TD- PRODUIT VECTORIEL
Exercices d'applications

dans tous les exercices l'espace est muni d'un repère orthonormée directe $\left(0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\right)$

Exercice1 : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que :

$\|\vec{u}\|=1$ et $\|\vec{v}\|=3$ et $\left(\overline{\vec{u};\vec{v}}\right)=\frac{\pi}{3}$

Calculer : $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$

Solution :

$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta=1\cdot3\sin\frac{\pi}{3}=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Exercice2 : $\vec{u}(1;1;1)$ et $\vec{v}(2;1;2)$ deux vecteurs:

Calculer : $\vec{u}\wedge\vec{v}$

Solution :

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\1&2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}-0\vec{j}-\vec{k}=\vec{i}-\vec{k}$

Exercice3 : $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$

Calculer : $\vec{u}\wedge\vec{v}$

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}2&-2\\1&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&3\\2&-2\end{vmatrix}\vec{k}=4\vec{j}-8\vec{k}$

Exercice4 : on considère les points $A(0;1;2)$ et $B(1;1;0)$ et $C(1;0;1)$

1)Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et vérifier que les points A et B et C sont non alignés

2)Calculer la surface du triangle ABC

3)Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

Solution :1) $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

$\overrightarrow{AB}(1;0;-2)$ et $\overrightarrow{AC}(1;-1;-1)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&-1\\-2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&1\\-2&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{k}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ Donc les points A et B et C sont non alignés

2) $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

Donc : $S_{ABC}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

3) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}-1\vec{j}-1\vec{k}$ un vecteur normal du plan ABC

Donc une équation cartésienne du plan ABC est de la forme :

$ax+by+cz+d=0$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(-2;-1;-1)$ donc $a=-2$ et $b=-1$ et $c=-1$

Donc : $-2x-1y-1z+d=0\ (ABC)$

Et on a : $A(0;1;2)\in(P)$ donc : $0-1-2+d=0$

donc $d=3$

Donc (ABC) : $-2x-1y-1z+3=0$

Donc (ABC) : $2x+y+z-3=0$

Exercice5 : L'espace est muni d'un repère orthonormé

Quelle est l'intersection des plans d'équations respectives

$(P)\ x-y+2z+1=0$ et $(P')\ 2x+y-z+2=0$

Solution : $\vec{n}(1;-1;2)$ et $\vec{n'}(2;1;-1)$ deux vecteurs normaux respectivement de (P) et $(P)'$

On a : $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n'}=\begin{vmatrix}-1&1\\2&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}$

Donc : $\vec{u}=\vec{n}\wedge\vec{n'}=-\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}\neq\vec{0}$

les plans (P) et $(P)'$ sont sécants suivant une droite (D)

et $\vec{u}(-1;5;3)$ est un vecteur directeur de (D)

et la droite (D) passe par $A(-1;5;3)$ (il suffit de donner par exemple $z=0$ et résoudre le système et calculer x et y)

Donc : une représentation paramétrique de (D) est $(D):\begin{cases}x=-1+t\\y=5t\\z=3t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

Exercice6 : calculer la distance du point $M(-1;0;1)$ à la droite (D) dont une représentation paramétrique est : (D) :

$$\begin{cases} x=-1+t \\ y=5t \qquad (t\in\mathbb{R}) \\ z=3t \end{cases}$$

Solution : la droite (D) passe par : $A(1;-1;0)$ et $\vec{u}(2;-1;2)$ est un vecteur directeur de (D) et $\overrightarrow{AM}(-2;1;1)$

$$\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+6\vec{j}$$

Donc : $\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\right\|=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$ et $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{4+1+4}=3$

Donc : $d\left(M;(D)\right)=\dfrac{3\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$

Exercice7 : soit ABCDEFGH un cube dans L'espace orienté muni d'un repère orthonormé directe $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)$

Soit I milieu du segment $[EF]$ et K centre de gravité du carré ADHE

1)a)Montrer que $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$

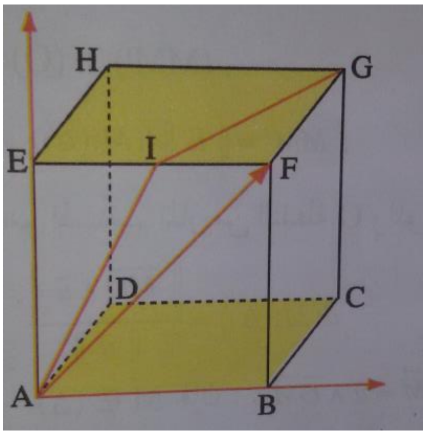
b) En déduire la surface du triangle IGA

2) on suppose que ABCD est un quadrilatère convexe de diagonales qui se coupent en T et soit Ω un point tel que : $\overrightarrow{D\Omega}=\overrightarrow{BT}$

2)a) comparer les distances : BD et ΩT et comparer la surface des triangles ABD et $A\Omega T$

2)b) Montrer que $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$

Solution : 1) a) dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AE}\right)$



On a : $A(0;0;0)$ et $B(1;0;0)$ et $D(0;1;0)$ et $E(0;0;1)$ et $F(1;0;1)$ et $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$ et $I\left(\dfrac{1}{2};0;1\right)$ et $K\left(0;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

donc : $\overrightarrow{BK}\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ et $\overrightarrow{IG}\left(\dfrac{1}{2};1;0\right)$ et $\overrightarrow{IA}\left(-\dfrac{1}{2};0;-1\right)$

$$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{AB}-\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1\end{vmatrix}\overrightarrow{AD}+\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{vmatrix}\overrightarrow{AE}$$

$\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$ cad $\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\left(-1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$

Donc : $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}$

b) $S_{IGA}=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{IG}\wedge\overrightarrow{IA}\right\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

2)a) on a : $\overrightarrow{D\Omega}=\overrightarrow{BT}$ donc $BT\Omega D$ est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{\Omega T}=\overrightarrow{DB}$

Donc $\Omega T=DB$

Soit M la projection orthogonal de A sur la droite (BD) donc (AM) c'est la hauteur des deux triangles ABD et $A\Omega T$ donc :

$S_{ABD}=\dfrac{1}{2}AM\times BD$ et $S_{A\Omega T}=\dfrac{1}{2}AM\times\Omega T$

Et puisque : $\Omega T=DB$ alors $S_{A\Omega T}=S_{ABD}$

2)b) Montrons que $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\left(\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{T\Omega}\right)=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{T\Omega}$

On a : $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AT}=\vec{0}$ car les points A et C et T sont alignés

$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{A\Omega}=\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}$ (car $\overrightarrow{T\Omega}=\overrightarrow{BD}$)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien