ **D** ☐ $0,64$

Q135.02 : Sachant qu'on a tiré une boule verte de U_1 et qu'on l'a placée dans U_2

La probabilité de tirer une boule verte de U_2 est :

A ☐ $0,60$ **B**☐ $0,46$ **C** ☐ $0,48$ **D** ☐ $0,45$

Q135.03 : La valeur de P_2 est :

A ☐ $0,44$ **B**☐ $0,40$ **C** ☐ $0,44$ **D** ☐ $0,64$

Q135.04 : La relation entre P_n et P_{n+1} est :

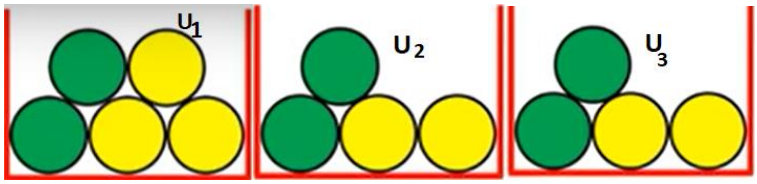
A ☐ $P_{n+1} = 5 + 5P_n$ **B**☐ $P_{n+1} = 2 + 5P_n$ **C** ☐ $P_{n+1} = 5 + 2P_n$ **D** ☐ $5P_{n+1} = 2 + P_n$

Prof : ATMANI NAJIB

Q135.05: En étudiant le comportement de la suite (P_n), peut-on confirmer qu'après un grand nombre de tirage on a :

A) une chance sur deux de tirer une boule verte
B) une chance sur trois de tirer une boule verte
C) une chance sur quatre de tirer une boule verte
D) une chance sur cinq de tirer une boule verte

Solution :

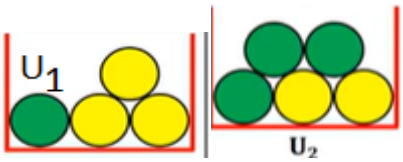


Q135.01 : $P_1 = p(E_1)$; E_1 l'événement "la boule tirée de U_1 est verte"

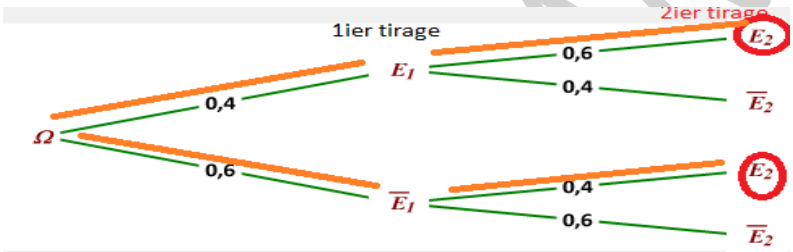
$$P_1 = p(E_1) = \frac{2}{5} = 0,4$$

Q135.02 : Sachant qu'on a tiré une boule verte de U_1 et qu'on l'a placée dans U_2

On a donc la situation suivante :



$p_{E_1}(E_2) = \frac{3}{5} = 0,6$ On doit donc cocher **A**☒



Q135.03 :

$$P_2 = p(E_2) = p_{E_1}(E_2)\,p(E_1) + p_{\overline{E_1}}(E_2)\,p(\overline{E_1}) = 0,6\times 0,4 + 0,4\times 0,6 = 0,48$$

On doit donc cocher **C**☒

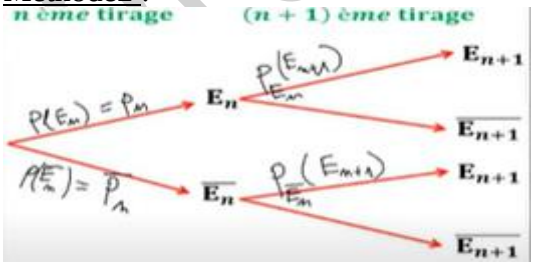
Q135.04 : Méthode1 : simple et sans calcule on doit remarquer seulement que : $\forall n \in \mathbb{N}\ ; 0 \le P_n \le 1$

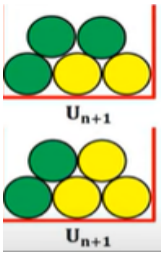
Pour : $P_{n+1} = 5 + 5P_n$ et $P_{n+1} = 2 + 5P_n$ et $P_{n+1} = 5 + 2P_n$ ce sont des nombre supérieurs strictement a 1

il reste **D** ☐ $5P_{n+1} = 2 + P_n$

On doit donc cocher **D**☒

Méthode2 :





$$P_{n+1} = p(E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1})\,p(E_n) + p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\,p(\overline{E_n}) = \frac{3}{5}P_n + \frac{2}{5}(1 - P_n)$$

$$P_{n+1} = \frac{2}{5} + P_n\left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right) \Rightarrow 5P_{n+1} = 2 + P_n$$

Q135.05 : étudiant le comportement de la suite c'est trouver : $\lim_{n\to\infty} P_n = ?$ $P_{n+1} = \frac{1}{5}P_n + \frac{2}{5}$

Puisque la suite s'écrit sous la forme : $u_{n+1} = au_n + b$; $a \neq 1$ on peut utiliser le résumé suivant pour déterminer la $\lim_{n\to+\infty} u_n$:On résout l'équation : $x = ax + b$ sa solution est : $\alpha = \frac{b}{1-a}$

a)Si $a \succ 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$

- si $u_0 \succ \alpha$ et (u_n)est croissante alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

- si $u_0 \prec \alpha$ et (u_n)est décroissante alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

b)Si $0 \prec a \prec 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

- si $u_0 \succ \alpha$ alors (u_n)est décroissante

- si $u_0 \prec \alpha$ alors (u_n)est croissante

c)Si $-1 \prec a \prec 0$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ et (u_n) n'est ni croissante ni décroissante

d)Si $a \prec -1$ et $u_0 \neq \alpha$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas

Application : $x = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5x = x + 2 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} = 0,5$

$P_1 = p(E_1) = \frac{2}{5} = 0,4 \prec 0,5$ (P_n)est décroissante et $0 \prec a = \frac{1}{5} \prec 1$ alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Donc : une chance sur deux de tirer une boule verte

On doit donc cocher **A**☒

M)Variables aléatoires et Loi de probabilité

Soit un univers de probabilité fini

U = {w_1, w_2, ..., w_n} (n ≥ 1) sur lequel est défini une probabilité p et Soit X une fonction qui à chaque élément w_i de U associe un nombre réel x_i

On dit que X est une variable aléatoire (réelle) qui prend r valeurs avec r ≤ n

Pour tout x_i avec 1 ≤ i ≤ r on pose : $p(x_i) = p(X = x_i)$ (Cas de U favorables pour x_i)

et on définit ainsi une loi de probabilité que l'on consigne en général dans un tableau.

valeurs possibles de X : x_i	x_1	x_2	...	x_r	total
probabilités : $p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_r	1

Pour une la variable aléatoire X on peut calculer :

1) l'espérance de X donnée par : $E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p(X = x_i)$

2) la variance et l'écart type de X donnés par : $V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i p_i^2 - (E(X))^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Q136. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie :

Soient A et B deux pièces de monnaies.

La pièce A donne "face" avec la probabilité 0,5 et B donne "face" avec la probabilité 0,25.

Lorsqu'on lance l'une de ces pièces, si on obtient "face", on conserve cette pièce pour le lancer Suivant, sinon on change de pièce.

On fait Trois lancers successifs des pièces.

On commence par lancer la pièce A. On note F_i l'événement on obtient "face au i -ème lancer".

1) Donner l'arbre de probabilité.

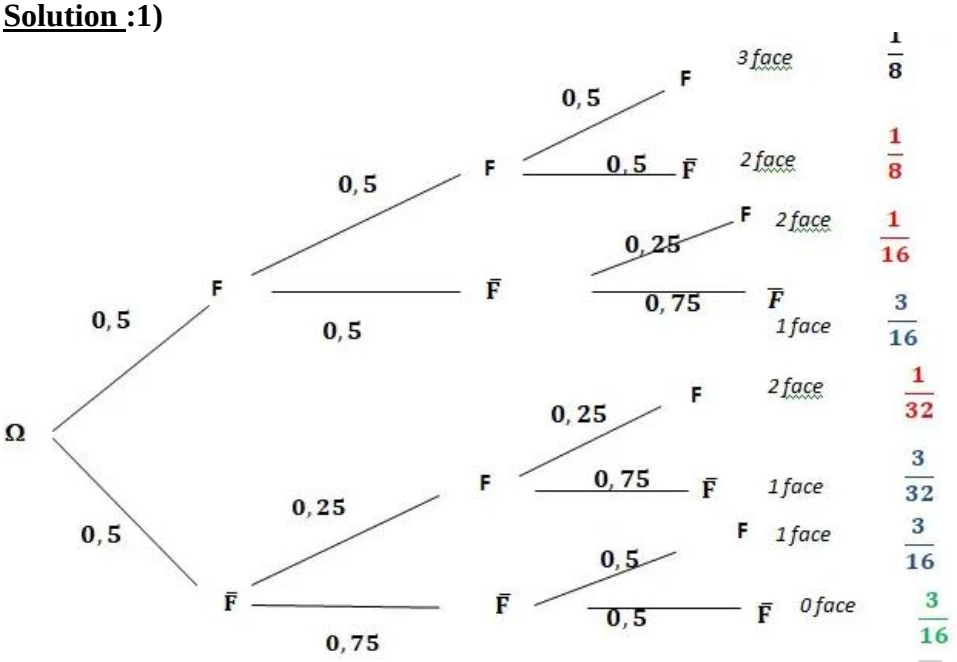
2) X désigne la variable aléatoire donnant le nombre de fois où "face « est obtenu.

Donner la loi de probabilité de X.

Prof: ATMANI NAJIB

3) Calculer l'espérance de X.

Solution :1)



2)

X	0	1	2	3
p(X)	3/16	15 / 32	7/32	1 / 8

3) Calculer l'espérance de X.

15 / 32 +2 x7 /32 +3 /8 =41 / 32.

N) Fonction de répartition d'une Variables aléatoires :

Définition : Soit X une variable aléatoire. La loi de probabilité de X est définie par la fonction F_X, appelée fonction de répartition de la variable X, définie par : $F_X = P(X \prec x)$

Avec $(X \prec x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \prec x\}$

O) Indépendance d'épreuves et Répétition d'épreuves

On dira que des épreuves sont indépendantes dès lors que le résultat d'une épreuve ne dépend pas de celles qui l'ont précédée.

P) Épreuve de Bernoulli et Répétition d'épreuves et lois Binomiales

<u>On appelle épreuve de Bernoulli</u> **:** une épreuve n'ayant que deux issues: Succès (S) et échec(E).

<u>On appelle schéma de Bernoulli :</u> la répétition n fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli.

<u>La loi binomiale :</u> La variable aléatoire X qui lie chaque résultat au nombre de fois que cet événement se réalise s'appelle une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, notée B(n;p).

Soit B(n ; p) une loi Binomiale, la probabilité d'obtenir k succès (0≤ k ≤n) est donnée :

$$p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0;1;..;n\}$$

Exemple1 : On lance trois fois une pièce de monnaie équilibrée et soit l'évènement :

A "obtenir la face F ": Calculer la probabilité de l'évènement suivant :

B "obtenir face F exactement deux fois"

Solution : $p(A) = \frac{1}{2}$ et $n = 3$; $p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$$p(X=2) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

Q137 : Faculté de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024

Soit une urne qui contient 5 boules bleues, 4 boules blanches et 3 boules noires, toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément 3 boules au hasard de l'urne. On répète cette expérience n fois de suite $n \geq 5$ en remettant dans l'urne les boules tirées après chaque tirage.

Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes (n − 1) fois exactement ?

A ☐ $\frac{8\times 3^n}{11^n}$ **B** ☐ $\frac{8n\times 3^n}{11^n}$ **C** ☐ $\frac{8n\times 3^{n-1}}{11^n}$ **D** ☐ $\frac{8^n\times 3^{n-1}}{11^n}$ **E** ☐ $\frac{8\times 3^n}{11^{n-1}}$

Solution : On considère l'événement A : Obtenir 3 boules de couleurs 2 à 2 distinctes, on a :

$$p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_5^1\times C_4^1\times C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{5\times 4\times 3}{220}=\frac{3}{11}$$

La probabilité qu'on cherche : $C_n^{n-1}\left(\frac{3}{11}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-(n-1)}=n\frac{3^{n-1}}{11^{n-1}}\times\frac{8}{11}=\frac{8n\times 3^{n-1}}{11^n}$

La bonne réponse est **C**.

La formule utilisée : Lors de la répétition d'une expérience aléatoire n fois de manière identique et indépendante, la probabilité que l'événement A soit réalisé exactement k fois est : $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ avec : $p(A)=p$

Q138. Concours de Médecine et pharmacie Oujda

Mohamed ; Ahmed et Amine ont passé un examen ; la probabilité de réussite de Mohamed est $\frac{3}{4}$ et celle d'Ahmed est $\frac{2}{3}$ et celle d'Amine est $\frac{1}{3}$

La probabilité de réussite des trois Mohamed, Ahmed et Amine est :

A ☐ $\frac{1}{2}$ **B**☐ $\frac{1}{6}$ **C**☐ $\frac{2}{9}$ **D**☐ $\frac{1}{9}$ **E** ☐ $\frac{1}{18}$

Solution : Puisqu'il y'a indépendance entre les réussites des trois :

$p(R)=p(R_1\cap R_2\cap R_3)=p(R_1)\times p(R_2)\times p(R_3)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\Rightarrow$ La bonne réponse est **B**☐ $\frac{1}{6}$

Q139. Concours ENSA 2018

Le QCM du concours ENSA comporte 20 questions pour chacune desquelles 4 réponse sont proposées et une seule est correcte. Un étudiant décide de remplir la grille-réponses en cochant au hasard une réponse pour chacune des 20 questions. Pour $n\in\mathbb{N}$ **et** $0\leq n\leq 20$ **on note :**

A_n : « Répondre au hasard exactement n fois correctement »

L'évènement A_n : est réalisé si n réponses sont correctes et 20 - n sont incorrectes.

C_n^p : Désigne le nombre de combinaison de p parmi n

Q139 :01 Le nombre de grilles-réponses possibles est :

A ☐ 24 **B**☐ 20^4 **C**☐ 80 **D**☐ 4^{20}

Q139 :02 La probabilité de ne donner aucune réponse correcte est : $p(A_0)=$

A ☐ $\frac{3^{20}}{4^{20}}$ **B**☐ $\frac{24}{4^{20}}$ **C**☐ $\frac{1}{20^4}$ **D**☐ $\frac{1}{80}$

Q139 :03 La probabilité de donner exactement n bonnes réponses correctes est : $p(A_n)=$

A ☐ $C_{20}^n\frac{3^n}{4^{20}}$ **B**☐ $C_{20}^n\frac{3^{20-n}}{4^{20}}$ **C**☐ $C_{20}^3\frac{3^{20-n}}{20^4}$ **D**☐ $C_{20}^3\frac{3^n}{80}$

Prof: ATMANI NAJIB

Q139 :04 La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est :

A ☐ $\sum_{n=6}^{n=20} C_{20}^{n} \frac{3^{20-n}}{4^{20}}$ B☐ $\sum_{n=0}^{n=6} C_{20}^{n} \frac{3^{20-n}}{4^{20}}$ C☐ $\sum_{n=6}^{n=20} C_{20}^{n} \frac{3^{20-n}}{20^{4}}$ D☐ $\sum_{n=0}^{n=6} C_{20}^{n} \frac{3^{20-n}}{20^{4}}$

Solution :

Q139 :01 Chaque grille-réponses possible est composée de 20 questions et pour chaque question

On a 4 choix possibles, donc d'après le principe du produit il y a 4^{20} grilles possibles.

D'où : On doit donc cocher **D**☒

Q139 :02 Si on désigne par Ω l'univers des éventualités de cette expérience aléatoire alors

On a : $Card\Omega = 4^{20}$ et $p(A_0) = \frac{CardA_0}{Card\Omega} = \frac{3^{20}}{4^{20}}$ **:** car pour chaque réponse fausse il y a 3 choix possibles.

D'où : On doit donc cocher **A**☒

Q139 :03 : Désignons par X la variable aléatoire qui est égale au nombre de réponses correctes.

Cette variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres : $p = \frac{1}{4}$ **et** 20

(Car pour chaque question la probabilité de choisir la bonne réponse est $p = \frac{1}{4}$)

On a : $p(A_n) = p(X = n) = C_{20}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{20-n} = C_{20}^{n}\frac{1}{4^{n}}\frac{3^{20-n}}{4^{20-n}} = C_{20}^{n}\frac{3^{20-n}}{4^{20}}$

D'où : On doit donc cocher **B**☒

Q139 :04 La probabilité de répondre au hasard au moins 6 fois correctement est :

$$p(X \geq 6) = \sum_{n=6}^{n=20} C_{20}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\left(1-\frac{1}{4}\right)^{20-n} = \sum_{n=6}^{n=20} C_{20}^{n}\frac{3^{20-n}}{4^{20}}$$

Q: Concours de Médecine et pharmacie

La probabilité pour qu'un candidat obtienne la note 0,25 dans cette épreuve de math sachant qu'il a choisi au Hazard l'une des cinq réponses possibles dans chacune des seize questions est :

A ☐ $\frac{1}{80}$ B ☐ 0 C ☐ 1 D ☐ $\frac{4^{16}}{5^{16}}$ E ☐ $\frac{C_5^4}{80}$

Solution : …

Q140 : Concours de Médecine et de pharmacie « Fès » 2006

Le nombre d'habitants d'une ville est 100000. Ce nombre augmente de 10% chaque année

Après deux ans le nombre d'habitants de cette ville est :

☐ 121000 ☐ 200000 ☐ 80000 ☐ 81000 ☐ 120000

Solution : Le nombre d'habitants de la ville est $A_0 = 10^5$

Après 1 an le nombre d'habitants de cette ville est :

$$A_1 = 10^5 + \frac{10}{100}\times 10^5 = 10^5(1+0,1) = 10^5 \times 1,1$$

Après le 2 iem an le nombre d'habitants de cette ville est :

$$A_2 = 10^5 \times 1,1 + \frac{10}{100}10^5 \times 1,1 = 10^5 \times 1,1 + 0,1 \times 10^5 \times 1,1 = 10^5 \times 1,1(1+0,1) = 10^5 \times 1,1^2 = 121000$$

D'où : On doit donc cocher **A**☒

Géométrie analytique de l'espace

1) Les opérations dans V_3.

- $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs dans l'espace vectoriel V_3 muni de la base $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

On a : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{i}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{i}+z'\vec{k}$ par suite : $\vec{u}+\vec{v}=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}+(z+z')\vec{k}$

D'où : $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y';z+z')$ et si k est un réel alors : $k\vec{u}(kx;ky;kz)$

- Si I est le milieu du segment $[AB]$ alors : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Dans l'espace muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;x_B-x_A;z_B-z_A)$

- $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ sont égaux si et seulement si :x = x' , y = y' et z = z'.

2) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COLINEARITE DE DEUX VECTEURS.

Soient $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ deux vecteurs non nuls.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement tous les déterminants extraits sont nuls c'est-à-dire : $yz'-zy'=0$ et $xy'-yx'=0$ et $xz'-zx'=0$

Remarques : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont des triplets proportionnels.

3) CONDITIONS ANALYTIQUE DE COPLANARITE DE TROIS VECTEURS.

Soient $B(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ une base de V_3 $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$ et $\vec{w}(x'';y'';z'')$ trois vecteurs.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ se note : $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ et on a :

$$\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})=0$

4) Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace

Soit la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$

$$M(x;y;z)\in(D)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \\ z-z_A \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases} x=x_A+ka \\ y=y_A+kb \\ z=z_A+kc \end{cases};(k\in\mathbb{R})$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (D) passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$

5) deux équations cartésiennes d'une droite dans l'espace

Soit (D) la droite passant par le point $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$

Si $abc\neq 0$ alors : le système : $\frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b}=\frac{z-z_A}{c}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D).

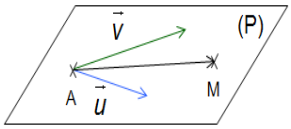
Si $ab\neq 0$ et $c=0$ alors : le système : $\begin{cases} \frac{x-x_A}{a}=\frac{y-y_A}{b} \\ z-z_A=0 \end{cases}$ s'appelle deux équations cartésiennes de la droite(D)

Prof : ATMANI NAJIB

6) Représentation paramétrique d'un PLAN dans l'espace

Soit $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan qui passe par $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(a;b;c\right)$, $\vec{v}\left(a';b';c'\right)$

$M\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}:\exists k'\in\mathbb{R}\,/\,\overrightarrow{AM}=k\vec{u}+k'\vec{v}$



$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\\z-z_A\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+k'\begin{pmatrix}a'\\b'\\c''\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x_A+ka+k'a'\\y=y_A+kb+k'b'\\z=z_A+kc+k'c'\end{cases}$$

Ce système est appelé représentation paramétrique du plan : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$

7) EQUATION CARTESIENNE D'UN PLAN dans l'espace

Soit : $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ le plan qui passe par $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\delta\right)$, $\vec{v}\left(\alpha';\beta';\delta'\right)$

l'équation cartésienne du plan $\left(P\right)$ s'écrit sous forme : $ax+by+cz+d=0$ Avec : $\left(a;b;c\right)\neq\left(0;0;0\right)$

Exemple : Déterminer l'équation cartésienne du plan $P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)$ qui passe par $A\left(1;-3;1\right)$ et de vecteurs directeurs : $\vec{u}\left(-2;4;1\right)$ et $\vec{v}\left(-1;0;2\right)$

Solution : $M\left(x;y;z\right)\in P\left(A;\vec{u};\vec{v}\right)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM};\vec{u};\vec{v}\right)=0$

$\overrightarrow{AM}\left(x-1;y+3;z-1\right)$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1&-2&-1\\y+3&4&0\\z-1&1&2\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\begin{vmatrix}4&0\\1&2\end{vmatrix}-\left(y+3\right)\begin{vmatrix}-2&-1\\1&2\end{vmatrix}+\left(z-1\right)\begin{vmatrix}-2&-1\\4&0\end{vmatrix}=0$$

$$8\left(x-1\right)+3\left(y+3\right)+4\left(z-1\right)=0\Leftrightarrow 8x-8+3y+9+4z-4=0$$

$\left(P\right):8x+3y+4z-3=0$

8) Position relative de deux droites dans l'espace

Pour étudier la position relative de deux droites de l'espace Il suffit d'étudier leurs vecteurs directeurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$ et $D'\left(B;\vec{v}\right)$

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** alors les droites $\left(D\right)$ et $\left(D'\right)$ sont parallèles.

Deux cas sont alors possibles :
– si *A* appartient à *D'*, alors les droites *D* et *D' sont* confondues ;
– si *A* n'appartient pas à *D'*, alors les droites *D* et *D'* sont strictement parallèles, leur intersection est vide.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors les droites *D* et *D'* : sont soit sécantes (leur intersection est un point) soit non coplanaires (leur intersection est vide).

9) Position relative d'une droite et d'un plan dans l'espace

a) *Proposition1 : La* droite $D\left(A;\vec{u}\right)$ et le plan $P\left(B;\vec{v};\vec{w}\right)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et dans le cas contraire la droite coupe le plan

Proposition2 : Soit la droite (D) passant par le point $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\alpha;\beta;\gamma\right)$ et un plan $\left(P\right)$ d'équation cartésienne : $ax+by+cz+d=0$

(D) // $\left(P\right)$ si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$

(D) coupe $\left(P\right)$ si et seulement si $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$

*Remarque1 :*si $\left(D\right)//\left(P\right)$ alors Tout vecteur directeur de $\left(D\right)$ est alors un vecteur directeur de $\left(P\right)$

Prof : ATMANI NAJIB

***b)* Autre méthode pour étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?**

On étudie la position relative d'une droite D passant par A, de vecteur directeur $\vec{u}$ et d'un plan (P) de vecteur normal $\vec{n}$. On s'intéresse alors aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$

• Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, alors la droite (D) est parallèle au plan (P).

Si, en outre, le point A appartient au plan (P), alors la droite (D) est incluse dans le plan (P).

Sinon, la droite (D) est strictement parallèle au plan (P) et leur intersection est vide.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux, alors (D) et (P) sont sécants et leur intersection est un point.

• Si $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, alors la droite (D) est orthogonale au plan (P) : $(D)\perp(P)$

Remarque2 : Il existe plusieurs façons de montrer qu'une droite (D) est incluse dans un plan (P).Une méthode consiste à montrer dans un premier temps que (D) est parallèle à (P) puis dans un deuxième temps qu'un point de (D) appartient à (P)

<u>Q141 : Concours de Médecine et pharmacie et Médecine dentaire : 2023-2024</u>

Soient deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes : $(P): x-y-z+2=0$ et $(P'): x+z-2=0$

Et la droite telle que : $(\Delta):\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1-t \end{cases} : (t\in\mathbb{R})$

A ☐ $(\Delta)\subset(P)$ **; B** ☐ $(\Delta)\perp(P)$ **; C** ☐ $(\Delta)\cap(P)=\varnothing$ **; D** ☐ $(\Delta)\cap(P')=\varnothing$ **; E** ☐ $(\Delta)\perp(P')$

<u>Solution :</u> On a : $\vec{n}(1;-1;-1)$ est un vecteur normal du plan (P) et $\vec{n'}(1;0;1)$ est un vecteur normal du plan (P') et $\vec{u}(1;2;-1)$ est un vecteur directeur de (Δ) et $A(1;2;1)\in(\Delta)$

On a : $A\in(P)$ et $A\in(P')$ Donc : $(\Delta)\cap(P)\neq\varnothing$ et $(\Delta)\cap(P')\neq\varnothing$

Donc : C et D sont Fausses

Et puisque : $\vec{u}(1;2;-1)$ et $\vec{n}(1;-1;-1)$ ne sont pas colinéaires car : $\frac{1}{1}\neq\frac{2}{-1}$ alors : **B** ☐ fausse

De même : $\vec{u}(1;2;-1)$ et $\vec{n'}(1;0;1)$ ne sont pas colinéaires car : $\frac{1}{1}\neq\frac{0}{2}$ alors : **E** ☐ fausse

On doit donc cocher **A** ☒

Remarque : On peut montrer que **A** ☐ VRAIE

On a : $(\Delta)\parallel(P)$ car : $\vec{u}\cdot\vec{n}=1\times1+2\times(-1)+(-1)\times(-1)=1-2+1=0$ et On a : $A\in(P)$

Par suite : $(\Delta)\subset(P)$

10) Position relative de deux plans : *Soient* deux plans (P) et (P') d'équations cartésiennes :

$(P): ax+by+cz+d=0$ et $(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

1) (P) et (P') se coupent si et seulement si leurs vecteurs normaux sont non colinéaires : c'est-à-dire :

$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}\neq0$ ou $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\neq0$ ou $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}\neq0$ et leur intersection est une droite

2) $(P)//(P')$ si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires

C'est-à-dire : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=0$ et $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}=0$

Prof : ATMANI NAJIB

3)si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors : $(P) \parallel (P') \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$

Exemple : $(P): 6x+8y+10z-1=0$ et $(P'): 3x+4y+5z-3=0$

On a : $\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2$ donc : $(P) \parallel (P')$

11) Droite d'intersection de deux plans

Pour trouver la représentation paramétrique d'une droite qui est l'intersection de deux plans.
Voyons une stratégie qu'il est possible d'employer :

Exemple : Soient les plans (P) et (Q) d'équations cartésiennes respectives :
$(P): x-y-3z-2=0 \quad (Q): 2x+y+z-1=0$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection de (P) et de (Q).

Solutions :(D) a pour système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x-y-3z-2=0 \\ 2x+y+z-1=0 \end{cases}$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique :
Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre, par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases} x = y+3z+2 \\ 2(y+3z+2)+y+z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3z+2 \\ 3y+7z+3=0 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y+3z+2 \\ y = -\frac{7}{3}z-1 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{7}{3}z-1+3z+2 \\ y = -\frac{7}{3}z-1 \\ z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{2}{3}z \\ y = -1-\frac{7}{3}z \\ z=z \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de (D) est donc : $(D) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+\frac{2}{3}k \\ y = -1-\frac{7}{3}k \\ z=k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

(D) Passe donc par le point A (1 ; -1 ; 0) et a pour vecteur directeur : $\vec{u}\left(\frac{2}{3}; \frac{-7}{3}; 1\right)$ ou $\vec{v}(2;-7;3)$

Remarque : Pour trouver un vecteur directeur de droite (D) intersection de (P) et de (Q).
$(P): x-y-3z-2=0 \quad (Q): 2x+y+z-1=0$

Il suffit de calculer : $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'}$ avec : $\vec{n}(1;-1;-3)$ un vecteur normal de (P) et $\vec{n}'(2;1;1)$ un vecteur normal de (Q). $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n'}$; $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - 7\vec{j} + 3\vec{k}$; $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

Donc : $\vec{u}(2;-7;3)$

Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace :

Dans tout ce qui va suivre, l'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ orthonormé.

A) Le produit scalaire de deux vecteurs l'espace

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. et soient A ; B et C trois points l'espace tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$;le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace est le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ dans le plan ABC, noté $\vec{u}.\vec{v}$ et c'est un nombre réel définit par :

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$

Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors et si H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors

$\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overline{AH}\times\overline{AB}$

2)Toutes les propriétés du produit scalaire dans le plan sont aussi vraies dans l'espace

3) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$, dans le cas contraire.

4) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux dans l'espace si $\vec{u}.\vec{v}=0$ et on écrit : $\vec{u}\perp\vec{v}$

5)Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ .La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$ est la distance AB et on a :

$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ et $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

6)Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace., on a :

a) $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$ b) $\vec{u}.(k\vec{v})=k\vec{u}.\vec{v}$, avec k un nombre réel. c) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

d) $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ e) $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2$ f) $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$

g) $\|\vec{u}\|=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$ h) $\|k\vec{u}\|=|k|\|\vec{u}\|$ i) $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$

j) $\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ k) $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

m) Soit A, B et C trois points de l'espace : on a : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(AB^2+AC^2-BC^2\right)$

Ou : $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos A$ (EL Kashi)

B) analytique du produit scalaire dans l'espace

1) si: $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$ sont deux vecteurs de l'espace alors :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2)si $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ alors : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

3) Soit $\vec{u}(a;b;c)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A;z_A)$ un point de l'espace et $k\in\mathbb{R}$

L'ensemble des points $M(x;y;z)$ dans l'espace tel que : $\vec{u}.\overrightarrow{AM}=k$ c'est un plan d'équation cartésienne :

$ax+by+cz+d=0$

4)Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan (P) si, pour tous points A et M de (P) , on a $\vec{n}.\overrightarrow{AM}=0$

5)Un vecteur est normal à un plan si et seulement s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

6) Soient a ; b et c des réels non tous nuls quelconques. L'ensemble (P) des points $M(x;y;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}(a;b;c)$.

Prof : ATMANI NAJIB

7) L'équation cartésienne du plan passant par : $A(x_0;y_0;z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ est :
$ax+by+cz+d=0$ avec : $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$

8) Soient : (P) : $ax+by+cz+d=0$ et $(P)'$: $a'x+b'y+c'z+d'=0$ deux plans dans l'espace et $\vec{n}(a;b;c)$ et $\vec{n'}(a';b';c')$ deux vecteurs normaux respectivement a (P) et (P')

a) Les plans (P) et (P') sont parallèles si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires

b) Les plans (P) et (P') sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont non colinéaires

c) Les plans (P) et (P') sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux

C) Distance d'un point à un plan : Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ un point et (P) : $ax+by+cz+d=0$ un plan dans l'espace avec $(a;b;c)\neq(0;0;0)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan.la distance du point A au plan (P) est la distance AH et on a : $d(A;(P))=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Remarque : pour tout point M du plan (P) on a AH $\leq$ AM

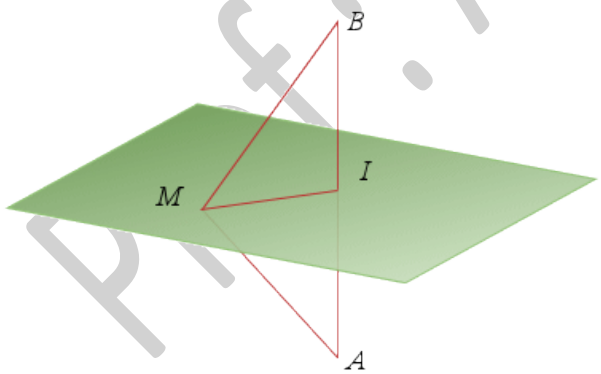
D) Etude analytique de la sphère : 1) Soit Ω un point dans l'espace ($\mathscr{E}$).
R et un réel positif. La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M dans ($\mathscr{E}$), tels que $\Omega M = R$ On la note par : $S(\Omega, R) = \{M \in \mathscr{E} / \Omega M = R\}$

2) Soit $\Omega(a, b, c)$ un point dans l'espace et $R \geq 0$, la sphère $S(\Omega, R)$ à une équation cartésienne de la forme :$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ (1)

3) Si : $a^2+b^2+c^2-d \succ 0$ alors : l'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que :
$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

4) Soient : $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$ deux points de l'espace. L'ensemble des points $M(x;y;z)$ de l'espace tel que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$
et d'équation cartésienne : $(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$

5) l'ensemble des points équidistants de deux points A et B dans l'espace est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$ et passant par I le milieu du segment $[AB]$



Q142 : Concours de Médecine et pharmacie 2022

Dans l'espace rapporté à repère orthonormé ; on considère les deux points $A(1;2;3)$ et $B(2;0;1)$; l'ensemble des points $M(x;y;z)$ équidistants des points A et B est :

A ☐ Le plan : $x+y+z=6$ **B** ☐ Le plan : $2x-4y-4z=-9$

C ☐ Le plan : $2x-4y-4z=9$ **D** ☐ la droite $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-4y-4z=-9 \end{cases}$

E ☐ Autre réponse

Solution : l'ensemble des points équidistants de deux points A et B dans l'espace est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{AB}(1;-2;-2)$ et passant par I le milieu du segment $[AB]$

Le milieu du segment $[AB]$ est : $I\left(\frac{1+2}{2};\frac{0+2}{2};\frac{1+3}{2}\right)$ c'est-à-dire : $I\left(\frac{3}{2};1;2\right)$

Donc : le plan a pour équation cartésienne : $x-2y-2z+d=0$

$I\left(\frac{3}{2};1;2\right)\in x-2y-2z+d=0$: $\frac{3}{2}-2-4+d=0 \Leftrightarrow d=\frac{9}{2}$

(P) : $x-2y-2z+\frac{9}{2}=0 \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} 2x-4y-4z+9=0$ On doit donc cocher **C**☒

Q143 : Concours de Médecine et pharmacie 2018-2019 FES : Juillet 2019

Dans l'espace rapporté a repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que :

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2018=0 \end{cases}$ est

A ☐ un cercle **B** ☐ un plan **C** ☐ une droite passant par le point $O(0;0;0)$

D ☐ la sphère de centre O est de rayon 2018

E ☐ la sphère de centre O est de rayon $\sqrt{2018}$

Solutions : L'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que : $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2018=0 \end{cases}$ est

L'intersection entre la sphère d'équation : $(x-0)^2+(x-0)^2+(x-0)^2=\sqrt{2018}^2$ **(de centre** $O(0;0;0)$ et de rayon $\sqrt{2018}$ et la droite d'équation (D) : $x-y+z=0$

$d(O;(P))=\frac{|0+0+0|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=0 \prec \sqrt{2018}$

L'ensemble cherché est un cercle

(Le grand cercle : le cercle **de centre** $O(0;0;0)$ et de rayon $\sqrt{2018}$)

On doit donc cocher **A** ☒

Q144. Préparation du Concours de Médecine et pharmacie

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) défini par :

$(P): 2x-3y+z-6=0$

A ☐ le plan (P) ne passe pas par le point $A(3;0;0)$

B ☐ Soit le point $D(5;-3;1)$; le vecteur $\overrightarrow{AD}$ n'est pas normale au plan (P)

C ☐ Une équation cartésienne du plan (P) qui passe par $D(5;-3;1)$ et parallèle plan (P) est : $(P): 2x-3y+z+20=0$

D ☐ Les points : $A(3;0;0)$ et $D(5;-3;1)$ n'appartiennent pas au plan : $(R): x+y+z-3=0$

E ☐ Les plans (P) et (R) se coupent suivant une droite (Δ) qui passe par $A(3;0;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4;1;-5)$.

Solution : $(P): 2x-3y+z-6=0$; $A(3;0;0)$

Pour : **A** ☐ **:** On a : $2\times 3-3\times 0+0-6=0$ donc : $A\in(P)$

Par suite $\Rightarrow$**A** ☐ **faux**

Pour **: B** ☐ : $\overrightarrow{AD}(2;-3;1)$ et $(P): 2x-3y+z+20=0$

Donc : $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal au plan (P) $\Rightarrow$**B** ☐ faux

Pour : **C** ☐ : Une équation cartésienne du plan (P) parallèle au plan (P)

est : $(P): 2x-3y+z+d=0$ et puisque : $D\in(P)$ alors : $10+9+1+d=0 \Leftrightarrow d=-20$

$(P): 2x-3y+z\boxed{-20}=0 \Rightarrow$ **C** ☐ faux

Pour : **D** ☐ : On a : $(R): 3+0+0-3=0$ donc : $A\in(R)$

On a : $(R): 5-3+1-3=0$ donc : $D\in(R) \Rightarrow$ **D** ☐ faux

On doit donc cocher **E** ☒

Remarque : On peut montrer que **E** ☐ VRAIE

On va déterminer l'intersection des deux plans (P) et (R)

Résolution du système d'équations cartésiennes : $\begin{cases}(P): 2x-3y+z-6=0\\(R): x+y+z-3=0\end{cases}$

Il va donc falloir être capable de passer de ce système à une représentation paramétrique :
Une technique consiste à prendre une des coordonnées comme paramètre, par exemple puis à exprimer les deux autres coordonnées en fonction de z.

$$\begin{cases}x=-y-z+3\\2x-3y+z-6=0\\z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-y-z+3\\2(-y-z+3)-3y+z-6=0\\z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-y-z+3\\-5y-z=0\\z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-y-z+3\\y=-\frac{1}{5}z\\z=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{5}z-z+3\\y=-\frac{1}{5}z\\z=z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{4}{5}z+3\\y=-\frac{1}{5}z\\z=z\end{cases}$$ Donc : Les plans (P) et (R) se coupent suivant une droite (Δ) d représentation

paramétrique $\Leftrightarrow (\Delta): \begin{cases}x=\frac{4}{5}t+3\\y=-\frac{1}{5}t\\z=t\end{cases}$

(Δ) Passe donc par le point $A(3;0;0)$ et a pour vecteur directeur : $\vec{v}\left(\frac{4}{5};\frac{-1}{5};1\right)$ et $5\vec{v}(4;-1;5)$

est aussi vecteur directeur de (Δ) : On doit donc cocher **E** ☒

***5) L'intersection d'une sphère et une droite* :**

Soient $D(A;\vec{u})$ une droite de l'espace qui passe par $A(x_A;y_A;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a;b;c)$ et (S) une sphère de centre $\Omega(\alpha;\beta;\delta)$ et de rayon R , H le projeté orthogonal du point Ω sur la droite (D).

Notons : $d=\Omega H$ (distance de Ω a la droite (D))

• Si d > R alors la droite (D) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

• Si d = R alors la droite (D) et la sphère (S) ont un unique point T en commun et dans ce cas on dit que la droite (D) est tangente en T à (S) et pour déterminer les coordonnées de T on résout le système : $(*)$

$$\begin{cases} x = x_A + ak \\ y = y_A + bk \\ z = z_A + ck \\ (x-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 + (x-\delta)^2 = R^2 \end{cases}$$

• Si d < R alors la droite $D(A;\vec{u})$ et la sphère (S) en deux points en commun B et C symétriques par rapport au point H, dans ce cas on dit que la droite (D) est sécante à (S). ($\Omega B = \Omega C = R$)
et pour déterminer les coordonnées de B et C on résout le système : $(*)$

Remarque : Étudier la position relative de la sphère (S) et la droite (D) revient à résoudre un système formé par l'équation de la sphère et une de représentation paramétrique de la droite

6) L'intersection d'une sphère et un plan

Soient (S) une sphère de centre $\Omega(\alpha;\beta;\delta)$ et de rayon R, (P) : $ax+by+cz+d=0$ un plan de l'espace, nommons H le projeté orthogonal de Ω sur le plan (P) et $d = \Omega H$, la distance du point Ω au plan (P).

• Si d > R alors le plan (P) et la sphère (S) n'ont pas de points en commun, l'intersection est vide.

• Si d = R alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan (P) est tangent en T à (S) et pour déterminer les coordonnées de T on résout le système : $(**)$

$$\begin{cases} x = \alpha + ak \\ y = \beta + bk \\ z = \delta + ck \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$$

• Si d < R alors l'ensemble des points commun au plan (P) et la sphère (S) est le cercle du plan (P) de centre H et de rayon $\sqrt{R^2-d^2}$ (Théorème de Pythagore), dans ce cas on dit le plan (P) est sécant à (S). et pour déterminer les coordonnées de H on résout le système : $(**)$

7) le plan tangent a une sphère en un point : Soient (S) une sphère de centre Ω et $A \in (S)$
Il existe un plan (P) unique de l'espace tangent à la sphère en A et définie par : $M \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{A\Omega} = 0$

Q145. Concours de Médecine Dentaire Juillet 2018

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) défini par : $2x+2y-z+4=0$ et les points : $A(0;-1;2)$; $B(-2;0;0)$; $C(-1;0;2)$ et la sphère : (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-6=0$

a) Le plan (P) coupe la sphère (S) en :

A ☐ Un point **B** ☐ Un cercle **C** ☐ Un segment **D** ☐ Ne se coupe pas

b) La Surface du triangle : ABC est égale à :

A ☐ $\frac{\sqrt{11}}{2}$ **B** ☐ $\frac{\sqrt{8}}{2}$ **C** ☐ $\frac{3}{2}$ **D** ☐ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

Solutions : **a)** (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ a pour centre :

$\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$ et de rayon : $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2-4d}}{2}$

Prof : ATMANI NAJIB

$x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-6=0$: le centre est : $\Omega(1;1;-1)$ et de rayon :

$R=\frac{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(2)^2-4\times(-6)}}{2}=\frac{\sqrt{36}}{2}=3$ **et** ; $d(\Omega;(P))=\frac{|2\times1+2\times1-(-1)+4|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3=R$

Alors le plan (P) et la sphère (S) ont un unique point en commun et dans ce cas on dit que le plan (P) est tangent en T à (S). On doit donc cocher **A**☒

b) La Surface du triangle : ABC est égale à : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ $\overrightarrow{AB}(-2;1;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -2 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}=2\vec{i}+2\vec{j}-1\vec{k}$

$\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{(2)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{9}=3$ Donc : $S_{ABC}=\frac{3}{2}$ On doit donc cocher **C**☒

Q146. Concours de Médecine dentaire « Casablanca »2009

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\forall m\in\mathbb{R}_+^*$ On considère le plan (P_m) d'équation : $x-y+2z-m=0$ et Soit (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2=0$

La valeur de m pour laquelle le plan (P_m) est tangent à la sphère (S) est :

A ☐ $\sqrt{6}$ **B**☐ $2\sqrt{6}$ **C** ☐ $6\sqrt{6}$ **D**☐ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ **E**☐ $2\sqrt{3}$

Solution :

$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ est une sphère de centre $\Omega(a;b;c)$ et de rayon $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

$x^2+y^2+z^2-2\times1x-2\times1y-2\times0z-2=0$ $\Rightarrow$ Centre $\Omega(1;1;0)$ et $R=\sqrt{1^2+1^2+0^2-(-2)}=\sqrt{4}=2$

$d(\Omega;(P_m))=\frac{|1-1+2\times0-m|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{|-m|}{\sqrt{6}}=\frac{|m|}{\sqrt{6}}=2\Leftrightarrow m=\pm2\sqrt{6}$ On doit donc cocher **E** ☒

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan (P) défini par : $2x-y-2z+2=0$ et la sphère : (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x+10z-2=0$

Une représentation paramétrique de la droite passant par le centre de sphère : (S) et perpendiculaire au plan (P) est :**A** ☐ $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-t\\ z=-5-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ **B** ☐ $\begin{cases}x=3-2t\\ y=t\\ z=-5-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ **C** ☐ $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-t\\ z=5-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ **D** ☐ $\begin{cases}x=-3+2t\\ y=-t\\ z=-5-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

Solutions :**a)** (P) : $2x-y-2z+2=0$ $\Rightarrow$ $\vec{n}(2;-1;-2)$ est un vecteur normal au plan (P)

Donc : $\vec{n}(2;-1;-2)$ est un vecteur directeur à la droite passant par le centre de sphère : (S) et perpendiculaire au plan (P)

En général : $(S): x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ a pour centre : $\Omega\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2};-\frac{c}{2}\right)$

$x^2+y^2+z^2-6x+10z-2=0$: le centre est : $\Omega(3;0;-5)$

Alors : une représentation paramétrique de cette droite est : $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-t\\ z=-5-2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

On doit donc cocher **A**☒

Prof : ATMANI NAJIB

PRODUIT VECTORIEL.

L'espace $(\mathscr{E})$ est muni d'un repère $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$ orthonormé direct

1)DEFINITION DU PRODUIT VECTORIEL : *Soient* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

Le vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$ est tel que : $\vec{w}\perp\vec{u}$ et $\vec{w}\perp\vec{v}$ et la base $\left(\vec{u};\vec{v};\vec{w}\right)$ est directe

$$\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)$$

Remarque :si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Soit A un point dans l'espace ; ils existent deux points dans l'espace B et C tels que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$,les points A, B et C étant non alignés, ils définissent un plan (P) dans l'espace $(\mathscr{E})$.

Et $\vec{w}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal au plan (ABC) *(utilisable pour déterminer l'Equation cartésienne d'un plan.)*

2) Propriétés : **a)** $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ **b)** $\vec{v}\wedge\vec{u}=-\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ **c)** $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\wedge\vec{w}=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$

$\vec{u}\wedge\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$ $\left(\lambda\vec{u}\right)\wedge\vec{v}=\lambda\left(\vec{u}\wedge\vec{w}\right)=\vec{u}\wedge\left(\lambda\vec{v}\right)$

d)Soient A, B et C trois points non alignés on a $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$: est la surface du parallélogramme $ABA'C$

e) Soient A, B et C trois point non alignés, la surface du triangle ABC est : $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

f) A, B et C sont alignés si et seulement si et seulement si $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

g) $\sin\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)=\dfrac{\left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|}$

3)L'EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL

Soient B$\left(\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$une base orthonormée directe de $\mathcal{V}3$, et deux vecteurs $\vec{u}\left(x;y;z\right)$ et $\vec{u'}\left(x';y';z'\right)$

$$\vec{u}\wedge\vec{u'}=\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{k}$$

4) Intersection de deux plans

Soient (P) et (Q) deux plans dans l'espace où $\vec{n}$ est un vecteur normal sur (P) et $\vec{m}$ est un vecteur normal sur (Q), si $\vec{n}$ et $\vec{m}$ sont non colinéaires alors (P) et (Q) se coupent selon une droite (Δ) dirigée par $\vec{n}\wedge\vec{m}$

5) Distance d'un point par rapport à une droite.

Soient $D\left(A;\vec{u}\right)$: une droite dans l'espace et M un point ; la distance du point M à la droite (D) est/

$d\left(M;(D)\right)=MH=\dfrac{\left\|\vec{u}\wedge\overrightarrow{AM}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$ (Cette propriété reste vraie si $M\in(D)$)

Q148. Concours de Médecine et pharmacie 2013-2014 Oujda : Choisir la bonne réponse

A ☐ $tan(a+b)=\dfrac{tan\,a-tan\,b}{1-tan\,a\times tan\,b}$

B ☐ Le nombre de mot de 6 lettres qui un sens ou non qu'on puisse former avec tous les lettres du mot « poumon » est 360

C ☐ Le produit vectoriel des deux vecteurs est un nombre algébrique

D ☐ Le produit scalaire est toujours positif **F** ☐ $tan\frac{\pi}{5}+tan\frac{2\pi}{5}+tan\frac{3\pi}{5}+tan\frac{4\pi}{5}=1$

PROF: ATMANI NAJIB

Solution : Methode1 : On procède par élimination des réponses :

A ☐ $\tan(0+\frac{\pi}{4}) \overset{¿¿}{=} \dfrac{\tan 0-\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan 0\times\tan\frac{\pi}{4}}$

$\tan\frac{\pi}{4}=1$ et $\dfrac{\tan 0-\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan 0\times\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{0-1}{1-0\times 1}=-1 \Rightarrow$ A ☐ faux

B ☐ Le nombre de mot de 6 lettres qui un sens ou non qu'on puisse former avec tous les lettres du mot « poumon » est : Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont Identiques.

Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k\le n$), chacun d'eux apparaissant n_1, n_2, ..., n_k fois, avec $n_1+n_2+...+n_k=n$ et $n_i\ge 1$, on a : $P_n=\dfrac{n!}{n_1!\times n_2!\times...\times n_k!}$ (P_n permutations avec répétitions)

$n_1=2$ (2 fois la lettre O) et $n_2=1$ (1 fois la lettre p) et $n_3=1$ (1 fois la lettre u)

et $n_4=1$ (1 fois la lettre m) et $n_5=1$ (1 fois la lettre n) : $n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=6$

$P_6=\dfrac{6!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!}=6\times 5\times 4\times 3=30\times 12=360$ $\Rightarrow$ **B**☐ vraie

On doit donc cocher **B** ☒

Remarque : **C** ☐ Le produit vectoriel des deux vecteurs est un vecteur $\Rightarrow$ **C**☐ Faux

D ☐ Le produit scalaire peut être négatif :

$\vec{u}=1\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$ et $\vec{v}=-1\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$ sont deux vecteurs de l'espace alors :

$\vec{u}.\vec{v}=-1\times 1+0\times 0+0\times 0=-1<0 \Rightarrow$ **D**☐ Faux

F ☐ $\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\frac{3\pi}{5}+\tan\frac{4\pi}{5}=\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}+\tan\left(\pi-\frac{2\pi}{5}\right)+\tan\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{5}+\tan\frac{2\pi}{5}-\tan\frac{2\pi}{5}-\tan\frac{\pi}{5}=0 \Rightarrow$ **E**☐ Faux

Prof : ATMANI NAJIB

Le symbole somme Σ

A) Définitions et Propriétés et remarques : Le symbole Σ (sigma) s'utilise pour désigner de manière générale la somme de plusieurs termes. Ce symbole est généralement accompagné d'un indice que l'on fait varier de façon à englober tous les termes qui doivent être considérés dans la somme. La somme $u_0+u_1+u_2+....+u_n$ des n + 1 premiers termes de la suite $(u_k)_{(k\in\mathbb{N})}$ est notée $\sum_{k=0}^{n} u_k$. On lit cette écriture « somme de k = 0 jusqu'à n de u_k » ; La « variable » k est appelée indice de la somme ou que la somme est indexée par k. Si I un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$: la somme de tous les termes a_i, i décrivant I Sera notée : $\sum_{i\in I} a_i$

Remarques :1) Dans : $\sum_{k=p}^{n} a_k$ La variable k est l'indice de sommation est une variable muette, c'est à dire qu'une fois la somme calculée le résultat ne dépend plus de k. On peut donc lui donner le nom qu'on veut : i, ; j, k, etc. à exception des bornes de la somme, ici p et n sans changer la valeur de la somme.:

$$\sum_{i=p}^{n} a_i=\sum_{k=p}^{n} a_k=\sum_{j=p}^{n} a_j$$

2)Lorsque les termes de la somme ne dépendent pas de la variable, on somme des termes constants donc :

$$\sum_{k=p}^{n} 3=3+3+.....+3=3(n-p+1)$$

Donc : Lorsqu'on utilise le symbole de sommation, il est **utile** de retenir les règles suivantes :

$$\sum_{k=p}^{n} c=c(n-p+1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} c=nc \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} ca_k=c\sum_{k=p}^{n} a_k$$

3) Relation de Chasles et linéarité : Relation de Chasles : $\sum_{i=p}^{n} a_k=\sum_{k=p}^{m} a_k+\sum_{k=m+1}^{n} a_k$

Cette relation permet simplement de faire une petite pause au milieu du calcul. Attention néanmoins à bien recommencer à l'indice m + 1, et non à l'indice m pour ne compter qu'une seule fois a_m

L'opérateur somme est linéaire : $\sum_{k=1}^{n} \alpha x_k=\alpha\sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\sum_{k=1}^{n}(x_k+y_k)=\sum_{k=1}^{n} x_k+\sum_{k=1}^{n} y_k$

4) Linéarité et changement d'indice : Changement d'indice.

L'expression à l'aide du symbole ∑ n'est pas unique. On peut écrire une somme avec des indices différents. Les changements d'indices k → k + p (translation) k → p − k (symétrie) sont

Les plus fréquents : $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{i=p+1}^{n+p} a_{i-p}=\sum_{i=p-n}^{p-1} a_{p-i}$ ou $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=p+1}^{n+p} a_{k-p}=\sum_{k=p-n}^{p-1} a_{p-k}$

Exemple1 : Calculer la somme : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$

On utilise la linéarité : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k+1}$ On effectue un changement d'indice sur la deuxième somme : k → k + 1 : $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$

On sépare les termes différents : $S_n=\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$

Prof : ATMANI NAJIB

5)Méthode (Décalage d'indice)

Le décalage d'indice revient à utiliser un indice translaté d'une valeur fixe.

Par exemple j = k − 1 ou j = k + 1. Les bornes sont aussi translatées : $\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{j=m+1}^{n+1} a_j = \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k$

Pour ne pas se tromper :

• On repère le changement d'indice que l'on souhaite réaliser, par exemple j = k + 1 dans le cas ci-dessus pour transformer a_{k+1} en a_j .

• On cherche à la main les premières et dernières valeurs de la somme.

Par exemple, on commence pour k = m avec $a_{k+1} = a_{m+1} = a_j$, il faut donc que la nouvelle somme commence à j = m + 1, la somme se termine avec k = n, c'est-à-dire $a_{k+1} = a_{n+1} = a_j$, donc la nouvelle somme finit avec j = n + 1.

• Il doit y avoir le même nombre d'éléments dans les deux sommes : si je repousse la borne inférieure de 1, alors la borne supérieure doit être repoussée d'autant.

Exemple2 : Pour n > 2, on considère la somme : $S_n = \sum_{k=2}^{n+1} k2^{2k-1}$

Faire une translation d'indice pour que la nouvelle variable varie entre 0 et (n−1)
et une symétrie d'indice pour que la nouvelle variable varie entre 2 et (n+1).

• Pour la translation, il suffit de faire : k → k − 2, on a alors :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+2)2^{2(k+2)-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+2)2^{2k+3}$$

Pour la symétrie, il faut déterminer le milieu : $\frac{2+n+1}{2} = \frac{n+3}{2}$

On effectue alors la symétrie k → n + 3 − k, on a alors :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} (n+3-k)2^{2(n+3-k)-1} = \sum_{k=2}^{n+1} (n+3-k)2^{n+5-2k}$$

Point méthode 1 – Effectuer un changement d'indice dans une somme

Application : Effectuer un changement d'indice dans la somme $\sum_{k=3}^{n+1} \ln k$ de sorte que la somme soit indexée à partir de 0.

Solution : On effectue un changement d'indice : k → k -3 : $\sum_{k=0}^{n-2} \ln(k+3)$

6) Sommes télescopiques : Soit une suite $(a_i))$ une suite de nombres réels ou complexes, on a :

$$\sum_{k=n}^{m} a_{k+1} - a_k = a_{m+1} - a_n$$

Exemples : Les sommes télescopiques sont une méthode très efficace pour calculer la somme des termes d'une suite (u_n). Il s'agit de trouver une suite (v_n) pour que $u_n = v_{n+1} - v_n$

Ce n'est bien sûr pas toujours possible malheureusement.

Calculer les sommes suivantes :

Exemple1 : Calculer la somme : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+1)}$: On décompose $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

On remplace le plus petit par 1 et le plus grand par n donc : $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1}$

Prof : ATMANI NAJIB

Exemple2 : Calculer la somme : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}k\times k!$

$$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}k\times k!=\sum_{k=1}^{k=n}\left((k+1)\times k!-k!\right)=\sum_{k=1}^{k=n}\left((k+1)!-k!\right)=(n+1)!-1=(n+1)!-1$$

Exemple3 : Calculer la somme : $S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$:

On décompose : essayons de trouver un nombre a tel que : $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k(k+1)}-\frac{a}{(k+1)(k+2)}$

$\frac{a}{k(k+1)}-\frac{a}{(k+1)(k+2)}=\frac{a(k+2)-ak}{k(k+1)(k+2)}=\frac{2a}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ Donc : $a=\frac{1}{2}$

$S_n=\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{2k(k+1)}-\frac{1}{2(k+1)(k+2)}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ Donc : somme télescopique

On remplace le plus petit par 1 et le plus grand par n donc :

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1(1+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{(n+1)(n+2)-2}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+n+2-2}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice : Montrer que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}$: $\left(3+\sqrt{5}\right)^n+\left(3-\sqrt{5}\right)^n$ est un entier pair.

Résolution : Notons S_n cette quantité. On la calcule par la formule du binôme de Newton.

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^k\times\left(\sqrt{5}\right)^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^k\times\left(-\sqrt{5}\right)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k3^k\times\left(\sqrt{5}\right)^{n-k}\left(1+(-1)^{n-k}\right)$$

Quand : n − k est impair : $1+(-1)^{n-k}=0$ et Quand : n − k est pair : $1+(-1)^{n-k}=2$

Donc : $S_n=2\sum_{\underbrace{k=0}_{n-k\,paire}}^{n}C_n^k3^k\times\left(\sqrt{5}\right)^{n-k}$ Tous les termes dans la somme sont des entiers : pas de problème

pour le coefficient binomial et 3^k et $\left(\sqrt{5}\right)^{n-k}$ est entier puisqu'on restreint aux cas tels que n − k est pair.

Donc la somme est un entier. Donc S_n est un entier pair.

7) Sommes à connaître : Somme des entiers, des carrés, des cubes :

Pour tout entier naturel n non nul, on a les relations suivantes :

a) $S_n^1=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ b) $S_n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ c) $S_n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

d) $p\le n$ et pour tout réel ou complexe x tel que $x\neq 1$, on a :

$$\sum_{k=p}^{n}x^k=x^p\times\frac{1-x^{n-p+1}}{1-x}=premier\,terme\times\frac{1-x^{Nbre\,de\,termes}}{1-x}$$

e) $\sum_{k=p}^{n}kx^k=\frac{x+(n-1)x^{n+1}-nx^{n+2}}{(1-x)^2}$

f) Factorisation standard Pour tout naturel n et pour tous réels ou complexes a et b, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)=(a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k-1}b^k\right)$$

Prof : ATMANI NAJIB

Q149 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=1}^{n+1}(3k+2)$ la somme S_n est :

A ☐ $\frac{(n+1)\times(2n+11)}{2}$ **B** ☐ $\frac{(3n-1)\times(3n+10)}{2}$ **C** ☐ $\frac{(n+1)\times(3n+10)}{2}$ **D** ☐ $\frac{(n+1)\times(3n+10)}{2}$ **E** ☐ *autre*

Solution : $S_n = \sum_{k=1}^{n+1}(3k+2) = \sum_{k=1}^{n+1}3k + \sum_{k=1}^{n+1}2 = 3\sum_{k=1}^{n+1}k + 2(n+1-1+1) = \frac{3(n+1)(n+2)}{2} + 2(n+1)$

$S_n = (n+1)\left(\frac{3n+6}{2}+2\right) = (n+1)\left(\frac{3n+10}{2}\right)$ On doit donc cocher **B** ☒

Q150 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(2k+e^{-k}\right)$ la somme $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est :

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ $-\infty$ **D** ☐ $+\infty$ **E** ☐ *autre*

Solution : $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(2k+e^{-k}\right) = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-1}\right)^k = 2\times(n-1+1)\times\frac{1+n}{2} + e^{-1}\frac{1-\left(e^{-1}\right)^n}{1-e^{-1}}$

$\sum_{k=1}^{n}\left(2k+e^{-k}\right) = n(n+1) + e^{-1}\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}} = n(n+1) + \frac{e^{-1}-e^{-n-1}}{1-e^{-1}} = n(n+1) + \frac{1-e^{-n}}{e-1}$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n(n+1) + \frac{1-e^{-n}}{e-1} = +\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ On doit donc cocher **D** ☒

Q151 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+2}\right)$ la somme $\lim_{n\to+\infty} S_n$ est :

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ $-\infty$ **D** ☐ $+\infty$ **E** ☐ *autre*

Solution : $S_1 = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln k - \ln(k+2)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln k - \ln(k+1) + \ln(k+1) - \ln(k+2)\right)$

$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln k - \ln(k+1)\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1) - \ln(k+2)\right)$ Par télescopage

$S_1 = \left(\ln 1 - \ln(n+1)\right) + \left(\ln(1+1) - \ln(n+2)\right) = \ln(2) - \ln(n+1)(n+2) = \ln\left(\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) = -\infty$ car $\lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$ On doit donc cocher **C** ☒

Q152 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$S_n = \sum_{k=n}^{2n}k$ la somme S_n est : **A** ☐ $3n^2$ **B** ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$ **C** ☐ $n(n+2)$ **D** ☐ $\frac{3n(n+1)}{2}$

Solution : Methode1 : On procède par élimination des réponses :

$S_n = \sum_{k=n}^{2n}k \Rightarrow S_1 = \sum_{k=1}^{2}k = 1+2 = 3$ et $\Rightarrow S_2 = \sum_{k=2}^{4}k = 2+3+4 = 9$

Si : $n = 1$:

Pour : A ☐ $3\times 1^2 = 3$ $\Rightarrow$ A ☐ probablement vraie

Prof : ATMANI NAJIB

Pour : B ☐ $\frac{1(1+1)}{2}=1 \Rightarrow$ B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $1(1+2)=3 \Rightarrow$ C ☐ probablement vraie

Pour : **D**☐ On a : $\frac{3\times1(1+1)}{2}=3 \Rightarrow$ D ☐ probablement vraie

Si : $n=2$:

Pour : A ☐ $3\times2^2=12 \Rightarrow$ A ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $2(2+2)=8 \Rightarrow$ C ☐ Faux

On doit donc cocher **D** ☐ $\frac{3n(n+1)}{2}$ car celle qui reste

Methode2 : $\sum_{k=1}^{2n}k=\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=n}^{2n}k \Rightarrow \sum_{k=n}^{2n}k=\sum_{k=1}^{2n}k-\sum_{k=1}^{n-1}k \Rightarrow S_n=\frac{2n(1+2n)}{2}-\frac{(n-1)(1+(n-1))}{2}$

$S_n=\frac{2n+4n^2}{2}-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{2n+4n^2-n^2+n}{2}=\frac{3n^2+3n}{2}=\boxed{\frac{3n(n+1)}{2}}$ On doit donc cocher **D** ☐

Q153 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$S_n=\sum_{k=n}^{3n}Min(k;2n)$ La somme S_n est :

A ☐ $3n^2+2$ **B** ☐ $\frac{n(2n+1)}{2}$ **C** ☐ $\frac{n(7n+3)}{2}$ **D** ☐ $2n^2-1$

Solution : Methode1 : On procède par élimination des réponses :

$S_n=\sum_{k=n}^{3n}Min(k;2n) \Rightarrow S_1=\sum_{k=1}^{3}Min(k;2)=Min(1;2)+Min(2;2)+Min(3;2)=1+2+2=5$

$\Rightarrow S_2=\sum_{k=2}^{6}Min(k;4)=Min(2;4)+Min(3;4)+Min(4;4)+Min(5;4)+Min(6;4)=2+3+4+4+4=17$

Si : $n=1$:

Pour : A ☐ $3\times1^2+2=5 \Rightarrow$ A ☐ probablement vraie

Pour : B ☐ $\frac{1(2\times1+1)}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow$ B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $\frac{1(7+3)}{2}=5 \Rightarrow$ C ☐ probablement vraie

Pour : **D**☐ On a : $2\times1^2-1=1 \Rightarrow$ D ☐ Faux

Si : $n=2$:

Pour : A ☐ $3\times2^2+2=14 \Rightarrow$ A ☐ Faux

On doit donc cocher **C** ☐ $\frac{n(7n+3)}{2}$ car celle qui reste

Methode2 : $S_n=\sum_{k=n}^{3n}Min(k;2n)=\sum_{k=n}^{2n}Min(k;2n)+\sum_{k=2n+1}^{3n}Min(k;2n)$

$S_n=\sum_{k=n}^{2n}k+\sum_{k=2n+1}^{3n}2n=(2n-n+1)\frac{n+2n}{2}+2n\sum_{k=2n+1}^{3n}1=\frac{(n+1)\times3n}{2}+2n(3n-2n-1+1)$

$S_n=\frac{3n(n+1)}{2}+2n^2=\frac{3n^2+3n+4n^2}{2}=\frac{n(7n+3)}{2}$

Prof : ATMANI NAJIB

$S_n = \frac{2n+4n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2n+4n^2-n^2+n}{2} = \frac{3n^2+3n}{2} = \boxed{\frac{3n(n+1)}{2}}$ On doit donc cocher **D** ☐

Q154 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

Soit $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{(k+1)!}$ **alors :** $\lim_{n\to+\infty} S_n =$

A ☐ k **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 D ☐ $+\infty$ E ☐ autre

Rem : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{k+1}{(k+1)k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$

Donc : somme télescopique (On remplace le plus petit par 1 et le plus grand par n)

$S_n = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{(n+1)!} = 1$ car $\lim_{n\to+\infty}(n+1)! = +\infty$ On doit donc cocher **B** ☐

Q155 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k$ la somme S_n est :

A ☐ $n(n+1)2^n$ **B** ☐ $n2^{n+1}$ **C** ☐ $n(n+1)2^{n-1}$ **D** ☐ $n(n+1)2^{n-2}$ **E** ☐ *autre*

Q156 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k$ la somme S_n est :

A ☐ $\frac{2^{n+1}+1}{n+1}$ **B** ☐ $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ **C** ☐ $n(n+1)2^{n-1}$ **D** ☐ $n(n+1)2^{n-2}$ **E** ☐ *autre*

Le symbole produit : $\prod_{k=,,,}^{k=,,,} \ldots$

A) Soit (a_i) une suite de nombres réels ou complexes. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p \le n$, on définit le produit suivant par : $\prod_{k=p}^{k=n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times \ldots\ldots \times a_n$

Soit I un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, le produit de tous les termes a_i , i décrivant I

Sera notée : $\prod_{i\in I} a_i$ et on a : $\prod_{k=0}^{k=n} a_k \times \prod_{k=0}^{k=n} b_k = \prod_{k=0}^{k=n} a_k b_k$ et $\prod_{k=0}^{k=n} \lambda = \lambda^{n+1}$ et $\prod_{k=0}^{k=n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod_{k=0}^{k=n} a_k$

Exemple 1: On peut utiliser le symbole Π pour définir « factorielle » d'un entier naturel n noté $n!$

$\prod_{k=1}^{k=n} k = 1 \times 2 \times \ldots\ldots \times n = n!$; *Par convention :* On posera 0 ! = 0 et on retiendra la relation de récurrence définissant factorielle n : $(n+1)! = (n+1) \times n!$

Et Lorsqu'on fait les produits d'un terme constant, on obtient : $\prod_{k=p}^{k=n} 5 = 5 \times 5 \times \ldots\ldots \times 5 = 5^{n-p+1}$

Exemple2 : $P_n = \prod_{k=0}^{k=n}\left(1 + a^{2k}\right)$ et $a \in \mathbb{C} - \{1\}$

$P_n = \prod_{k=0}^{k=n}\left(1 + a^{2k}\right) = (1+a)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\ldots\left(1+a^{2n}\right)$; En exploitant : $(1+a)(1-a) = 1 - a^2$

$(1-a)P_n = \left(1-a^2\right)\left(1+a^2\right)\left(1+a^4\right)\ldots\left(1+a^{2n}\right)$ en répétant la même procédure on obtient :

Prof : ATMANI NAJIB

$(1-a)P_n=\left(1+a^{2n+1}\right)$ et finalement : $P_n=\dfrac{1+a^{2n+1}}{1-a}$

B) Relation produit – somme : Soit (a_i) une suite de nombres réels strictement positifs. Soit deux entiers naturels n et p tels que $p\leq n$, on a alors : $\ln\left(\prod_{k=p}^{k=n}a_k\right)=\sum_{k=p}^{n}\ln(a_k)$ et $e^{\sum_{k=p}^{n}a_k}=\prod_{k=p}^{k=n}e^{a_k}$

C) Produits télescopiques : Soit (z_i) une suite de nombres réels ou complexes. Soit deux entiers naturels n et p Tels que $p\leq n$, on a alors : $\prod_{k=p}^{n}\dfrac{z_{k+1}}{z_k}=\dfrac{z_{n+1}}{z_p}$

Exemple1 : $P_n=\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{k=n}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)=\dfrac{n+1}{1}=n+1$

Sommes doubles :

Lorsqu'on somme sur deux indices, on parle de somme double.

Soit (a_{ij}) une suite double de nombres réels ou complexes et soit deux entiers naturels n et p, on note :

$\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq n}}a_{ij}=\sum_{\substack{i\in\ 1;n\\j\in\ 1;n}}a_{ij}=\sum_{(i;j)\in\ 1;n\ \times\ 1;n}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\right)$: Somme des termes d'un tableau $n\times p$

Somme triangulaire avec diagonal : $\sum_{1\leq i\leq j\leq n}a_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}a_{ij}$: somme triangulaire d'un tableau n^2

$\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}$ Somme triangulaire sans la diagonale

Pour : $\sum_{1\leq i<j\leq n}a_{ij}$ il suffit d'enlever la diagonale du tableau (triangle supérieur). Somme triangulaire sans diagonal :

Exemple 1 : Soit : $a_1=3$; $a_2=5$; $a_3=1$; $b_1=2$ et $b_2=4$

Nous utiliserons l'indice i pour les termes de a_i et l'indice j pour les termes de b_j

Évaluer : $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_ib_j$

Solution : $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_ib_j=\sum_{i=1}^{3}(a_ib_1+a_ib_2)=(a_1b_1+a_1b_2)+(a_2b_1+a_2b_2)+(a_3b_1+a_3b_2)$

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}a_ib_j=(3\times2+3\times4)+(5\times2+5\times4)+(1\times2+1\times4)=18+30+6=54$

Exemple 2 : Soit : $x_{11}=2$; $x_{12}=4$; $x_{13}=1$; $x_{14}=5$; $x_{21}=0$; $x_{22}=3$; $x_{23}=1$; $x_{24}=2$
$x_{31}=1$; $x_{32}=4$; $x_{33}=2$; $x_{34}=3$

Prof : ATMANI NAJIB

Pour effectuer la somme des termes d'une ligne, il faut fixer l'indice de cette ligne et faire varier, sur toutes les valeurs possibles, l'indice de la colonne. Par exemple

$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}$ (Somme de la i ère ligne) ; $\sum_{j=1}^{4} x_{1j} = x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 12$ (Somme de la première ligne)

$\sum_{j=1}^{4} x_{2j} = x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 6$ (Somme de la 2ième ligne)

Pour effectuer la somme des termes d'une colonne, il faut fixer l'indice de cette colonne et faire varier, sur toutes les valeurs possibles, l'indice de la ligne.

$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = x_{1j} + x_{2j} + x_{3j}$ (Somme de la j ère colonne) ;

$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10$ (Somme de la 4ième colonne)

$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3$ (Somme de la 1ème colonne) ;

Pour effectuer la somme de tous les termes du tableau, il faut faire varier les deux indices et utiliser une double somme : (Somme de la 2ième ligne)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\left(x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} \right)$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij} = \left(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \right) + \left(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \right) + \left(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{44} \right) = 12 + 6 + 10 = 28$$

Solution : $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_i b_j = \sum_{i=1}^{3}\left(a_i b_1 + a_i b_2 \right) = \left(a_1 b_1 + a_1 b_2 \right) + \left(a_2 b_1 + a_2 b_2 \right) + \left(a_3 b_1 + a_3 b_2 \right)$

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} a_i b_j = \left(3\times 2 + 3\times 4 \right) + \left(5\times 2 + 5\times 4 \right) + \left(1\times 2 + 1\times 4 \right) = 18 + 30 + 6 = 54$ Évaluer :

Théorème 5 : Développement d'un produit de deux sommes

Soient $\left(a_i \right)_{1 \le i \le n}$, $\left(b_i \right)_{1 \le i \le p}$ des nombres réels ou complexes, on a alors :

1) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)\left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) = \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} a_i b_j$

2) $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + 2\sum_{1\le i\prec j\le n} a_i a_j$ (Carré d'une somme)

Démonstration : 1) La première formule est directement liée à la définition de la somme double. ¨

2)Pour le carré d'une somme, on fait intervenir la symétrie du tableau double entrée en séparant la somme en trois parties (le triangle supérieur est identique au triangle inférieur) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \right) = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} a_i a_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2 = \underbrace{\sum_{1\le i\prec j\le n} a_i a_j}_{triangle\ supérieur} + \underbrace{\sum_{1\le j\prec i\le n} a_i a_j}_{triangle\ inférieur} + \underbrace{\sum_{1\le i=j\le n} a_i a_j}_{diagonale} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + 2\sum_{1\le i\prec j\le n} a_i a_j$$

Remarque : On retrouve avec le deuxième terme du carré d'une somme, le célèbre double produit de l'identité remarquable du second degré. Il s'agit ici d'une généralisation de cette identité remarquable à n termes. **Exemple :** $(a_1+a_2+a_3)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_1a_2+2a_1a_3+2a_2a_3$

Q157: Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$S_n = \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}} Min(i;j)$ la somme S_n est :**A** ☐ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **B** ☐ $\frac{n(n+1)}{3}$

C ☐ $\frac{n(n+2)}{3}$ **D** ☐ $\frac{(n+1)(n+1)}{6}$ **E** ☐ $\frac{n(n+1)}{6}$

Solution : On a : $S_2 = \sum_{\substack{1\le i\le 2\\1\le j\le 2}} Min(i;j) = Min(1;1)+Min(1;2)+Min(2;1)+Min(2;2) = 1+1+1+2 = 5$

On procède par élimination des réponses : n=2

Pour : A ☐ $\frac{2(2+1)(2\times2+1)}{6}=5 \Rightarrow$ A ☐ probablement vraie

Pour : B ☐ $\frac{2(2+1)}{3}=2\neq5 \Rightarrow$ B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $\frac{2(2+2)}{3}=\frac{8}{3}\neq5 \Rightarrow$ C ☐ Faux

Pour : **D**☐ On a : $\frac{(2+1)(2+1)}{6}=\frac{9}{6}\neq5 \Rightarrow$ D ☐ Faux

Pour : E ☐ $\frac{2(2+1)}{6}=1\neq5 \Rightarrow$ E☐ Faux

On doit donc cocher **A** ☒

Q158 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ **et** $n\ge2$ $S_n = \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le n} \max(i;j)$ la somme S_n est :

A ☐ $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ **B** ☐ $\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$ **C** ☐ $\frac{n(n+2)}{3}$ **D** ☐ $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ **E** ☐ $\frac{(n+1)(2n-1)}{6}$

Solution : On a : $S_2 = \sum_{1\le i\le 2}\sum_{1\le j\le 2} \max(i;j) = \max(1;1)+\max(1;2)+\max(2;1)+\max(2;2) = 1+2+2+2 = 7$

On procède par élimination des réponses : n=2

Pour : A ☐ $\frac{2(2+1)(4\times2-1)}{6}=7 \Rightarrow$ A ☐ probablement vraie

Pour : B ☐ $\frac{2(2+1)(2\times2-1)}{6}=3\neq7 \Rightarrow$ B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $\frac{2(2+2)}{3}=\frac{8}{3}\neq5 \Rightarrow$ C ☐ Faux

Pour : **D**☐ On a : $\frac{(2+1)(4+1)}{6}=\frac{15}{6}\neq7 \Rightarrow$ D ☐ Faux

Pour : E ☐ $\frac{(2+1)(4-1)}{6}=\frac{9}{6}\neq7 \Rightarrow$ E☐ Faux

On doit donc cocher **A** ☒

Prof : ATMANI NAJIB

Q159 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ **et** $n \geq 2$ $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1$ la somme S_n est :

A ☐ 1 **B** ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$ **C** ☐ $\frac{n(n+2)}{3}$ **D** ☐ $\frac{(2n+1)(n+1)}{6}$ **E** ☐ $\frac{n(n-1)}{2}$

Solution : On a : $S_2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq 2} 1 = 1+1+1 = 3$

On procède par élimination des réponses : n=2

Pour : A ☐ $1 \neq 3 \Rightarrow$ A ☐ Faux

Pour : B ☐ $\frac{2(2+1)}{2} = 3 \Rightarrow$ B ☐ probablement vraie

Pour : **C** ☐ On a : $\frac{2(2+2)}{3} = \frac{8}{3} \neq 3 \Rightarrow$ C ☐ Faux

Pour : **D**☐ On a : $\frac{(4+1)(2+1)}{6} = \frac{15}{6} \neq 3 \Rightarrow$ D ☐ Faux

Pour : E ☐ $\frac{2(2-1)}{2} = 1 \neq 3 \Rightarrow$ E☐ Faux

On doit donc cocher **B**☒

Q160 : Préparation du Concours de ENSA et Médecine

$S_n = \sum_{1 \leq i\,;\, j \leq n} |i-j|$ la somme S_n est :

A ☐ $2n$ **B** ☐ $\frac{n(n+1)}{2}$ **C** ☐ $\frac{n(n^2-1)}{3}$ **D** ☐ $2n^2$ **E** ☐ $\frac{n(n-1)}{2}$

Solution : On a : $S_2 = \sum_{1 \leq i\,;\, j \leq 2} |i-j| = |1-1| + |1-2| + |2-1| + |2-2| = 2$

On procède par élimination des réponses : n=2

Pour : A ☐ $2 \times 2 = 4 \neq 2 \Rightarrow$ A ☐ Faux

Pour : B ☐ $\frac{2(2+1)}{2} = 3 \neq 2 \Rightarrow$ B ☐ Faux

Pour : **C** ☐ On a : $\frac{2(2^2-1)}{3} = 2 \Rightarrow$ C ☐ probablement vraie

Pour : **D**☐ On a : $2 \times 2^2 = 8 \neq 2 \Rightarrow$ D ☐ Faux

Pour : E ☐ $\Rightarrow \frac{2(2-1)}{2} = 1 \neq 2$ E☐ Faux

On doit donc cocher **C**☒

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de Cours D'ARITHMETIQUE

(Pour SM)

A) Divisibilité dans $\mathbb{Z}$.

1)a) a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$

On dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{a = kb}$

On écrit : $\boldsymbol{b|a}$. et on dit que a est divisible par b ou a est un multiple de b

b) Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n

c) Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b'

***B)* Propriétés de *Divisibilité dans* $\mathbb{Z}$.**

$a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{Z}$

1) $1|a$ et $-1|a$ et $a\ |a$ et $a\ |-a$ 2) $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$

3) $a/b \Rightarrow a/b \times c$ 4) $a/b \Rightarrow |a| \leq |b|$

5) $b|1 \Rightarrow b \in \{-1,1\}$ 6) $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$

7) $a|b$ et $c|d \Rightarrow ac|bd$ 8) $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$

9) $a|b \Rightarrow a|\ b\ c$ 10) $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$

11) $a|b \Rightarrow a|\ b\ c$ 12) $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m + n$

13) $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m\ - n$

14) $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.

15) $a/b \Rightarrow a^n/b^n \quad n \in \mathbb{N}$

C) La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; ils existent un entiers relatif q et un entier naturel rTels que : $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$

- L'entier a s'appelle : ***Le divisé***
- L'entier b s'appelle : ***Le diviseur***
- L'entier q s'appelle : ***Le quotient***
- L'entier r s'appelle : ***Le reste***

Remarque : Si r est le reste de la division euclidienne par b alors : $r \in \{0,1, \dots , b-1\}$.

D) Les nombres premiers

a) On dit que l'entier d est un diviseur **effectif** de l'entier relatif a Si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$

b) On dit qu'un entier relatif non nul p est **premier** s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et |p|.
- Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

c)si $\boldsymbol{a}$ un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit diviseur de $\boldsymbol{a}$ diffèrent de 1 est un nombre premier

d)Soit n un entier naturel non nul, diffèrent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \leq n$.

e)Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \leq n$ alors n est premier.

Remarque : Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

E) Plus grand diviseur commun

On dit que le nombre d est le plus grand diviseur commun de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres. on note $d = PGDC\ (a, b) = a \wedge b$

Propriétés :1) $a \wedge a = |a|$ 2) $1 \wedge a = 1$ 3) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ 4) Si $b|a$ alors $a \wedge b = |b|$

5)si $d|a$ et $d|b$ alors $d|\ (a \wedge b)$ 6) $a \wedge b = a \wedge (a - b)$ 7) $a \wedge b = |a| \wedge |b|$

Définition : On dit que deux entier relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Prof : ATMANI NAJIB

F) L'algorithme d'Euclide.

1) Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul

On a : $a = bq + r$ Où $0 \leq r < b$ alors on a : $a \wedge b = b \wedge r$

2)Soient a et b deux entier naturels non nuls. Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

3) Soient a et b deux entier relatifs non nuls. Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$.

On peut dire que : $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

G) Le plus petit multiple commun.

On dit que le nombre entier naturel m est le plus petit multiple commun de deux entiers relatifs a et b lorsque m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petits multiples non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM\ (a, b) = a \vee b$

Propriétés :1) $a \vee a = |a|$ 2) $a \vee b = b \vee a$ 3) $a \vee 1 = |a|$ 4) Si $b|a$ alors $a \vee b = |a|$

5) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ 6) $a \vee b = |a| \vee |b|$ 7) $a|(a \vee b)$; $b|(a \vee b)$ et $(a \vee b)|ab$

8)Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m|M$.

9) $(a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$ 10) $ca \vee cb = c(a \vee b)$ 11) $ca \wedge cb = c(a \wedge b$

12) Soient a et b et des entiers relatifs non nuls :$a \wedge b = d \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2; \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \\ \alpha \vee \beta = 1 \end{cases}$

13) Soient a et b et des entiers relatifs non nuls : $a \wedge b = d \Rightarrow \exists\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2$; $d = au + b$

14)Théorème (Théorème de Bézout) : Soient a et b et des entiers relatifs non nuls :

$a \wedge b = 1 \Leftrightarrow \exists\ (u, v) \in \mathbb{Z}^2$; $1 = au + bv$

15)Théorème de Gauss : Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls : $\begin{cases} c/ab \\ c \vee a = 1 \end{cases} \Rightarrow c/b$

16) Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls : $\begin{cases} a/c\ et\ b/c \\ a \vee b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/c$

H) LA CONGRUENCE MODULO n

a et b deux entiers relatifs ; et n un entier naturel non nul.

On dit que : $\boldsymbol{a}$ est congrue à $\boldsymbol{b}$ modulo $\boldsymbol{n}$ si $n|(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$**.** On écrit : $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b}\ [\boldsymbol{n}]$

1) Si $a \equiv b\ [n]$ alors a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n

2)a) $(\forall a \in \mathbb{Z})\ (a \equiv a\ [n])$ on dit que la relation de congruence est réflexive**.**

b) $(\forall(a, b) \in \mathbb{Z}^2)(\ a \equiv b\ [n] \Leftrightarrow b \equiv a\ [n]\ )$: on dit que la relation de congruence est symétrique.

c) $(\forall(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$

$(a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n] \Rightarrow a \equiv c\ [n])$: on dit que la relation de congruence est transitive.

On dit que la relation de congruence est une relation d'équivalence

3) Soit n un entier naturel non nul.

Si $a \equiv b\ [n]$ et $c \equiv d\ [n]$ alors :

a) $a + c \equiv b + d\ [n]$ On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$

b) $ac \equiv bd\ [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

4) Si $a \equiv b\ [n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k [n]$

5) Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. et $n \in \mathbb{N}^*$ et $d = n \wedge c$ on a : $ac \equiv bc\ [n] \Leftrightarrow a \equiv b\ [\frac{n}{d}]$

6) $\begin{cases} ac \equiv bc[n] \\ c \vee n = 1 \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[n]$ **7)** $\begin{cases} a \equiv b[n] \\ m/n \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[m]$ **8)** $\begin{cases} ac \equiv bc[p] \\ p\ premier\ et\ p \nmid c \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[p]$

I) Les classes d'équivalences.

1) Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r dans la division euclidienne par n s'appelle la classe d'équivalence de r et se note :

$\bar{r} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv r\ [n]\} = \{nk + r\ où\ k \in \mathbb{Z}\}$

Prof : ATMANI NAJIB

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};...;\overline{n-1}\}$ S'appelle ensemble quotient

2) On définit dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ les deux lois : a) L'addition **:** On pose $\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b}$

b) La multiplication **:** On pose : $\bar{a}\times\bar{b}=\overline{a\times b}$

3) Si p est **premier** alors dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a : $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{0}\Leftrightarrow\bar{a}=\bar{0}\ \ ou\ \bar{b}=\bar{0}$

J) DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN FACTEURS DES NOMBRES PREMIERS

1) Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite : $m=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times...\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$ où $\varepsilon\in\{-1,1\}$

2)Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times...\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$

3) un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme

$d=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times p_3^{\beta_3}\times...\times p_n^{\beta_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\beta_k}$ où $(\forall i\in[\![1,n]\!])(0\le\beta_i\le\alpha_i)$

4) $a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times...\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$

Est un entier, le nombre des diviseurs de a est : $2(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_n+1)$

5)Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme : $a=\varepsilon p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times p_3^{\alpha_3}\times...\times p_n^{\alpha_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}$

un entier m est un multiple de a si et seulement si : $m=\varepsilon p_1^{\beta_1}\times p_2^{\beta_2}\times p_3^{\beta_3}\times...\times p_n^{\beta_n}=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\beta_k}$

6) Soient $a=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\alpha_k}=1$ et $b=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\beta_k}$ deux entiers : $a\wedge b=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\inf(\alpha_k;\beta_k)}$ et $a\vee b=\prod_{k=1}^{k=n}p_k^{\sup(\alpha_k;\beta_k)}$

K) L'équation ax + by = c

1)L'équation (E) : $ax+by=c$ admet une solution si et seulement si $(a\wedge b)|c$

2)Si le couple $(x_0;y_0)$ est une solution de l'équation (E) : $ax+by=c$ alors, l'ensemble des solutions de (E) est : $S=\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b};y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right);k\in\mathbb{Z}\right\}$

L) Le P.G.D.C et le P.P.M.C de plusieurs nombres.

1) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus grand entier naturel d qui divise en même temps tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s'appelle le plus grand diviseur commun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et se note :

$d=a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$

2) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers relatifs non nuls ; on a :$a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n=(a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_{n-2})\wedge(a_{n-1}\wedge a_n)$

3)Théorème ($Généralisation\ de\ Bézout$)

Si $d=a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$ alors $\exists(\alpha_i)1\le i\le n$ telle que : $d=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$

4) On dit que les entiers relatifs non nuls : $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux si :
$a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n=1$

5)$a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n=1$si et seulement si : $\exists(\alpha_i)1\le i\le n$ telle que : $1=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_i$

6) Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers relatifs non nuls, le plus petit entier naturel m qui est multiple en même temps tous les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ s'appelle le plus petit multiple commun des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et

Prof : ATMANI NAJIB

se note : m = $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$

M) Propriétés des nombres premiers.

1) Si p et q sont des nombres premiers positifs alors ils sont premiers entre eux.

2) Si p est premier alors il est premier avec tout nombre entier non nul a tel que $p \nmid a$

3) $\begin{cases} p/ab \\ p \text{ premier et } p \nmid a \end{cases} \Rightarrow p/b$ **4)** $\begin{cases} p/ab \\ p \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow p/a \text{ ou } p/b$

5) $\begin{cases} p \Big/ \prod_{i=1}^{n} a_i \\ p \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow \exists 1 \le i \le n \; p/a_i$ **6)** $\begin{cases} p \Big/ \prod_{i=1}^{n} p_i \\ p \text{ premier} \\ \forall 1 \le i \le n;\ p_i \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow \exists 1 \le i \le n;\ p = p_i$

N) Théorème (théorème de Fermat)

Si p est un nombre premier et a un entier relatif non nul et pas divisible par p alors :

$a^{p-1} - 1$ est divisible par p c'est-à-dire : $a^{p-1} \equiv 1[p]$ ou encore : $a^p \equiv a[p]$

P) SYSTEMES DE NUMERATION : Soit b un entier naturel tel que : $b > 1$

Chaque entier naturel non nul n s'écrit d'une façon unique de la forme : $n \equiv a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0$

Où : les $(a_i)_{1 \le i \le n}$ sont des entiers naturels : $0 \le a_i \le b - 1$ et $am \neq 0$

Notation : Si $n \equiv a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0$ on écrit : $n \equiv \overline{a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0}_{(b)}$ Cette écriture s'appelle l'écriture de l'entier n dans la base b

Remarques : 1) On peut effectuer la somme dans une base donnée b par deux façons différentes a**)** La décomposition : $\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 4 \times 7^0 + 6 \times 7^2 + 3 \times 7^1 + 1 \times 7^0$

$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 2 \times 7^3 + 11 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$

$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = 3 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 6 \times 7^1 + 5 \times 7^0$

$\overline{2534}_{(7)} + \overline{631}_{(7)} = \overline{3465}_{(7)}$

b) Calcul direct avec le retenu

2) Le produit : Il est préférable d'effectuer le produit en utilisant le calcul direct avec le retenu car la décomposition

3)Pour effectuer des opérations dans différentes bases on développe les deux nombres dans la base 10 ; on effectue L'opération et on écrit le résultat dans la base demandée.

Exemple : effectuer dans la base 9 : $\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)}$

Solution : $\overline{6432}_{(7)} \times \overline{54}_{(8)} = (6 \times 7^3 + 4 \times 7^2 + 3 \times 7 + 2) \times (5 \times 8 + 4) = 100188$

$= 1 \times 9^5 + 6 \times 9^4 + 2 \times 9^3 + 3 \times 9^2 + 8 \times 9 + 0 = \overline{162380}_{(9)}$

Q) CRITERES DE DIVISIBILITE DES NOMBRES 5,25,3,9,11 ET 4 : Soit x un entier naturel non nul tel que : $x \equiv a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0$ où $0 \le a_i \le 9$; on a :

1) $x \equiv 0\ [5] \Leftrightarrow a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$ 2) $x \equiv 0\ [25] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \in \{0,25,50,75\}$

3) $x \equiv 0\ [3] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [3]$ 4) $x \equiv 0\ [9] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0\ [9]$

5) $x \equiv 0\ [11] \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i \equiv 0\ [11]$ 6) $x \equiv 0\ [4] \Leftrightarrow \overline{a_1 a_0} \equiv 0\ [4]$

X) L'ENSEMBLE $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ OU p EST UN NOMBRE PREMIER.

1)Pour tous entiers relatifs non nuls a et n : $a \wedge n = 1 \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{Z})(am = 1\ [n])$

2)Si p est un nombre premier positif alors tout élément $\bar{x} \neq \bar{0}$ admet un inverse dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Prof : ATMANI NAJIB

Méthodes et astuces et remarques et conseils

Méthodes 1 : Chercher si un nombre n est premier

Diviser ce nombre par les nombres premiers consécutifs, dans l'ordre croissant : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11, etc… et Arrêter au plus grand nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$

Si le nombre que l'on cherchait à diviser n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il est lui-même premier.

Méthodes 2 : Décomposer un nombre n en produit de facteurs premiers

Diviser le nombre n par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.

Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.

Et Continuer ainsi jusqu'à ce que le quotient soit égal à 1. La décomposition est le produit de tous les nombres entiers successifs.

Méthodes 3 : 1) Chercher tous les diviseurs d'un nombre :

Décomposer le nombre en produits de facteurs premiers et utiliser un arbre permettant d'obtenir Tous les diviseurs.

2) Chercher combien de diviseurs possède un nombre n :

Décomposer d'abord le nombre n en produits de facteurs premiers.

Si : $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} .... p_r^{\alpha_r}$ a et b et $c \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de : $d(n) = \prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1)$

Méthodes 4 : Trouver le PPCM de deux nombres :

Décomposer les deux nombres en produits de facteurs premiers et calculer le PPCM en multipliant tous les facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lesquels ils sont notés dans les décompositions.

Méthodes 5 : Trouver le pgcd de deux nombres :

1) Décomposer les deux nombres en produit de facteurs premiers et calculer le PGCD en multipliant tous les facteurs communs des décompositions, affectés de l'exposant le plus petit avec lesquels ils sont notés dans les décompositions.

S'il n'y a pas de facteur commun aux deux décompositions, alors le pgcd est 1.

Exemple : 42 = 2 x 3 x 7 et 98 = 2 x 7^2

Donc le PGCD (42 ; 98) = 2 x 7 = 14

Et PPCM (42 ; 98) =2x3x7^2 =294

2) Autre Méthode pour déterminer le PGCD (méthode d'Euclide)

- On exprime le plus grand des deux nombres avec un multiple du plus petit et un reste.
- On exprime le plus petit en fonction du reste trouvé et d'un nouveau reste.
- On continue ce procédé jusqu'à arriver à un reste nul.
- Le dernier ne reste non nul est le PGCD des deux nombres de départ.

Exemple : Soit à déterminer le PGCD de 556 et 148:

556=3 x**148**+112 ; **148**=31 x**112**+36 ; **112**=3 x**36**+**4 ;** **36**=9 x**4**+0

Le PGCD de 556 et 148 est le dernier reste non nul c'est donc 4.

Méthodes 6: 1) Les multiples communs à deux nombres sont les multiples de leur PPCM.

Dans des exercices où on cherche des multiples communs à deux nombres on peut, même si l'énoncé ne demande pas de trouver le PPCM des deux nombres et ensuite on peut dire que les multiples communs aux deux nombres sont les multiples de ce PPCM.

2) Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.

Dans des exercices on où cherche des diviseurs communs à deux nombres on peut, même si l'énoncé ne demande pas de chercher le PGCD des deux nombres et ensuite on peut dire que les diviseurs communs aux deux nombres sont les diviseurs de ce PGCD.

Méthodes 7 : Ecrire une fraction sous la forme irréductible :

Pour écrire une fraction sous la forme irréductible on divise son numérateur et son dénominateur Par leur PGCD.

Exemple : Ecrire la fraction : $\frac{556}{148}$ sous la forme irréductible.

Comme le PGCD de de 556 et 148 est 4 on divise le numérateur et le dénominateur par 4.

On obtient : $\frac{556}{148}=\frac{556\div 4}{148\div 4}=\frac{139}{37}$ et on a : pgcd (139 ; 37) = 1

Résoudre un problème en utilisant le PGCD :

Essayer de relier le problème avec le calcul du PGCD ou PPCM

Exemples "classiques" :

- Si on veut paver un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 24 cm et 60 cm avec des carrés dont les côtés mesurent un nombre entier de cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur du côté du carré, on cherche le PGCD de 24 et 60 car la mesure de la longueur du côté du carré en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 60.
- Si on veut remplir un parallélépipède dont les arêtes ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm avec des cubes dont les arêtes mesurent un nombre entier cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur de l'arête du cube, on cherche le PGCD de 24, 40 et 60 car la mesure de la longueur de l'arête du cube en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 40 et 60.

Si on cherche un nombre de taille maximale ayant telle ou telle propriété, on pense plutôt au PGCD.

Exemple avec correction : On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

Corrigé : Il faut déterminer PGCD (361;475). On effectue les divisions euclidiennes successives

Le dernier reste non nul étant 19, le PGCD de 475 et 361 est 19.

A l'aide de dalles carrées de 19 cm de côté, on peut donc carreler une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m (il faudra 19 dalles en longueur et 25 en largeur, soit un total de 475 dalles en tout.

Q161. Préparation du Concours de ENSA

Le $PGCD(10!;8!)$ est égale à :

A ☐ 40324 **B** ☐ 40322 **C** ☐ 40320 **D** ☐ 44426

Solution : **ASTUCE :** Décomposons les deux nombres en produit de facteurs premiers et calculons le PGCD en multipliant tous les facteurs communs des décompositions, affectés de l'exposant le plus petit avec lesquels ils sont notés dans les décompositions

$$10!=10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2=5\times 2\times 3^2\times 2^3\times 7\times 2\times 3\times 5\times 2^2\times 3\times 2=2^8\times 3^4\times 5^2\times 7$$

$$8!=8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2=2^3\times 7\times 2\times 3\times 5\times 2^2\times 3\times 2=2^7\times 3^2\times 5\times 7$$

$PGCD(10!;8!)=2^7\times 3^2\times 5\times 7=40320$ On doit donc cocher **C** ☒

Remarque : $PPCM(10!;8!)=?$

ASTUCE : Il suffit de décomposer les deux nombres en produits de facteurs premiers et calculer le PPCM en multipliant tous les facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lesquels ils sont notés dans les décompositions.

Q162. Préparation du Concours de ENSA

Le nombre de diviseurs positifs de $15!$ est égale à :

A ☐ 4028 **B** ☐ 4030 **C** ☐ 4032 **D** ☐ 4034

Solution : ASTUCE **: Pour déterminer combien de diviseurs possède un nombre n :**

Décomposer d'abord le nombre n en produits de facteurs premiers.

Par exemple si La décomposition obtenue est de forme $n=2^7\times 3^2\times 5^3\times 7^9$ alors le nombre de diviseurs de n est : $(7+1)\times(2+1)\times(3+1)\times(9+1)=8\times 3\times 4\times 10=960$ diviseurs

$$15!=15\times 14\times 13\times 12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2=2^{11}\times 3^6\times 5^3\times 7^2\times 11^1\times 13^1$$

Alors le nombre de diviseurs de $15!$ est :

$(11+1)\times(6+1)\times(3+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12\times 7\times 4\times 3\times 2\times 2=4032$ diviseurs

On doit donc cocher **C** ☒

Q163 : Concours ENSA2022 :

Le nombre de diviseurs positifs de 546×840 est égale à :

A ☐ 180 **B** ☐ 181 **C** ☐ 182 **D** ☐ 183

Solution : ASTUCE : Décomposons d'abord les nombres546 et 840 : en produits de facteurs premiers.

$840=2^3\times3^1\times5^1\times7^1$ et $546=2^1\times3^1\times7^1\times13^1$

Donc : $546\times840=2^4\times3^2\times5^1\times7^2\times13^1$: alors le nombre de diviseurs de 546×840 est :

$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)\times(2+1)\times(1+1)=5\times3\times2\times3\times2=180$ diviseurs

On doit donc cocher **A** ☒

Q164 : Concours ENSA2022 :

Sachant que : $11\times11=121$ **;** le produit : $111111111\times111111111=$

A ☐ 123456754321 **B** ☐ 12345678765432 **C** ☐ 12345678987654321

D ☐ 1234568654321

Solution : On a : $11\times11=121$ et on remarque aussi que : $111\times111=12321$

il faut bien regarder comment est les résultat et généraliser :

$11\times11=121$ **:** si le nombre de 1 est 2 on met 2 au milieu

$111\times111=12321$ **:** si le nombre de 1 est 3 on met 3 au milieu

On doit donc cocher **C** ☒ 12345678987654321

Q165: Concours ENSA2013 : Quelle est le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 3 ? :

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ *autre*

Solution : ASTUCE : on cherche $0\le r\prec3$ tel que : $2^{100}\equiv r[3]$

$2^2\equiv1[3]\Rightarrow(2^2)^{50}\equiv1^{50}[3]\Rightarrow2^{100}\equiv1[3]$ **et** $1\prec3$

Donc : le reste de la division euclidienne de 2^{100} par 3

On doit donc cocher **B** ☒

Q166. Préparation du Concours de ENSA

Quelle est le reste de la division euclidienne de 2016^{2012} par 11? :

A ☐ 0 **B** ☐ 5 **C** ☐ 2 **D** ☐ 9

Solution : ASTUCE : on cherche $0\le r\prec11$ tel que : $2016^{2012}\equiv r[11]$

$2016\equiv6-1+0-2[11]\equiv3[11]$ Donc : $2016^{2012}\equiv3^{2012}[11]$

Or : 11 est un nombre premier et $3\wedge11=1$ d'après le théorème de Fermat : $3^{11-1}\equiv1[11]$

C'est-à-dire : $3^{10}\equiv1[11]$

Mais on a : $2012=2010+2=201\times10+2$

Donc : $(3^{10})^{201}\equiv1^{201}[11]\equiv1[11]\Rightarrow3^{10\times201}\times3^2\equiv1\times3^2[11]\Rightarrow3^{10\times201+2}[11]\equiv9[11]\Rightarrow3^{2012}\equiv9[11]$

Par suite : $2016^{2012}\equiv9[11]$ avec : $0\le9<11$

Conclusion : le reste de la division de 2016^{2012} par 11 est 9

On doit donc cocher **D** ☒

Q167. Préparation du Concours de ENSA

Quelle est le reste de la division euclidienne de : 2018^{2011} par 11? :

A ☐ 0 **B** ☐ 5 **C** ☐ 2 **D** ☐ *autre*

Solution : ASTUCE : on cherche $0\le r\prec11$ tel que : $2018^{2011}\equiv r[11]$

$2018\equiv8-1+0-2[11]\equiv5[11]$ donc : $2018^{2011}\equiv5^{2011}[11]$

Or : 11 est un nombre premier et $5\wedge11=1$ d'après le théorème de Fermat : $5^{11-1}\equiv1[11]$

Prof : ATMANI NAJIB

C'est-à-dire : $5^{10} \equiv 1[11]$

Mais on a : $2011 = 2010 + 1 = 201 \times 10 + 1$

Donc : $\left(5^{10}\right)^{201} \equiv 1^{201}[11] \equiv 1[11] \Rightarrow 5^{10\times 201} \times 5^{1} \equiv 1 \times 5[11] \Rightarrow 5^{10\times 201+1} \equiv 5[11] \Rightarrow 5^{2011} \equiv 5[11]$

Par suite : $2018^{2011} \equiv 5[11]$ avec : $0 \leq 5 < 11$

Conclusion : le reste de la division de 2018^{2011} par 11 est 5

On doit donc cocher **B** ☒

Q168. Préparation du Concours de ENSA

Le chiffre des unités du nombre suivant : $2019^{2020^{2021}}$ est :

A ☐ 1 **B** ☐ 2 **C** ☐ 3 **D** ☐ 5

Solution : **ASTUCE :** On cherche $0 \leq r \prec 10$ tel que : $2019^{2020^{2021}} \equiv r[10]$

On a : $2019 \equiv -1[10]$ donc : $2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}}[10]$

Et puisque 2020^{2021} est paire donc : $2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$ c'est-à-dire : le chiffre des unités est 1

On doit donc cocher **A** ☒

Q169.Préparation du Concours de ENSA : Le chiffre des unités du nombre suivant : 1959^{2023} est :

A ☐ 0 **B** ☐ 3 **C** ☐ 8 **D** ☐ *autre*

Solution : On a : $1959^{2023} \equiv chiffre\,unité[10]$

On a : $1959 \equiv 9[10] \equiv -1[10]$ donc : $1959^{2023} \equiv (-1)^{2023}[10] \equiv -1[10] \equiv 9[10]$

Donc : le chiffre des unités du nombre 1959^{2023} est 9

On doit donc cocher **D** ☒

Q170. Préparation du Concours de ENSA

Quelle est le reste de la division euclidienne de 2016^{2012} par 11? :

A ☐ 0 **B** ☐ 9 **C** ☐ 2 **D** ☐ *autre*

Solution : **ASTUCE :** On cherche $0 \leq r \prec 11$ tel que : $2016^{2012} \equiv r[11]$

$2016 \equiv 6 - 1 + 0 - 2[11] \equiv 3[11]$ donc : $2016^{2012} \equiv 3^{2012}[11]$

On montre que : $3^{10} \equiv 1[11]$

Mais on a : $2012 = 2010 + 2 = 201 \times 10 + 2$

Donc : $\left(3^{10}\right)^{201} \equiv 1^{201}[11] \equiv 1[11] \Rightarrow 3^{10\times 201} \times 3^{2} \equiv 1 \times 3^{2}[11] \Rightarrow 3^{10\times 201+2}[11] \equiv 9[11] \Rightarrow 3^{2012} \equiv 9[11]$

Par suite : $2016^{2012} \equiv 9[11]$ avec : $0 \leq 9 < 11$

Conclusion : le reste de la division de 2016^{2012} par 11 est 9

On doit donc cocher **B** ☒

Q171. Préparation du Concours de ENSA

Le chiffre des unités du nombre suivant : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}}$ est :

A ☐ 0 **B** ☐ 2 **C** ☐ 3 **D** ☐ *autre*

Solution : ASTUCE : On cherche $0 \leq r \prec 10$ tel que : $7^{7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}} \equiv r[10]$

On a : $7 \equiv 7[10]$ et $7^{2} \equiv -1[10]$ donc $7^{4} \equiv 1[10]$

Donc : $7^{4k} \equiv 1[10]$ et $7^{4k+1} \equiv 7[10]$ et $7^{4k+2} \equiv 9[10]$ et $7^{4k+3} \equiv 3[10]$

Prof: ATMANI NAJIB

On a aussi : $7 \equiv 3[4]$ et $7^2 \equiv 1[4]$ donc $7^{2k} \equiv 1[4]$ et $7^{2k+1} \equiv 3[4]$

Or : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} \equiv 1[2]$ (car impair) donc : $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}} \equiv 3[10]$ Le chiffre des unités du nombre est 3

On doit donc cocher **C** ☒

Q172. Préparation du Concours de ENSA

3^{3000} est congrus modulo 13 :

A ☐ 2 **B** ☐ -13 **C** ☐ -12 **D** ☐ *autre*

Solution : On a : $3^0 \equiv 1[13]$ et $3^1 \equiv 3[13]$ et $3^2 \equiv 9[13]$ et $3^3 \equiv 1[13]$

Donc : Si $k \in \mathbb{N}$ $3^{3k} \equiv 1^{3k}[13]$ c'est-à-dire : $3^{3k} \equiv 1[13]$ et $3^{3k+1} \equiv 3[13]$ et $3^{3k+2} \equiv 9[13]$

Et on a : $3000 = 3 \times 1000$ donc : $3^{3\times 1000} \equiv 1[13]$ c'est-à-dire : $3^{3000} \equiv 1[13]$

$3^{3000} \equiv 1[13]$ donc : $3^{3000} \equiv 1-13[13]$ donc : $3^{3000} \equiv -12[13]$

On doit donc cocher **C** ☒

Q173 : Concours ENSA : Quelle est le reste de la division euclidienne de :

$N = 1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}$ par 5 ? :

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ *autre*

Solution : ASTUCE : On cherche $0 \le r \prec 5$ tel que : $N \equiv r[5]$

On a : $1 \equiv 1[5]$ et $2 \equiv 2[5]$ et $3 \equiv -2[5]$ et $4 \equiv -1[5]$

Donc : $1^{2006} \equiv 1^{2006}[5]$ et $2^{2006} \equiv 2^{2006}[5]$ et $3^{2006} \equiv (-2)^{2006}[5]$ et $4^{2006} \equiv (-1)^{2006}[5]$

Donc : $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2 \times 2^{2006}[5]$ c'est-à-dire : $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2^{2007}[5]$

Or : $2007 = 4 \times 501 + 3$ donc : $2^{2007} \equiv 3[5]$ Donc : $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 3[5] \equiv 0[5]$ On doit donc cocher **A** ☒

Q174. Préparation du Concours de ENSA

Le nombre des valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2$ *divise* $3n+1$

A ☐ 1 **B** ☐ 2 **C** ☐ 3 **D** ☐ *autre*

Solution : On a : $n+2/3n+1$ et on a aussi : $n+2/n+2$

$n+2/3n+1$ et $n+2/3n+6$ donc : $n+2/(3n+6)-(3n+1)$ c'est-à-dire : $n+2/5$

Mais les diviseurs de 5 sont : 1 ; -1 ; 5 ; -5

Donc : Il faut que $n+2 \in \{-1;-5;1;5\}$ Ce qui entraine que : $n \in \{-3;-7;-1;3\}$

On vérifie que : si $n \in \{-3;-7;-1;3\}$ alors $n+2/3n+1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n+2/3n+1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ;3

On doit donc cocher **D** ☒

Q175. Préparation du Concours de ENSA

Le nombre de couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation : $x^2 - y^2 = 51\ (1)$ est

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ *autre*

Solution : $x^2 - y^2 = 51$ Équivaut a $(x+y)(x-y) = 51$

Donc : $x+y$ et $x-y$ sont des diviseurs de 51

On a : $51 = 3^1 \times 17^1$ donc les diviseurs de 51 sont : 1 et 3 et 17et 51

Par suite : $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=51 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x-y=3 \\ x+y=17 \end{cases}$ car $x-y \prec x+y$ Donc : $\begin{cases} x=26 \\ y=25 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases}$

Par suite : les couples $(x;y)$ de nombres entiers naturels qui vérifient la relation (1) sont : $(26;25)$; $(10;7)$

Prof: ATMANI NAJIB

Q176. Préparation du Concours de ENSA

Dans $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$: le nombre de solutions de l'équation : $x^2+\bar{3}x=\bar{0}$

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ *autre*

Solution : $x^2+\bar{3}x=\bar{0}$; ASTUCE : On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2+\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que : $\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation

Donc : $S=\{\bar{0};\bar{1}\}$ par suite deux solutions

On doit donc cocher **C** ☒

Q177. Préparation du Concours de ENSA

Dans $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$: le nombre de solutions de l'équation : $\overline{2025}x^3+\bar{2}x=\bar{1}$

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ *autre*

Q178. Préparation du Concours de ENSA

Dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E)\quad 15x+20y=7$ admet :

A ☐ une unique solution **B** ☐ exactement deux solutions

C ☐ une infinité de solutions **D** ☐ n'a pas de solutions

Solution : On a : $15\wedge 20=5$ et 5 ne divise pas 7 donc l'équation (E) n'admet pas de solutions dans $\mathbb{Z}^2$

Q179. Préparation du Concours de ENSA

Dans $\mathbb{Z}^2$ l'ensemble des solutions de l'équation : $(E)\quad 41x-10y=2018$ est :

A ☐ $S=\{(2018+10k;10+k41);k\in\mathbb{Z}\}$ **B** ☐ $S=\{(2018+10k;10+k41);k\in\mathbb{Z}\}$

C ☐ $S=\{(100+10k;-1+k);k\in\mathbb{Z}\}$ **D** ☐ $S=\varnothing$

Solution : Remarquons que : $(1;4)$ est une solution évidente particulière de l'équation : $41x-10y=1$ car $41\times1-10\times4=1$ donc : $(1\times2018;4\times2018)=(2018;8072)$ est une solution particulière de l'équation : (E)

Appliquons directement le Théorème suivant :

Si le couple $(x_0;y_0)$ est une solution de l'équation (E) : $ax+by=c$ alors, l'ensemble des solutions de (E) est

$$S=\left\{\left(x_0+\frac{kb}{a\wedge b};y_0-\frac{ka}{a\wedge b}\right);k\in\mathbb{Z}\right\}:$$

On a : $a\wedge b=41\wedge(-10)=41\wedge10=1$

L'ensemble des solutions de (E) est : $S=\left\{\left(2018+\frac{k(-10)}{1};8072-\frac{k41}{1}\right);k\in\mathbb{Z}\right\}$

$$S=\{(2018-10k;8072-k41);k\in\mathbb{Z}\}=\{(2018+10k;8072+k41);k\in\mathbb{Z}\}$$

On doit donc cocher **B** ☒

Q180. Préparation du Concours de ENSA

QCM : Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

1) On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2-x+4\equiv0[6]$

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient : $x\equiv2[6]$.

Prof : ATMANI NAJIB

D : les solutions vérifient $x \equiv 2[6]$ ou $x \equiv 5[6]$

2) On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x+34y=2$, où x, y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : (x ; y) = (34k−7 ; 5−24k), k∈$\mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : (x ; y) = (17k−7 ; 5−12k), k∈$\mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : (x ; y) = (−7k ; 5k), k∈$\mathbb{Z}$.

3) On considère les deux nombres $n=1789$ et $p=1789^{2005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4[17]$ et $p \equiv 0[17]$ B : p est un nombre premier. C : $p \equiv 4[17]$. D : $p \equiv 1[17]$

Solution :1) Testons la réponse D : $x \equiv 2[6]$ alors : $x^2-x+4 \equiv 4-2+4 \equiv 6 \equiv 0[6]$;

Si $x \equiv 5[6]$ alors $x^2-x+4 \equiv 25-5+4 \equiv 24 \equiv 0[6]$. Ok.

2) Simplifions par 2 : $12x+17y=1$; a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fausse.

Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que −7 et 5 est pas mal : $12\times(-7)+17\times 5=1$.

Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3) On a $n=1789 \equiv 4[17]$; par ailleurs $4^2=16 \equiv -1[17]$ donc $4^{2\times 1002+1} \equiv (-1)^{1002}\times 4[17] \equiv 4[17]$

Q181. Préparation du Concours de ENSA

$1^{19}+2^{19}+3^{19}+....+17^{19}$ est congru mod 19 à :

A ☐ −2 **B** ☐ −1 **C** ☐ 0 **D** ☐ 1

Solution : On doit donc cocher **D** ☒

Q182. Préparation du Concours de ENSA

Le nombre de diviseurs positifs de 100^{100} est égale à :

A ☐ 401 **B** ☐ 4401 **C** ☐ 40401 **D** ☐ 44401

Solution : On doit donc cocher **C** ☒

Q183. Préparation du Concours de ENSA

Quelle est Les 2 derniers chiffres du nombre 9^{98} ? :

A ☐ 21 **B** ☐ 31 **C** ☐ 01 **D** ☐ 91

Solution : On doit donc cocher **A** ☒

Q184. Préparation du Concours de ENSA

Soit $n \in \mathbb{N}$; l'équation : $2^n x+3^n y=6^n$ admet dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$:

A ☐ zéros solutions **B** ☐ une solution unique **C** ☐ n solutions **D** ☐ une infinité de solutions

Solution : On doit donc cocher **D**☒

Q185. Préparation du Concours de ENSA

Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n=2^n+3^n$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$: PGCD$(w_n ; w_{n+1})$ vaut

A ☐ 0 **B** ☐ 1 **C** ☐ 2 **D** ☐ 3

Solution : On doit donc cocher **B**☒

Q186. Préparation du Concours de ENSA

Le nombre de zéros par lequel se termine $55!$ est :

A ☐ 10 **B** ☐ 11 **C** ☐ 12 **D** ☐ 13

Solution : On doit donc cocher **D**☒

Q187. Préparation du Concours de ENSA

Soit $n \in \mathbb{N}$; vérifiant : $n \equiv 3[9]$ et $n \equiv 3[11]$ alors :

A ☐ $n \equiv 9[99]$ **B** ☐ $n \equiv 3[99]$ **C** ☐ $100n \equiv 3[99]$ **D** ☐ $100n \equiv 9[99]$

Solution : On doit donc cocher **B**☒

Prof : ATMANI NAJIB

Q188. Préparation du Concours de ENSA

Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: l'équation : $x\times y\equiv 0[7]$ alors :

A ☐ x *et* y sont multiples de 7 **B** ☐ x *ou* y sont multiples de 7

C ☐ soit x ; soit y n'est pas un multiples de 7 **D** ☐ ni x ni y sont multiples de 7

Solution : On doit donc cocher **B**☒

Q189. Préparation du Concours de ENSA

Soit la congruence (E) : $5x\equiv 2[17]$ alors :

A ☐ (E) est équivalente à : $x\equiv 2[17]$ **B** ☐ (E) est équivalente à : $x\equiv 7[17]$

C ☐ (E) est équivalente à : $x\equiv 14[17]$ **D** ☐ (E) est équivalente à : $x\equiv 0[17]$

Solution : On doit donc cocher **C**☒

Q190. Préparation du Concours de ENSA

Quelle est le reste de la division euclidienne de 55^{2014} par 2013 ? :

A ☐ 2012 **B** ☐ 55 **C** ☐ 1144 **D** ☐ 1309

Solution : On doit donc cocher **C** ☒

Prof : ATMANI NAJIB

Résumé de cours sur les espaces vectoriels (Pour SM)

1) loi de composition externe :

Soit E et A deux ensembles non vides. Toute application : $\begin{array}{l} f : A\times E \to E \\ (\alpha;x)\mapsto f(\alpha;x) \end{array}$ S'appelle Une loi de composition externe sur E a coefficients dans A

L'élément : $f(\alpha;x)$ dans E s'appelle la composée de α et x dans l'ordre par cette loi de composition externe f et on le note : $\alpha.x$ ou αx au lieu de : $f(\alpha;x)$

On général en prend : $A=\mathbb{R}$ ou $A=\mathbb{C}$ Ou A un corps

2) espace vectoriel

2-1) definition : Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ et une loi de composition externe a coefficients dans $\mathbb{R}$: $\begin{array}{l} .:\mathbb{R}\times E \to E \\ (\alpha;x)\mapsto \alpha.x \end{array}$ Ont dit que $(E;*;.)$ est un espace vectoriel

Sur $\mathbb{R}$ ou espace vectoriel reel si les lois vérifient les propriétés suivantes :

(1) $(E;*)$ est un groupe commutatif

(2) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ $\forall x\in E$ $(\alpha+\beta)x=\alpha x*\beta x$

(3) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ $\forall x\in E$ $(\alpha\times\beta)x=\alpha(\beta x)$

(4) $\forall(x;y)\in E^2$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha(x*y)=\alpha x*\alpha y$

(5) $\forall x\in E$: $1x=x$; On appelle les éléments de E des vecteurs on les note $\vec{x}$ ou simplement x

Les éléments de $\mathbb{R}$ seront appelés des scalaires.

Pour $(E;*)$ l'lément neutre on le note : $\vec{0}$ ou $\mathbf{O}_E$ ou simplement 0

2-2) Exemples d'espaces vectoriels : a)L'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

$(F(\mathbb{R};\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel

b) (Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$).E = $\mathbb{R}^2$

Un élément u ∈ $\mathbb{R}^2$ est donc un couple (x, y) avec x élément de $\mathbb{R}$ et y élément de $\mathbb{R}$.

Ceci s'écrit : $\mathbb{R}^2=\{(x;y)/x\in\mathbb{R};y\in\mathbb{R}\}$; $(\mathbb{R}^2;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

c)L'espace vectoriel des polynômes de degrés inferieur a un entier naturel n se note : $\mathbb{R}_n[X]$.

$(\mathbb{R}_n[X];+;.)$ est un espace vectoriel Sur $\mathbb{R}$

d) L'ensemble des matrices carrées d'ordre3 On le note : $M_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}/(a;b;c;d;f;g;h;i)\in\mathbb{R}^9\right\}$

$(M_3(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel Sur $\mathbb{R}$; De même : $(M_2(\mathbb{R});+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

e)L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; **f)**l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,... est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

g) C est un R-espace vectoriel

2-3) Autre notations : $(E;+;.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou espace vectoriel reel si les lois vérifient les propriétés suivantes :(1) $(E;+)$ est un groupe commutatif

(2) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ $\forall\vec{x}\in E$:$(\alpha+\beta)\vec{x}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{x}$

(3) $\forall(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ $\forall\vec{x}\in E$ $(\alpha\times\beta)\vec{x}=\alpha(\beta\vec{x})$

(4) $\forall(\vec{x};\vec{y})\in E^2$ $\forall\alpha\in\mathbb{R}$ $\alpha(\vec{x}+\vec{y})=\alpha\vec{x}+\alpha\vec{y}$

Prof : ATMANI NAJIB

(5) $\forall \vec{x} \in E \quad 1\vec{x} = \vec{x}$

2-4) Règles de calculs dans un espace vectoriel : Soit $(E;+;.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\forall(\vec{x};\vec{y}) \in E^2$ et $\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ on a : 1) $0\vec{x} = \vec{0}$ 2) $\alpha\vec{0} = \vec{0}$ 3) $-1\vec{x} = -\vec{x}$ 4) $(-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x})$

5) $\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y}$ 6) $(\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}$ 7) $\alpha\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ ou $\alpha = 0$

L'opération qui à $(\vec{x};\vec{y})$ associe $\vec{x} - \vec{y}$ s'appelle la soustraction. Le vecteur $\vec{x} + (-\vec{y})$ est noté $\vec{x} - \vec{y}$.

3) Sous-espace vectoriel

3-1)Définition: Soit (E,+,.) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et F un sous-ensemble de E.

On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si (F,+,.) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (donc pour les mêmes lois que celles de E, ou plus précisément pour les lois induites dans F par celles de E).

3-2)Théorème: (caractérisation d'un sous-espace vectoriel)

Soit (E,+,.) un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : • F est inclus dans E,

• F est non vide,

• F est stable par combinaison linéaire cad :$\forall$ (x,y) $\in F^2$, $\forall$ (λ,μ) $\in \mathbb{R}^2$, (λ.x + μ.y) $\in$ F.

4) combinaison linéaire

4-1) Soit (E,+,.) un -espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

Soit une famille de n vecteurs : $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ de E.

Une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est un vecteur $\vec{x}$ de E qui s'écrit :

$\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$, où les α_i sont des scalaires (réels) qui s'appelles les coefficients de la combinaison linéaire ; ont dit aussi que vecteur $\vec{x}$ est engendré par la famille de vecteurs : $(x_i)_{1\le i\le n}$

4-2) espace vectoriel engendré par une famille : E étant un espace vectoriel réel

Soit B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une famille de vecteurs de E. Ont dit que la famille B engendre E ssi :

$\forall \vec{x} \in E \quad \exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ Tel que : $\vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\vec{x}_i$

4-3) Sous-espace engendré par une famille

a) Soit $\{\vec{x}_1 ; \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un R-espace vectoriel E. Alors :

• L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{\vec{x}_1 ; \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

• C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant les vecteurs $\{\vec{x}_1 ; \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$

Notation. Ce sous-espace vectoriel est appelé sous-espace engendré par $\{\vec{x}_1 ; \vec{x}_2;...;\vec{x}_n\}$ et est noté Vect($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$). On a donc : $\vec{x} \in$ Vect ($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\Longleftrightarrow$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$\vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{x}_n$

b)Plus généralement, on peut définir le sous-espace vectoriel engendré par une partie V quelconque (non nécessairement finie) d'un espace vectoriel :

vectV est le plus petit sous-espace vectoriel contenant V .

c) E étant un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et $\vec{x}_1$ un élément de E

L'ensemble Vect($\vec{x}_1$) = $\{\lambda\vec{x}_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est le sous-espace vectoriel de E engendré par $\vec{x}_1$. Il est souvent noté $\mathbb{R}\,\vec{x}_1$.

Si $\vec{x}_1$ n'est pas le vecteur nul, on parle d'une droite vectorielle.

4-4) Familles libres ; Familles libres

a)Soient (E, +, .) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Soient n un entier naturel non nul

La famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\in E^n$ est liée (ou encore les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ sont linéairement dépendants) si et seulement si $\exists(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{x} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ... + \alpha_n\vec{x}_n = \vec{0}$ et $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n) \neq (0;0;...;0)$

Prof : ATMANI NAJIB

Une relation du type : $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}$ avec $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\neq(0;0;...;0)$ s'appelle une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $\vec{x}_i$ .et La famille B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) est libre (ou encore les vecteurs $\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$ sont linéairement indépendants) si et seulement

si $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\vec{0}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$.

b) La famille B est dite liée ssi elle n'est pas libre.

c) Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) $\in E^n$ une famille de vecteurs de E.

La famille est liée ssi l'un des vecteurs de cette famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

d)Si une famille comporte le vecteur nul ou deux fois le même vecteur, la famille est liée.

e)Si une famille B est liée alors toute famille qui contient la famille B est une famille liée.

f) Si une famille B est libre alors toute partie de cette famille est une famille libre.

g) Si une famille B est libre alors les vecteurs de cette famille sont non nuls

5) base d'un espace vectoriel

5-1)Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une famille de vecteurs de E est une base Si et seulement si tout élement de E s'exprime de facon unique sous forme d'une combinaison lineaire des élément de B

Cad $\forall\vec{x}\in E\ \ \exists!(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)\in\mathbb{R}^n$ Tel que : $\vec{x}=\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+...+\alpha_n\vec{x}_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{x}_i$

Le : $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$ s'appelle les coordonnées de $\vec{x}\in E$ dans la base B et on écrit : $\vec{x}=(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)_{(B)}$

2) Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et B=($\vec{x}_1$; $\vec{x}_2;...;\vec{x}_n$) une base de E et $\lambda\in\mathbb{R}$

a)si $(\alpha_1;\alpha_2;...;\alpha_n)$ sont les coordonnées de $\vec{x}\in E$ et $(\beta_1;\beta_2;...;\beta_n)$ sont les coordonnées de $\vec{y}\in E$ dans la base B alors : $(\alpha_1+\beta_1;\alpha_2+\beta_2;...;\alpha_n+\beta_n)$sont les coordonnées de $\vec{x}+\vec{y}$ dans la base B et $(\lambda\alpha_1;\lambda\alpha_2;...;\lambda\alpha_n)$ sont les coordonnées de $\lambda\vec{x}$ dans la base B.

b) B est une base de E si et seulement si c'est une famille libre et génératrice de E.

5-2) dimension d'un espace vectoriel reel

5-2-1) Soit (E ,+, .) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Si E admet une base comportant un nombre fini de n vecteurs $(n\in\mathbb{N}^*)$, on appelle dimension de E le nombre n qui est donc le même pour toutes les bases de E et on écrit : $\dim E=n$

5-2-2) Soit (E,+,.) un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

1)si $\dim E=2$ et R=$(\vec{i};\vec{j})$) une base de E

a)la famille $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est une base de E ssi elle est libre.

b) Si : $\vec{u}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$ et $\vec{u}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$ et $\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ y_1 & y_2\end{vmatrix}\neq 0$ alors $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2)$ est libre

2) Si $\dim E=3$ et R=$(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$) une base de E

a)la famille $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est une base de E si et seulement si elle est libre.

b) Si : $\vec{u}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ et $\vec{u}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ et $\vec{u}_3=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$

Et $\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}\neq 0$ alors $B=(\vec{u}_1;\vec{u}_2;\vec{u}_3)$ est libre

Prof : ATMANI NAJIB