Résumé de Cours Tronc commun Sciences BIOF

Notion d'arithmétique et l'Ensemble des nombres entiers

1) Ensemble $\mathbb{N}$: $\mathbb{N}$ c'est l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N}=\{0;1;2;...\}$.

C'est un ensemble qui commence par 0 mais ne finit jamais.

a) Le nombre 0 est le nombre entier naturel nul.

$\mathbb{N}^*=\{1;2;...\}$ C'est l'ensemble des entiers naturels non nuls ; qui commence par 1 mais ne finit jamais.

7 appartient à $\mathbb{N}$ on écrit : $7\in\mathbb{N}$

-3 N'est pas un nombre entier naturel

On écrit : $-3\notin\mathbb{N}$ et on a : $0\notin\mathbb{N}^*$.

Remarque : $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}$ et on lit : $\mathbb{N}^*$ est inclus dans $\mathbb{N}$ ou encore : $\mathbb{N}^*$ est une partie de l'ensemble $\mathbb{N}$.

Donc : pour comparer un ensemble avec un autre ensemble on utilise les deux symboles : $\subset$ et $\not\subset$

2) Diviseurs et multiples : Soient : $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}^*$.

On dit que a est un multiple de b ou que b est un diviseur de a s'il existe un entier naturel k

Tel que: $a=k\times b$.

3) Critères de divisibilité : Soit n un nombre entier naturel. n est divisible par :

a) **2** si et seulement si son nombre d'unités est : 0, 2, 4, 6 ; 8.

b) **3** si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3.

c) **4** si et seulement si le nombre formé par ces deux derniers chiffres est divisible par 4.

d) **5** si et seulement si son nombre d'unités est : 0 ou 5.

e) **9** si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 9.

3) Parité d'un entier : a) On dit qu'un nombre est pair s'il est un multiple de 2 ou s'il existe un entier naturel k tel que : n = 2.k

b**)** On dit qu'un nombre est impair s'il existe un entier naturel k tel que : n = 2.k + 1

Remarques : Un nombre entier naturel est soit pair soit impair, et on a les résultats suivants :

Nombres	a	b	$a+b$	$a-b$	$a\times b$
Parité des nombres	pair	pair	pair	pair	pair
	impair	impair	pair	pair	impair
	pair	impair	impair	impair	pair

4) Nombres premiers : Un nombre entier naturel est dit premier s'il admet <u>exactement</u> deux diviseurs : 1 et lui-même

Remarques: 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2 est le seul nombre premier pair.

Il y a une infinité de nombre premier.

Voici la liste des nombres premiers jusqu'à 200 :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

5) Décomposition en produit de facteurs premiers : Tout entier naturel non premier se décompose en produit de facteurs premiers et cette décomposition est unique.

6) le plus grand commun diviseur :

a) Soient a et b deux entiers non nuls

Le PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun des nombres a et b .

On le note : $PGCD(a;b)$ ou $a\wedge b$

b) Le plus grand diviseur commun de deux nombres est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans leur décompositions

7) Le plus petit commun multiple :

a) Soient a et b deux entiers non nuls.

Le PPCM de a et b est le plus petit multiple commun des nombres a et b .

On le note $PPCM(a;b)$ ou $a\vee b$.

b) Le plus petit multiple commun de deux nombres est le produit des facteurs communs et non communs munis du plus grand des exposants trouvés dans leurs décompositions.

L'**arithmétique** : Est une branche des mathématiques qui correspond à la science des nombres.

L'arithmétique s'est au départ limitée à l'étude des propriétés des entiers naturels, des entiers relatifs et des nombres rationnels (sous forme de fractions), et aux propriétés des opérations sur ces nombres. Les opérations arithmétiques traditionnelles sont l'addition, la division, la multiplication, et la soustraction. Cette discipline fut ensuite élargie par l'inclusion de l'étude d'autres nombres comme les réels (sous forme de développement décimal illimité), ou même de concepts plus avancés, comme l'exponentiation ou la racine carrée. *Une* arithmétique est une manière de représenter formellement – autrement dit, « coder » – les nombres (sous la forme d'une liste de chiffres, par exemple) ; et (grâce à cette représentation) définir les opérations de base : addition, multiplication, etc.

Méthodes et astuces et remarques et conseils

Remarque : 1) Pour comparer un ensemble avec un élément on utilise les deux symboles : $\in$ et $\notin$
Exemples : $0 \in \mathbb{N}$; $0 \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$…
2) Pour comparer un ensemble avec un autre ensemble on utilise les deux symboles : $\subset$ et $\not\subset$
Exemples : $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{N}$; $\{0;-1;12\} \not\subset \mathbb{N}$

Méthodes 1 : Chercher si un nombre n est premier
Diviser ce nombre par les nombres premiers consécutifs, dans l'ordre croissant : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11, etc… et Arrêter au plus grand nombre premier inférieur à $\sqrt{n}$
Si le nombre que l'on cherchait à diviser n'est divisible par aucun de ces nombres premiers, alors il est lui-même premier.

Méthodes 2 : Décomposer un nombre n en produit de facteurs premiers
Diviser le nombre n par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
Diviser le quotient obtenu par le plus petit nombre premier par lequel il est divisible.
Et Continuer ainsi jusqu'à ce que le quotient soit égal à 1. La décomposition est le produit de tous les nombres entiers successifs.
Exemple : décomposons 20 en nombres premiers
20 | 2 20 est pair, donc divisible par 2.
Le résultat de la division est 10
10 | 2 10 est pair, donc divisible par 2.
Le résultat de la division est 5
5 | 5 5 est un nombre premier.
1 La décomposition est finie car le résultat est 1.
On écrit alors : $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$

Méthodes 3 : 1) Chercher tous les diviseurs d'un nombre :
Décomposer le nombre en produits de facteurs premiers et utiliser un arbre permettant d'obtenir Tous les diviseurs.
2) Chercher combien de diviseurs possède un nombre n :
Décomposer d'abord le nombre n en produits de facteurs premiers.
Par exemple si La décomposition obtenue est de forme $a^p \times b^q \times c^r$ alors le nombre de diviseurs de n Est : $(p + 1) \times (q + 1) \times (r + 1)$

Méthodes 4 : Trouver le PPCM de deux nombres :
Décomposer les deux nombres en produits de facteurs premiers et calculer le PPCM en multipliant tous les facteurs qui figurent dans l'une ou l'autre des décompositions, affectés de l'exposant le plus grand avec lesquels ils sont notés dans les décompositions.

Méthodes 5 : Trouver le pgcd de deux nombres :
1) Décomposer les deux nombres en produit de facteurs premiers et calculer le PGCD en multipliant tous les facteurs communs des décompositions, affectés de l'exposant le plus petit avec lesquels ils sont notés dans les décompositions.
S'il n'y a pas de facteur commun aux deux décompositions, alors le pgcd est 1.
Exemple : $42 = 2 \times 3 \times 7$ et $98 = 2 \times 7^2$
Donc le PGCD (42; 98) = $2 \times 7 = 14$
Et PPCM (42; 98) $= 2\times3\times7^2 = 294$
2) Autre Méthode pour déterminer le PGCD (méthode d'Euclide)
- On exprime le plus grand des deux nombres avec un multiple du plus petit et un reste.
- On exprime le plus petit en fonction du reste trouvé et d'un nouveau reste.
- On continue ce procédé jusqu'à arriver à un reste nul.
- Le dernier ne reste non nul est le PGCD des deux nombres de départ.

Exemple : Soit à déterminer le PGCD de 556 et 148:
$\mathbf{556} = 3 \times \mathbf{148} + 112$
$\mathbf{148} = 31 \times \mathbf{112} + 36$
$\mathbf{112} = 3 \times \mathbf{36} + \boxed{\mathbf{4}}$
$\mathbf{36} = 9 \times \mathbf{4} + 0$
Le PGCD de 556 et 148 est le dernier reste non nul c'est donc 4.

Méthodes 6: 1) Les multiples communs à deux nombres sont les multiples de leur PPCM.
Dans des exercices où on cherche des multiples communs à deux nombres on peut, même si l'énoncé ne demande pas de trouver le PPCM des deux nombres et ensuite on peut dire que les multiples communs aux deux nombres sont les multiples de ce PPCM.
2) Les diviseurs communs à deux nombres sont les diviseurs de leur PGCD.
Dans des exercices on où cherche des diviseurs communs à deux nombres on peut, même si l'énoncé ne demande pas de chercher le PGCD des deux nombres et ensuite on peut dire que les diviseurs communs aux deux nombres sont les diviseurs de ce PGCD.

Méthodes 7 : Ecrire une fraction sous la forme irréductible :

Pour écrire une fraction sous la forme irréductible on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD.

Exemple : Ecrire la fraction : $\frac{556}{148}$ sous la forme irréductible.

Comme le PGCD de de 556 et 148 est 4 on divise le numérateur et le dénominateur par 4.

On obtient : $\frac{556}{148} = \frac{556 \div 4}{148 \div 4} = \frac{139}{37}$ et on a : pgcd (139 ; 37) = 1

Résoudre un problème en utilisant le PGCD:

Essayer de relier le problème avec le calcul du PGCD ou PPCM

Exemples "classiques" :

- Si on veut paver un rectangle dont les côtés ont pour longueurs 24 cm et 60 cm avec des carrés dont les côtés mesurent un nombre entier de cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur du côté du carré, on cherche le PGCD de 24 et 60 car la mesure de la longueur du côté du carré en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 60 .
- Si on veut remplir un parallélépipède dont les arêtes ont pour longueur 24cm, 40cm et 60 cm avec des cubes dont les arêtes mesurent un nombre entier cm et si on demande de chercher quelle est la valeur maximale possible pour la longueur de l'arête du cube, on cherche le PGCD de 24, 40 et 60 car la mesure de la longueur de l'arête du cube en cm doit être un diviseur à la fois de 24 et 40 et 60.

Si on cherche un nombre de taille maximale ayant telle ou telle propriété, on pense plutôt au PGCD.

Exemple avec correction :

On veut recouvrir une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m avec des dalles carrées dont le côté mesure un nombre entier de centimètres. Quelle est la taille maximale de ces dalles ?

Corrigé : Il faut déterminer PGCD (361 ;475). On effectue les divisions euclidiennes successives

Le dernier reste non nul étant 19, le PGCD de 475 et 361 est 19.

A l'aide de dalles carrées de 19 cm de côté, on peut donc carreler une surface rectangulaire de 4,75 m sur 3,61 m (il faudra 19 dalles en longueur et 25 en largeur, soit un total de 475 dalles en tout.

Mohammed Al-Khawarizmi

Al-Khawarizmi, né vers 783 à Khiva (Ouzbékistan) et mort en 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse.

Mohammed ibn Musa al-Khawarizmi est le premier des mathématiciens persans et le plus connu.

Le nom Al-Khawarizmi a donné en français le nom d'algorithme.

Il développe l'usage du chiffre zéro, qui pour lui a une importance fondamentale pour la suite des mathématiques.

Il développe également les tables trigonométriques.