

## TD-ENSEMBLES ET APPLICATIONS

### Exercices d'application et de réflexions

**Exercice1** :1)Ecrire en extension les ensembles suivants :  $D_{180} = \{n \in \mathbb{N} / n/180\}$

$$A = \left\{ n \in \mathbb{Z} / \frac{-5}{2} \leq n^2 \leq \frac{3}{2} \right\} ;$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + x + 1 = 0\}$$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des nombres pairs

**Exercice2** :1) Ecrire en extension les ensembles suivants :

$$E_1 = \{k \in \mathbb{Z} / |k+1| \leq 2\}$$

$$E_2 = \{x \in \mathbb{Z} / k^2 \leq 7\}$$

$$E_3 = \{k \in \mathbb{Z} / 7 \leq k^2 \leq 35\}$$

$$E_4 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / (x+y)(x-y) = 32\}$$

$$E_5 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 - y^2 = 15\}$$

$$E_6 = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 0 < 2xy \leq 7\}$$

$$E_7 = \left\{ x \in \mathbb{Z}^* / (\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x} \geq \frac{n}{n+1} \right\}$$

$$E_8 = \{x \in \mathbb{Z} / (\forall n \in \mathbb{N}) x^2 \leq 4 + n^3\}$$

$$E_9 = \{(x; y) \in \mathbb{N}^2 / 0 < 2x \leq y \leq 5\}$$

$$E_{10} = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{p}{q} \text{ et } p; q \in \mathbb{N}^* \text{ Vérifiant } p \leq 3q \leq 11 \right\}$$

2)Ecrire en compréhension l'ensemble Des multiples de 5 dans  $\mathbb{N}$

**Exercice3** : Ecrire en extension les ensembles

$$\text{suivants : } A = \left\{ \cos \left( \frac{\pi}{5} + \frac{n\pi}{6} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{6} \right) : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

**Exercice4** :  $A = \{k \in \mathbb{Z} / |2k+1| \leq 3\}$  et  $B =$

$\{-2, -1, 0, 1\}$

Montrons que :  $A = B$

**Exercice5** : Soit  $E = \{0; 1; 2\}$  déterminer tous les ensembles inclus dans E. Qui s'appelle l'ensemble des parties de E et se note  $\mathcal{P}(E)$ .

**Exercice6** : Ecrire en extension les ensembles suivants : 1)  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$  2)  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a; b\}))$

**Exercice7** : donner Complémentaire des ensembles suivants :  $[a; b[$  l'ensemble  $\mathbb{Q}$

2) l'intervalle  $[a; b[$   $a < b$

**Exercice8** : Soient les ensembles :

$$A = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad B = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\frac{k\pi}{5} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Monter que :  $A \cap B = \emptyset$

**Exercice9** : Soient  $A ; B ; C$  et  $D$  des parties d'un ensemble  $E$

$$\text{Monter que : } \begin{cases} (B-C) \cup A = E \\ (C-D) \cup A = E \end{cases} \Rightarrow (B-D) \subset A$$

**Exercice10** : Soient  $A ; B ; C$  des ensembles

Monter que :  $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$

**Exercice11** : Soient  $A ; B ; C$  des parties d'un ensemble  $E$

Monter que :

$$1) A = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap \bar{C})$$

$$2) (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

$$3) A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C} \Leftrightarrow A \cap B = A \cap C$$

**Exercice12** : Soient  $A ; B ; C$  des parties d'un ensemble  $E$

$$\text{Monter que : } \begin{cases} A \cup B \subset A \cup C \\ A \cap B \subset A \cap C \end{cases} \Rightarrow B \subset C$$

**Exercice13** : Soient  $A ; B ; C$  des parties d'un ensemble  $E$

La différence symétrique de  $A$  et  $B$  c'est l'ensemble Qu'on note :  $A \Delta B$  tel que :  $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$$1) \text{Monter que : } A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$2) \text{Monter que : } \overline{A \Delta B} = A \Delta B$$

$$3) \text{Monter que : } \forall C \in \mathcal{P}(E) : A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C$$

**Exercice14** : Soit l'ensemble :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + xy - 2y^2 + 5 = 0\}$$

1) a) vérifier que :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + xy - 2y^2 = (x - y)(x + 2y)$$

b) Ecrire en extension l'ensemble  $E \cap \mathbb{Z}^2$

c) montrer que :  $E = \left\{ \left( \frac{2t^2 - 5}{3t}; \frac{-t^2 - 5}{3t} \right) / t \in \mathbb{R}^* \right\}$

4) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$$A = \{0; 1; 4; 9; 16; \dots\} \text{ et } B = \left\{ -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots \right\}$$

$$C = \{\dots; -5; -2; 1; 4; 7; \dots\}$$

**Exercice15** : soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $A$  et  $B$  deux parties respectives de  $E$  et  $F$

1) déterminer le complémentaire de  $A \times F$  dans  $E \times F$

2) déterminer le complémentaire de  $E \times F$  dans  $E \times F$

3) déterminer le complémentaire de  $A \times B$  dans  $E \times F$

**Exercice17** : soient l'ensemble :

$$L = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Montrer qu'il n'existe pas deux parties  $A$  et  $B$  de  $\mathbb{R}$  tels que :  $L = A \times B$

**Exercice18** : Soient les ensembles :

$$H = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ y \in \mathbb{R} / y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

1- montrer que :  $H = ]0, 1]$ .

a- Considérer un élément  $y_0 \in H$

et montrer que  $y_0 \in ]0, 1]$

b- Considérer un élément  $y_0 \in ]0, 1]$

et montrer que  $y_0 \in H$

2- Montrer que  $G \subset H$

3- Est-ce que  $G = H$  ?

**Exercice19** : soit  $a$  un nombre réel on considère les deux ensembles suivants :

$$E = \{x \in \mathbb{Z} / |x + 1| \leq 3\} \text{ et } F = \{x \in \mathbb{Z} / |2x - a| \leq 4\}$$

1) Ecrire  $E$  en extension

2) déterminer les valeurs possibles de  $a$  pour lesquelles  $E \cap F = \emptyset$

3) déterminer les valeurs possibles de  $a$  pour lesquelles  $\mathbb{N} \cap F = \emptyset$

4) déterminer les valeurs possibles de  $a$  pour lesquelles  $F \subset \mathbb{N}$

**Exercice20** : on considère dans  $\mathbb{Z}$  les deux parties suivantes :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} \in \mathbb{Z} \right\} \text{ et } B = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x + 10}{x - 5} \in \mathbb{Z} \right\}$$

1) a) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z} - \{5\}) \frac{x + 10}{x - 5} = 1 + \frac{15}{x - 5}$

1) b) montrer que  $(\forall x \in \mathbb{Z}) \frac{4x^2 - 4x + 10}{2x - 1} = 2x - 1 + \frac{9}{2x - 1}$

2) déterminer :  $A ; B ; A - B ; B - A$  et  $A \Delta B$  en extension

3) on admet que l'opération est associative dans l'ensembles des parties de  $\mathbb{Z} : P(\mathbb{Z})$

Résoudre dans  $P(\mathbb{Z})$  l'équation :  $A \Delta X = B$

**Exercice21** : Soient les ensembles :

$$E = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$$

$$F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

1) montrer que :  $F \subset E$

2) déterminer  $y$  de  $\mathbb{R}$  tel que :  $(1; y) \in E$  ; est ce que on a  $E \subset F$  ?

3) montrer que :  $E = F \cup G$  ou  $G$  est un ensemble à déterminer

4) Soient les ensembles :

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 1} = 0\}$$

a) montrer que :  $H = A \cup B$

b) déterminer :  $H \cap F$

**Exercice22** : Soient  $A ; B ; C$  des parties d'un ensemble  $E$

1) a) déterminer une condition suffisante de l'existence de  $X$  dans  $P(E)$  tel que :  $A \cup X = B$

b) résoudre dans  $P(E)$  l'équation :  $A \cup X = B$

2) on suppose que  $C \subset A \subset B$

résoudre dans  $P(E)$  le système :  $\begin{cases} A \cup X = B \\ A \cap X = C \end{cases}$

**Exercice23** : soit les 2 applications :

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \mapsto (-1)^n \quad \text{et} \quad n \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

Est-ce que  $f = g$  ?

**Exercice24** : soit l'application :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$   
 $f : x \mapsto x + \sqrt{x}$

$f$  est-elle injective ?

**Exercice25** : soit l'application :  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $g : x \mapsto x^2 - 1$

$g$  est-elle injective ?

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice26** : 1)  $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

Montrer que  $f$  est injective

2)  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2 + 4$   $g$  est-elle injective ?

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$

2)  $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

- 1- déterminer les images des entiers 1, 2, 3
- 2- Montrer que  $n > m \Rightarrow h(n) > h(m)$
- 3- En déduire que  $h$  est injective.

**Exercice27** : soit l'application :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]-\infty; 3]$   
 $x \mapsto 3 - x^2$

$f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $]-\infty; 3]$ .

**Exercice28** : soit l'application :  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 3 - x^2$

$f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}$  ?

$$f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice29** : 1)  $x \mapsto \frac{3x+1}{x-2}$

- a-  $f$  est-elle surjective de  $\mathbb{R} - \{2\}$  vers  $\mathbb{R}$ .
- b- Modifier l'ensemble d'arrivé pour définir une application surjective.

2)  $f : \mathbb{R} \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

- a- Montrer que la fonction  $g$  est surjective.
- b-  $g$  est-elle injective ?

$h : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q} \cap [1; +\infty[$

3)  $n \mapsto 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$

$h$  est-elle surjective ?

**Exercice30** : soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2 - 5x$

$f$  est-elle une bijection de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  ?

**Exercice31** :  $f : [1; +\infty[ \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

- 1- Montrer que  $f$  est une bijection de  $[1; +\infty[$  vers  $[2; +\infty[$ .
  - 2- Soit  $y$  un élément de  $[2; +\infty[$ , déterminer (en fonction de  $y$ ) l'élément  $x$  dans  $[1; +\infty[$  tel que  $f(x) = y$
- L'application qui lie l'élément  $y$  de  $[2; +\infty[$ , à l'élément unique  $x$  de  $[1; +\infty[$  et solution de l'équation  $f(x) = y$  s'appelle : la bijection réciproque de la bijection  $f$  et se note :  $f^{-1}$

$$f : ]1; +\infty[ \rightarrow ]0; +\infty[$$

**Exercice32** : soit l'application :  $x \mapsto \frac{2}{x-1}$

Montrer que  $f$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice33** : Déterminer la fonction réciproque de la

fonction  $f : [1; +\infty[ \rightarrow [2; +\infty[$   
 $x \mapsto x^2 - 2x + 3$

**Exercice34** : Soit la fonction  $g$  définie par :

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

**Exercice35** : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto 2x^2 - x$

1- Montrer que  $\forall x \in [-1; 1] \quad f(x) \in \left[-\frac{3}{16}; 3\right]$

2- Montrer que :  $\forall y \in \left[-\frac{3}{16}; 3\right] \exists x \in [-1; 1] / (f(x) = y)$

on dit que l'image de l'intervalle  $[-1; 1]$  par

l'application  $f$  est l'intervalle  $\left[-\frac{3}{16}; 3\right]$  et on écrit :

$$f([-1; 1]) = \left[-\frac{3}{16}; 3\right]$$

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice36** : Soit  $(x; y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}$

- 1- Déterminer les couples  $(x, y)$  qui vérifient  $h((x, y)) = 1$
- 2- Représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé les points  $M(x, y)$  qui vérifient  $h((x, y)) = 1$ .

$$f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

**Exercice37** : soit l'application :  $x \mapsto \frac{3x-1}{x+1}$

1) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\} \quad f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$

2) Déterminer :  $f(K)$  avec  $K = ]-\infty; -1[$

**Exercice38** : soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

Déterminer :  $f^{-1}(B)$  avec  $B = [-1; 4]$

**Exercice39** : soit l'application :  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \cos x$

Déterminer :  $f^{-1}(D)$  avec  $D = ]1;2]$

**Exercice40** : Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{3}{1+x^2} \quad \text{déterminer } f^{-1}([1,2]) \quad f^{-1}([1;2])$$

**Exercice41** : Soit l'application :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 3|1-x^2| + x \quad \text{Ecrire l'expression de } f \text{ sur } [-1,1]$$

**Exercice42** : Soit l'application

$$g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3x+1}{x-1} \quad 1- g \text{ est-elle bijective ?}$$

2- A partir de  $g$ , définir une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x + 1}$$

Déterminer la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty;1]$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x - |x| + 3$$

Déterminer la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $]-\infty;0]$

**Exercice45** : soit les applications :

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \quad \text{et} \quad x \mapsto 2|x| - x$$

Est-ce que  $g$  est un prolongement de  $f$  ?

**Exercice46** : 1) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall m \in \mathbb{Z})(E(m+x) = m + E(x)).$$

2) Vérifier par un contre-exemple que :

$$E(x+y) \neq E(x) + E(y) \\ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

3) Soit l'application  $x \mapsto E(3x+1) + x$

1- Vérifier que  $h$  n'est pas injective.

2- Donner la restriction de  $h$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ .

3- Déterminer :  $h^{-1}\{4\}$  et  $h^{-1}\{2\}$ ;  $h$  est-elle surjective ?.

**Exercice47** : Soient les deux applications :

$$f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{x}{x-1}$$

1- Déterminer  $f(g(3))$ ;  $f(g(-1))$   $g(f(3))$

2- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $g(f(x))$  existe.

3- Donner la condition sur  $x$  pour que le réel  $f(g(x))$  existe.

4- Déterminer les application  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

$$h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \left[\frac{1}{4}; +\infty\right[$$

**Exercice48** : soit l'application :

$$x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$$

1) Ecrire l'application  $h$  comme la composée de deux applications  $f$  et  $g$  :  $h = g \circ f$

2) a) Montrer que  $f$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

b) Montrer que  $g$  est une bijection et déterminer sa bijection réciproque

c) en déduire que  $h$  est une bijection de  $\mathbb{R}^+$  dans

$$\left[\frac{1}{4}; +\infty\right[ \text{ et déterminer sa bijection réciproque}$$

**Exercice49** : soient les applications :

$$f : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[ \quad g : ]1; +\infty[ \rightarrow ]1; +\infty[ \\ x \mapsto 1 + \frac{2}{\sqrt{x}-1} \quad \text{et} \quad x \mapsto \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)^2$$

1) Déterminer :  $f([2;4[)$  et  $g^{-1}(\{9\})$

2) Montrer que  $f$  est une bijection de  $]1; +\infty[$  dans

$]1; +\infty[$  et déterminer sa bijection réciproque

3) a) vérifier que :  $\forall x \in ]1; +\infty[ : g(x) = (f(x))^2$

3) b) en déduire que  $g$  est une bijection de  $]1; +\infty[$

dans  $]1; +\infty[$  et déterminer sa bijection réciproque

**Exercice50** : Soient les ensembles :

$$E = \{x \in ]-\pi; 2\pi[ / \tan x = \sqrt{3} : x \in \mathbb{R}\}$$

$$F = \left\{x \in ]-\pi; 2\pi[ / x = \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$G = \left\{x \in ]-\pi; 2\pi[ / x = \frac{\pi}{6} + \frac{k}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$S = \left\{\frac{-5\pi}{3}; \frac{-\pi}{3}; \frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right\}$$

Vérifier que :  $S \subseteq E$  et  $E \subseteq S$  et que  $E = S$  et  $E = G$

Vérifier que :  $\frac{\pi}{8}$  n'est pas un élément de  $E$  et que

$$E \neq F$$

**Exercice51** : Soient  $A = \left\{\frac{5n+8}{8n-1} / n \in \mathbb{N}\right\}$  et

$$B = \left\{\frac{2n+4}{2n-1} / n \in \mathbb{N}\right\}$$

1- Est ce que :  $\frac{17}{3} \in A$  ?  $\frac{43}{25} \in B$  ?  $\frac{42}{37} \in B$  ?

2- montrer que  $\frac{6}{5}$  est un élément commun entre  $A$  et  $B$ .

**Exercice52** : Soit la fonction  $f$  définie par :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$$

$$\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$$

1- Montrer que chaque élément de  $\mathbb{R}$  a une image.

2- l'implication suivante est-elle vraie :

(P)  $(a \neq b) \Rightarrow (f(a) \neq f(b))$ .

3- Montrer que  $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \in \left[ \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]$

4- Montrer que  $(\forall y \in \left[ \frac{-1}{2}; \frac{1}{2} \right]) (\exists x \in \mathbb{R})(f(x) = y)$

**Exercice53** Soient les deux applications suivantes :

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$$

et

$$n \mapsto (-1)^n \times n \quad n \mapsto \begin{cases} n. \text{si } n. \text{pair} \\ -n. \text{si } n. \text{impair} \end{cases}$$

Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N})(f(n) = g(n))$

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

