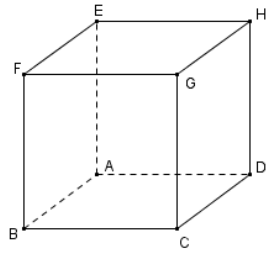
VECTEURS DE L'ESPACE

Exercice01 :



ABCDEFGH un cube on pose :
Simplifier : $\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}$

Solution :
On a : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$\vec{t}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right)+\overrightarrow{FH}$
(Relation de Chasles)
$\vec{t}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}$ Car
$\overrightarrow{FH}=\overrightarrow{BD}$ (FHDB est un parallélogramme)
$\vec{t}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BB}+\overrightarrow{AE}=\vec{0}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AE}$

Exercice02:
ABCDEFGH un cube et K milieu du segment $[EF]$ et L milieu du segment $[CF]$ et M un point du segment $[CD]$ tel que : $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$

Montrer que : $(ML)\parallel(DK)$

Solution : en utilisant la Relation de Chasles
On a : $\overrightarrow{ML}=\overrightarrow{CL}-\overrightarrow{CM}$ et puisque : L milieu du segment $[CF]$ Alors : $\overrightarrow{CL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

donc : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right)$ (1)

D'autre part On a : $\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}$ et
$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CD}$ Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{CD}$
et puisque : K milieu du segment $[EF]$

Alors : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$ donc : $\overrightarrow{FK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (car : $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CD}$)

Donc : $\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{CF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CF}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ (2)

De (1) et (2) on a : $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DK}$

donc $\overrightarrow{DK}$ et $\overrightarrow{ML}$ sont colinéaires
Donc : $(ML)\parallel(DK)$

Exercice03: $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires
Déterminer les réels x et y tels que :
$x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v}$

Solution : $x\left(\vec{u}+2\vec{v}\right)+y\left(\vec{u}+3\vec{v}\right)=2\vec{u}+5\vec{v}\Leftrightarrow$

$(x+y-2)\vec{u}+(2x+3y-5)\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2=0\\2x+3y-5=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=2\\2x+3y=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Exercice04 :
ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment $[AD]$

on pose $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ $\overrightarrow{FC}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{IO}=\vec{w}$

Montrer que : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Solution : On a : $\overrightarrow{EG}=\vec{u}$ et on a $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$
donc $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$
On considère le triangle ADF
et puisque : I milieu du segment $[AD]$
et O milieu du segment $[FD]$

on trouve : $\overrightarrow{IO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ Donc : $\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AK}$

et puisque : K milieu du segment $[AF]$
cad $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$
et On considérons le point L tel que AFCL est un parallélogramme on trouve : $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$
Alors : $\overrightarrow{AC}=\vec{u}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AK}=\vec{w}$
Donc : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Exercice05 : ABCDEFGH un cube
M milieu du segment $[HE]$ et et N milieu du segment $[HG]$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils coplanaires ? justifier

Solution : On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment $[HE]$ N milieu du segment $[HG]$ on trouve : $\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{MN}$

et puisque $\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AC}$: alors $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{MN}$ donc
Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et par suite Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

Exercice06 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{CQ}=3\overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{CP}=3\overrightarrow{CD}$ $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$

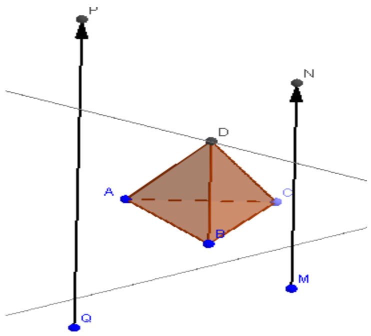
1)Tracer une figure

2)Ecrire $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$

3)En déduire que $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

Solution :1)



2) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}=2\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=-\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}=-3\overrightarrow{CD}+3\overrightarrow{CB}=-3\left(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\right)$

$\overrightarrow{PQ}=-3\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\right)=-3\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=-3\overrightarrow{BD}$

3) on a $\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$ ❶

on a $\overrightarrow{PQ}=-3\overrightarrow{BD}$ donc $\overrightarrow{BD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ ❷

de❶ et ❷ on trouve : $\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ}$ donc $\overrightarrow{MN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$

donc : $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

4)on a $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

Exercice07 : $ABCD$ un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points K ; L tel que :

$\overrightarrow{CL}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Montrer que $(LD)\parallel(EK)$

Solution : pour montrer que $(LD)\parallel(EK)$ il suffit de montrer que : $\overrightarrow{LD}$, $\overrightarrow{EK}$ sont colinéaires ??

On a : $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ on utilisant la Relation de Chasles

Donc : $\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Donc : $\overrightarrow{EK}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$ et

puisque : $\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AE}$

Donc : $\overrightarrow{EK}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Alors : $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ ❶

On a : $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

et puisque : $\overrightarrow{LD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AL}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ ❷

de ❶ et ❷ on déduit que : $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$

donc : $(LD)\parallel(EK)$

Exercice08 : ABCDEFGH un cube

K est le symétrique du point D par rapport a H

Montrer que $(AK)\parallel(BCG)$

Solution :on a : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CG}$

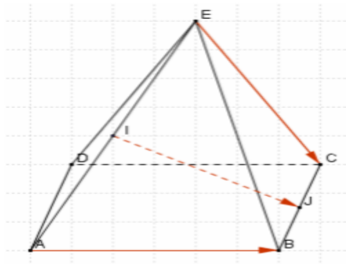
donc : Les vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CG}$ sont coplanaires

on déduit que : $\exists x\in\mathbb{R}:\exists y\in\mathbb{R}/\overrightarrow{AK}=x\overrightarrow{CB}+y\overrightarrow{CG}$

donc : $(AK)\parallel(BCG)$

Exercices

Exercice01 : $EABCD$ un pyramide de base le rectangle $ABCD$ et soit I le milieu du segment $[AE]$ et J le milieu du segment $[BC]$



Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires

Exercice02 : $ABCD$ un tétraèdre et soit le point M de l'espace tel que : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$

1)Montrer que $M\in(ABC)$

2) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires

Exercice07: $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle et I le milieu du segment $[BF]$

1) les vecteurs $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont-ils coplanaires ?

2) les vecteurs $\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{HE}$ sont-ils coplanaires ? (Justifier vos réponses)

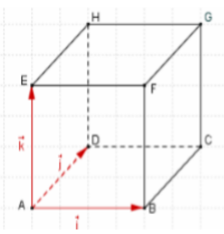
Exercice03 : $ABCD$ un tétraèdre et soit les points K ; L ; M ; N tel que : $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}$ et L le milieu du $[BK]$ et $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=-2\overrightarrow{AD}$

1) écrire les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$

2)Montrer que les points L ; M ; N sont alignés et déterminer la position du point L sur la droite (MN)

3) déterminer les réels α et β tels que : $\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AL}+\beta\overrightarrow{AM}$ et que peut-on dire des points A ; M ; D ; L ?

Exercice04 : $ABCDEFGH$ un cube



On pose : $\overrightarrow{AD}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=\vec{k}$

te $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$

Et $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$ avec I le milieu du segment $[HG]$

1)Montrer que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AI)

2)soit la droite (Δ) passant par le point G et parallèle a (AI) et le point M tel que

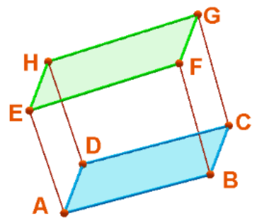
$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BG}$ Montrer que $M\in(\Delta)$

Exercice05 : dans l'espace on considère les points A ; B ; C ; D ; E tel que :

$2\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EB}-5\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{ED}=\vec{0}$

Montrer que les points : A ; B ; C ; D sont coplanaires

Exercice06 : $ABCDEFGH$ un parallélépipède rectangle ou pavé droit et soit le point I de l'espace tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$



1)Montrer que :

$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}=3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG}$ et que

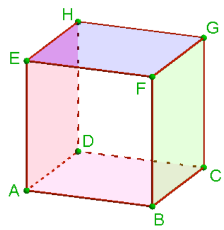
$\overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{ID}$

2)Que peut-on dire des points : I ; B ; D ; E

Exercice07: $ABCDEFGH$ un cube et soient les points :

M et N tels que :

$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$



1)Montrer que :

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

2)Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{AB}$ Sont coplanaires

Exercice08 : $ABCDEFGH$ un cube avec I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$ et K un point tel que : $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AG}$

1) Ecrire les vecteurs $\overrightarrow{EI}$; $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EK}$ en fonction de $\overrightarrow{EA}$; $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$

2) vérifier que : $5\overrightarrow{EK}=2\overrightarrow{EI}+2\overrightarrow{EJ}$

3) En déduire que les points : I ; J ; K ; E sont coplanaires

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.

c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien