

## TD- PRODUIT VECTORIEL

### Exercices d'applications

dans tous les exercices l'espace est muni d'un repère orthonormé directe  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

**Exercice1** :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 1 \text{ et } \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$$

Calculer :  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$

**Exercice2** :  $\vec{u}(1;1;1)$  et  $\vec{v}(2;1;2)$  deux vecteurs:

Calculer :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

**Exercice3** :  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  et  $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$

Calculer :  $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

**Exercice4** : on considère les points  $A(0;1;2)$  et

$B(1;1;0)$  et  $C(1;0;1)$

1) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  et vérifier que les points

A et B et C sont non alignés

2) Calculer la surface du triangle  $ABC$

3) Déterminer une équation cartésienne du plan  $(ABC)$

**Exercice5** : L'espace est muni d'un repère orthonormé

Quelle est l'intersection des plans d'équations

respectives  $(P) x - y + 2z + 1 = 0$  et  $(P') 2x + y - z + 2 = 0$

**Exercice6** : calculer la distance du point  $M(-1;0;1)$

à la droite  $(D)$  dont une représentation paramétrique

$$\text{est : } (D) : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 5t \\ z = 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

**Exercice7** : soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe

$(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AE})$  et soit I milieu du segment  $[EF]$  et K

centre de gravité du carré ADHE

1) a) Montrer que  $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit  $\Omega$  un point tel que :  $\overrightarrow{D\Omega} = \overrightarrow{BT}$

2) a) comparer les distances :  $BD$  et  $\Omega T$  et

comparer la surface des triangles  $ABD$  et  $A\Omega T$

2) b) Montrer que  $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{A\Omega} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}$

**Exercice8**: On considère, dans un repère orthonormé, les points:

$A(0, 0, 0)$ ;  $B(2, 1, -1)$  et  $C(1, 1, 1)$ .

1) Calculer  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  et

en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2) Déterminer une équation du plan  $(ABC)$ .

3) Déterminer le rayon de la sphère de centre

$M_k(0, 0, k)$  tangente au plan  $(ABC)$ . Combien y

a-t-il de sphères de rayon 2 parmi celles-

ci? On note S celle correspondant à la plus grande

valeur de k.

4) Déterminer l'ensemble des points  $D(x, y, z)$  vérifiant  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  (on

en donnera une équation paramétrique).

5) Parmi les points de l'ensemble précédent, combien appartiennent au plan  $(ABC)$ ? Que représentent-ils alors?

6) On note désormais  $D(2, -1, 1)$ . Déterminer la distance de D aux trois points A, B et C, ainsi que le projeté orthogonal de D sur  $(ABC)$ , et la distance de D à ce dernier.

7) En déduire le volume du tétraèdre ABCD.

8) Déterminer une équation du plan tangent à S, perpendiculaire à  $(ABC)$  et à  $(BCD)$ .

9. Déterminer une équation paramétrique des hauteurs issues de A et D (droites passant par le point et perpendiculaires à la face opposée) dans le tétraèdre ABCD. Montrer que ces droites sont sécantes en un point H appartenant également à la hauteur issue de B.

10. Déterminer un système d'équations cartésiennes de l'unique droite perpendiculaire simultanément à  $(AD)$  et à  $(BC)$  et vérifier que H appartient à cette droite.

**C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.**

**C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices**

**Que l'on devient un mathématicien**

