

## 1ere S Sciences math BIOF

**EXERCICES AVEC SOLUTIONS FONCTIONS - Généralités**

**Exercice 1 :** Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1)  $f(x) = 3x^2 - x + 1$ . 2)  $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$ .

3)  $f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}$ . 4)  $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$ .

5)  $f(x) = \sqrt{-3x+6}$ . 6)  $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ .

7)  $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$ . 8)  $f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}$ .

9)  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$ . 10)  $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$ .

11)  $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$ . 12)  $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$ .

13)  $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$ .

14)  $f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$ . 15)  $f(x) = \frac{2\sin x}{2\cos x-1}$ .

16)  $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$ .

17)  $f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3}-\sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$

18)  $f(x) = \frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

19)  $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$ .

**Solutions**

1)  $f(x) = 3x^2 - x + 1$

$f$  Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc  $D_f = \mathbb{R}$

2)  $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$ .

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\}$

$2x-4=0$  ssi  $x = \frac{4}{2} = 2$  Donc  $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction  $f$

3)  $f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}$ .

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0\}$

$x^2-4=0$  ssi  $x^2-2^2=0$  ssi  $(x-2)(x+2)=0$

ssi  $x-2=0$  ou  $x+2=0$  ssi  $x=2$  ou  $x=-2$   
donc  $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

4)  $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$ .

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3-2x \neq 0\}$

$x^3-2x=0$  ssi  $x(x^2-2)=0$  ssi  $x=0$  ou

$x^2-2=0$  ssi  $x=0$  ou  $x^2=2$

ssi  $x=0$  ou  $x=\sqrt{2}$  ou  $x=-\sqrt{2}$

donc  $D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

5)  $f(x) = \sqrt{-3x+6}$ .

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\}$

$-3x+6 \geq 0$  ssi  $x \leq 2$  ssi  $x \leq \frac{-6}{-3}$  ssi  $-3x \geq -6$

Donc  $D_f = ]-\infty; 2]$

6)  $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$ .

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-5x-3 \neq 0\}$

$2x^2-5x-3=0$   $a=2$  et  $b=-5$  et  $c=-3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3$  et

$x_2 = \frac{(-5)-\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

Donc  $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$

7)  $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$ .

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-3x+1 \geq 0\}$  soit  $\Delta$  son discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

|        |           |       |     |           |     |
|--------|-----------|-------|-----|-----------|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $1/2$ | $1$ | $+\infty$ |     |
| $P(x)$ | $+$       | $0$   | $-$ | $0$       | $+$ |

$$\text{Donc } D_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[ \cup [1, +\infty[$$

$$8) f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\}$$

$$-9x+3=0 \text{ ssi } x=\frac{1}{3} \text{ ssi } -9x=-3$$

$$x+1=0 \text{ ssi } x=-1$$

|                     |           |      |               |           |
|---------------------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x$                 | $-\infty$ | $-1$ | $\frac{1}{3}$ | $+\infty$ |
| $-9x+3$             | $+$       | $+$  | $0$           | $-$       |
| $x+1$               | $-$       | $0$  | $+$           | $+$       |
| $\frac{-9x+3}{x+1}$ | $-$       | $+$  | $0$           | $-$       |

$$\text{Donc } D_f = \left] -1, \frac{1}{3} \right[$$

$$9) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0 \right\}$$

$$-2x^2+x+3=0 \quad a=-2 \quad \text{et} \quad b=1 \quad \text{et} \quad c=3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

Donc on a deux racines

$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

|             |           |      |       |           |     |
|-------------|-----------|------|-------|-----------|-----|
| $x$         | $-\infty$ | $-1$ | $3/2$ | $+\infty$ |     |
| $-2x^2+x+3$ | $-$       | $0$  | $+$   | $0$       | $-$ |

$$\text{Donc } D_f = \left] -1, \frac{3}{2} \right[$$

$$10) f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1} \quad D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0 \right\}$$

$$x^2+1=0 \text{ ssi } x^2=-1$$

Cette équation n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

$$11) f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$$

$$f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } \sqrt{|x|} \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 0$$

Or on sait que  $|x| \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

$$12) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x \neq 1\}$$

$$D_f = [-2, 1[ \cup ]1, +\infty[$$

$$13) f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f = ]-\infty, 0[$$

$$14) f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$$

$$|2x-4| - |x-1| = 0 \text{ ssi } |2x-4| = |x-1|$$

$$\text{ssi } 2x-4 = x-1 \text{ ou } 2x-4 = -(x-1)$$

$$\text{ssi } 2x-x=4-1 \text{ ou } 2x-4=-x+1$$

$$\text{ssi } x=3 \text{ ou } 2x+x=4+1$$

$$\text{ssi } x=3 \text{ ou } 3x=5 \text{ ssi } x=3 \text{ ou } x=\frac{5}{3}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$$

$$15) f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 \cos x - 1 \neq 0\}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \text{ ssi } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$16) f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0 \text{ et } x^2-x-6 \neq 0 \right\}$$

- On détermine les racines du trinôme

$$-2x^2+2x+13:$$

Le discriminant est  $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$  et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$$

- On détermine les racines du trinôme  $x^2 - x - 6$  :

Le discriminant est  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$  et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \text{ et}$$

$$x_2' = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

- On obtient le tableau de signe :

| $x$                           | $-\infty$ | $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$ | $-2$ | $3$ | $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ | $+\infty$ |   |
|-------------------------------|-----------|-------------------------|------|-----|-------------------------|-----------|---|
| $-2x^2+2x+13$                 | -         | 0                       | +    | +   | +                       | 0         | - |
| $x^2-x-6$                     | +         | +                       | 0    | -   | 0                       | +         | + |
| $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$ | -         | 0                       | +    | -   | +                       | 0         | - |

$$D_f = \left[ \frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right] \cup \left[ 3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \right].$$

$$17) f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} \geq 0 \right\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

On a  $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$  donc

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

| $x$                                         | $-\infty$ | $-2\sqrt{3}$ | $\sqrt{2}$ | $+\infty$ |   |
|---------------------------------------------|-----------|--------------|------------|-----------|---|
| $x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$ | +         | 0            | -          | 0         | + |

On a donc :  $D_f = ]-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

$$18) f(x) = \frac{|x-4| - |x-1|}{x^2 + 2|x| - 3}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2|x| - 3 \neq 0\}$$

$$x^2 + 2|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 = 0 \text{ on pose}$$

$|x| = X$  donc l'équation devient :

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$

Le discriminant est  $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$  et ses solutions sont :

$$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ et } X_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Donc on a :  $|x| = -3$  et  $|x| = 1$

$|x| = -3$  n'a pas de solution

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1$  ou  $x = -1$  donc  $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$19) f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 \geq 0 \text{ et } 3-5x \geq 0\}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{1}{2} \text{ et } x \leq \frac{3}{5} \right\}$$

$$\text{Donc } D_f = \left[ \frac{1}{2}; \frac{3}{5} \right]$$

**Exercice 2 :** Etudier la parité des fonctions suivantes définie par : 1)  $f(x) = 3x^2 - 5$ . 2)

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}. \quad 2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1}. \quad 4) f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}. \quad 6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}.$$

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}. \quad 8) f(x) = \frac{x}{x-2}$$

**Solutions :**

1) Soit  $f$  une fonction tq :  $f(x) = 3x^2 - 5$

Donc  $D_f = \mathbb{R}$  car  $f$  est une fonction polynôme

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction paire,

$$2) f(x) = \frac{3}{x}$$

on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$

donc  $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$- f(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction impaire,

$$3) f(x) = 2x^3 + x^2$$

$h$  est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc  $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$

$$- f(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$$

$$- f(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction ni paire ni impaire,

$$3) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$- f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction impaire,

$$4) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$- f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x} = \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$- f(-x) \neq -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction ni paire ni impaire,

$$5) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ , alors  $-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$- f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction paire

$$6) f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \geq 0\}$$

$$1 - x^2 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

|           |           |      |     |           |
|-----------|-----------|------|-----|-----------|
| $x$       | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
| $1 - x^2$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       |

$$\text{Donc } D_f = [-1, 1]$$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in [-1, 1]$ , alors

$$-x \in [-1, 1]$$

$$- f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction paire

$$7) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \neq 0\}$$

$$x^2 + 5 = 0 \text{ ssi } x^2 = -5 \text{ pas de solutions}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$

$$- f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3}{x^2 + 5}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction impaire

$$8) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4 \geq 0\}$$

Or on sait que  $2x^2 \geq 0$  Pour tout réel  $x$ , donc

$$2x^2 + 4 \geq 0 + 4 \text{ donc } 2x^2 + 4 \geq 4 \geq 0$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}$ , alors  $-x \in \mathbb{R}$

$$- f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction paire

$$9) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \quad \text{Donc}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

On a  $2 \in \mathbb{R}^+$  mais  $-2 \notin \mathbb{R}^+$  Donc  $f$  est une fonction ni paire ni impaire

$$8) f(x) = \frac{x}{x-2}$$

$$\text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x - 2 \neq 0 \text{ ssi } x \neq 2$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\text{on a } -2 \in D_f \text{ mais } -(-2) = 2 \notin D_f$$

Donc  $D_f$  n'est pas symétrique par rapport à  $O$

Donc  $f$  est une fonction ni paire ni impaire

**Exercice 3 :** Soit la fonction définie par :

$$5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x \text{ Pour tout réel } x$$

1) montrer que  $f$  est une fonction impaire

2) donner une expression de  $f(x)$  Pour tout réel  $x$

**Solution :** soit  $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a } 5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x \quad (1)$$

Pour tout réel  $x$

On remplaçant  $x$  par  $-x$  on trouve :

$$5f(-x) + f(x) = 2(-x)^3 - 3(-x)$$

$$\text{Donc : } 5f(-x) + f(x) = -2x^3 + 3x \quad (2)$$

(1) + (2) donne :  $6(f(-x) + f(x)) = 0$  donc :

$$f(-x) + f(x) = 0$$

$$\text{donc : } f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc  $f$  est une fonction impaire

$$2) \text{ on a : } 5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$$

Et puisque  $f$  est une fonction impaire donc :

$$5f(x) - f(x) = 2x^3 - 3x$$

$$4f(x) = 2x^3 - 3x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x$$

**Exercice 4 :** Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{|x|+1}{2|x|-3} \text{ et } (C_f) \text{ la courbe de } f \text{ Dans le}$$

repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormé

Montrer que  $(C_f)$  symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

$$\text{Solution : } D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2|x|-3 \neq 0\} = \left\{x \in \mathbb{R} / |x| \neq \frac{3}{2}\right\}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

Il suffit de montrer que  $f$  est une fonction paire

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$  alors

$$-x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

$$- f(-x) = \frac{|-x|+1}{2|-x|-3} = \frac{|x|+1}{2|x|-3} = f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction paire

Par suite la  $(C_f)$  symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

**Exercice 5 :** étudier les variations des fonctions définies par : 1)  $f(x) = 7x - 5$  2)  $g(x) = \frac{2}{x}$

**Solution : 1)**  $f$  est une fonction polynôme donc

$$D_f = \mathbb{R}$$

Soit  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 < x_2$

Donc  $7x_1 < 7x_2$  car  $7 > 0$

$$\text{Donc } 7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$$

Alors  $f(x_1) < f(x_2)$  d'où  $f$  que est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $g$  une fonction tq :  $g(x) = \frac{2}{x}$

$$g(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0 \text{ Donc } D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

a) Soit  $x_1 \in [0; +\infty[$  et  $x_2 \in [0; +\infty[$  tq  $x_1 < x_2$

$$\text{Donc } \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \text{ Donc } \frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2} \text{ car } 2 > 0$$

Alors  $f(x_1) > f(x_2)$  d'où  $f$  que est strictement décroissante sur  $[0; +\infty[$

b) Soit  $x_1 \in ]-\infty; 0]$  et  $x_2 \in ]-\infty; 0]$  tq  $x_1 < x_2$

$$\text{Donc } \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \text{ Donc } \frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2} \text{ car } 2 > 0$$

Alors  $f(x_1) > f(x_2)$  d'où  $f$  que est strictement décroissante sur  $] -\infty; 0]$

**b) tableau de variation :**

| $x$    | $-\infty$                                                                            | $0$                                                                                   | $+\infty$ |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| $f(x)$ |  |  |           |

**Exercice 6 :** étudier les variations de la fonction définie par:  $f(x) = 3x^2 + 2$

$$\text{Solution : } D_f = \mathbb{R}$$

soient  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 \neq x_2$  on a :

$$T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2)$$

a) Soit  $x_1 \in [0; +\infty[$  et  $x_2 \in [0; +\infty[$

$$\text{Donc } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \text{ Donc } x_1 + x_2 \geq 0$$

$$\text{Donc } 3(x_1 + x_2) \geq 0 \text{ car } 3 > 0$$

$$\text{Donc } T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$$

d'où  $f$  que est croissante sur  $[0; +\infty[$

b) Soit  $x_1 \in ]-\infty; 0]$  et  $x_2 \in ]-\infty; 0]$

$$\text{Donc } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 \text{ Donc } x_1 + x_2 \leq 0$$

$$\text{Donc } 3(x_1 + x_2) \leq 0 \text{ car } 3 > 0$$

Donc  $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où  $f$  que est décroissante sur  $]-\infty; 0]$

b) **résumé : tableau de variation :**

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$$

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | $2$ |           |

**Exercice 7 :** étudier les variations de la fonction

définie par :  $g(x) = \frac{x}{x+1}$

**Solution :**  $g(x) = \frac{x}{x+1}$  on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi

$$x+1 \neq 0 \text{ ssi } x \neq -1$$

Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient  $x_1 \in D_g$  et  $x_2 \in D_g$  tq  $x_1 \neq x_2$  on a :

$$T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) sur  $I = ]-\infty; -1[$

Soit  $x_1 \in ]-\infty; -1[$  et  $x_2 \in ]-\infty; -1[$   $x_1 \neq x_2$

Donc  $x_1 < -1$  et  $x_2 < -1$  Donc  $x_1 + 1 < 0$  et

$x_2 + 1 < 0$  Donc  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

Donc  $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$  sur

$$I = ]-\infty; -1[$$

d'où  $g$  que est strictement croissante sur

$$I = ]-\infty; -1[$$

b) sur  $J = ]-1; +\infty[$

Soit  $x_1 \in ]-1; +\infty[$  et  $x_2 \in ]-1; +\infty[$   $x_1 \neq x_2$

Donc  $x_1 > -1$  et  $x_2 > -1$  Donc  $x_1 + 1 > 0$

et  $x_2 + 1 > 0$  Donc  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

Donc  $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$

sur  $J = ]-1; +\infty[$

d'où  $g$  que est strictement croissante sur

$$J = ]-1; +\infty[ \text{ tableau de variation :}$$

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |      |           |

**Exercice 8 :** Soit  $f$  une fonction : tq :  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer  $D_f$  et étudier la parité de  $f$

2) Calculer Le taux d'accroissement  $T(x_1; x_2)$  de  $f$  entre  $x_1$  et  $x_2$  deux éléments de  $D_f$

tq  $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de  $f$  sur  $I = ]0; 1]$  puis sur  $J = [1; +\infty[$

4) En déduire les variations de  $f$  sur  $D_f$

5) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$

**Réponses :** 1) on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$  Donc

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel  $x$ , si  $x \in \mathbb{R}^*$ , alors  $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc  $f$  est une fonction impaire,

$$\begin{aligned} 2) f(x_1) - f(x_2) &= \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} \\ &= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

a) sur  $I = ]0; 1]$  Soit  $x_1 \in ]0; 1]$  et  $x_2 \in ]0; 1]$

Donc  $0 < x_1 \leq 1$  et  $0 < x_2 \leq 1$   $x_2 + 1 < 0$

Donc  $0 < x_1 x_2 \leq 1$  et  $x_1 \neq x_2$  Donc  $x_1 x_2 - 1 < 0$

et on a  $0 < x_1 x_2$  Donc  $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} < 0$

d'où  $f$  que est strictement décroissante sur  $I = ]0; 1]$

b) sur  $J = [1; +\infty[$  Soit  $x_1 \in [1; +\infty[$  et  $x_2 \in [1; +\infty[$

Donc  $x_1 \geq 1$  et  $x_2 \geq 1$  Donc  $x_1 x_2 \geq 1$  et

$x_1 \neq x_2$  Donc  $x_1 x_2 > 1$  Donc  $x_1 x_2 - 1 > 0$

et on a  $0 < x_1 x_2$  Donc  $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} > 0$

d'où  $f$  qui est strictement croissante sur  $J = [1; +\infty[$

3)  $f$  est impaire et le symétrique de  $I = ]0; 1]$  est l'intervalle  $I' = [-1; 0[$  et le symétrique de

$J = [1; +\infty[$  est l'intervalle  $J' = ]-\infty; -1]$

Donc :  $f$  est strictement décroissante sur  $I$

Donc  $f$  est strictement décroissante sur  $I'$

$f$  est strictement croissante sur  $J$  Donc  $f$  est strictement croissante sur  $J'$

5) le tableau de variations de  $f$  sur  $D_f$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 2$$

| $x$                  | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|----------------------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| Variations de $f(x)$ |           | $-2$ |     | $2$ |           |

$$f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$$

**Exercice 9 :** étudier les variations des fonctions définies par: 1)  $k(x) = \frac{6}{x}$  2)  $f(x) = x^2$  et

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 \text{ et } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$$

**Réponses :**

1) soit la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :

On sait que la fonction  $v: x \rightarrow \frac{1}{x}$  est

décroissante sur  $[0; +\infty[$  et puisque  $6 > 0$  donc la fonction  $k = 6v$  est aussi décroissante sur  $[0; +\infty[$

$$2) f(x) = x^2 \text{ et } g(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad D_f = D_g = \mathbb{R}$$

On a  $a = -\frac{1}{2} < 0$  Donc alors les fonctions  $f$  et

$g$  ont des variations opposées sur  $\mathbb{R}$

$g$  et  $h$  ont les mêmes variations sur  $\mathbb{R}$

| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $f(x)$ | $+\infty$ | $0$ | $+\infty$ |

| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $g(x)$ |           | $0$ |           |

**Exercice 10 :** Les fonctions  $f$  et  $g$  définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

**Réponse :**

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour  $f$ , on doit avoir :  $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$  et  $x-1 \neq 0$

donc ce qui donne  $D_f = ]-\infty; -3[ \cup [1; +\infty[$

Pour  $g$ , on doit avoir  $x-1 \geq 0$  et  $x+3 > 0$

ce qui donne  $D_g = [1; +\infty[$

On a donc  $D_f \neq D_g$ . Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit :  $f \neq g$

On remarquera cependant que sur  $[1; +\infty[$  on a  $f(x) = g(x)$

**Exercice 11 :** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions numériques tel que:  $f(x) = x+1$  et

$$g(x) = x^2 + x + 2$$

Comparer les fonctions  $f$  et  $g$

**Solution :**  $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) - f(x) = x^2 + x + 2 - (x+1) = x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc :  $f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc  $f < g$

**Exercice 12 :** Soit  $f$  et  $g$  les fonctions

numériques tel que:  $f(x) = x$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$

Comparer les fonctions  $f$  et  $g$

**Exercice 13 :** Soient les deux

$$\text{fonctions : } f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2}} \text{ et } g(x) = \frac{1 + 3x^2}{|x|}$$

Comparer les fonctions  $f$  et  $g$

**Solution :**

- on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$  et  $x \neq 0$

or on sait que  $x^2 \geq 0$  donc  $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

alors  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$  donc  $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $|x| \neq 0$  ssi  $x \neq 0$

donc  $D_g = \mathbb{R}^*$

alors  $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que  $\sqrt{x^2} = |x|$  et  $3x^2 + 1 = 1 + 3x^2$  donc

$f(x) = g(x)$

donc finalement on a trouvé que :  $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

et  $f(x) = g(x)$

Donc :  $f = g$ .

**Exercice 14 :** Soient les deux

fonctions :  $h(x) = \frac{x^2 - x}{x}$  et  $t(x) = x - 1$

Comparer les fonctions  $f$  et  $g$

**Solution :**

- on a  $h(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x \neq 0$  donc  $D_h = \mathbb{R}^*$

- on a  $t(x)$  est un polynôme donc  $D_t = \mathbb{R}$   
donc  $f \neq g$

**Exercice 15 :** Soit  $f$  la fonction numérique tel

que :  $f(x) = \frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$

Etudier le signe de la fonction  $f$

**Solution :**  $4x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$  et  $x \neq \frac{1}{2}$

Donc :  $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

| $x$                          | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $2$ | $+\infty$ |     |
|------------------------------|-----------|----------------|----------------|---------------|-----|-----------|-----|
| $3x+1$                       | $-$       | $-$            | $0$            | $+$           | $+$ | $+$       |     |
| $2-x$                        | $+$       | $+$            | $+$            | $+$           | $0$ | $-$       |     |
| $2x-1$                       | $-$       | $-$            | $-$            | $0$           | $+$ | $+$       |     |
| $2x+1$                       | $-$       | $0$            | $+$            | $+$           | $+$ | $+$       |     |
| $\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$ | $-$       | $+$            | $0$            | $-$           | $+$ | $0$       | $-$ |

$f(x) \geq 0$  ssi  $x \in \left] -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{1}{2}; 2 \right]$  donc  $f \geq 0$

$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{1}{2}; 2 \right]$

$f(x) \leq 0$  ssi  $x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[ \cup \left[ -\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right[ \cup [2; +\infty[$

**Exercice 16 :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x^2 + x$

Démontrer que  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ .

**Solution :** On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -\left(x^2 - x\right) = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

On a :  $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$  donc  $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$

donc :  $f(x) \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La fonction  $f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = \frac{1}{4}$

**Exercice 17 :** Montrer que la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = 4\sin x - 3$  est Bornée.

**Solution :** On a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$  donc  $-4 \leq 4\sin x \leq 4$

donc  $-4 - 3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4 - 3$

donc  $-7 \leq g(x) \leq 1$   $g$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 18 :** Soit  $f$  une fonction numérique

tel :  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

1) Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que  $f$  est majorée sur  $\mathbb{R}$ .

3) Démontrer que  $f$  est minorée sur  $\mathbb{R}$ .  
Conclure

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$  pas de solution dans  $\mathbb{R}$   
donc  $D_f = \mathbb{R}$

2) On a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$  donc  $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc  $x^2 + 1 \geq 1$  donc  $\frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$

donc  $f(x) \leq 1$  par suite  $f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = 1$

2) On a  $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$  donc  $x^2 + 1 \geq 0 + 1$

Donc  $x^2 + 1 \geq 1$  donc  $x^2 + 1 > 0$

Donc :  $0 < f(x)$

par suite  $f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}$  par  $m = 0$

conclusion :  $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 19 :** Soit  $f$  une fonction numérique

tel :  $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3}$

1) Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que  $f$  est minorée par 1.

3) Démontrer que  $f$  est majorée par  $\frac{7}{3}$ . Conclure

**Solution :** 1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$

$\Delta = -3 < 0$  pas de solution dans  $\mathbb{R}$  donc  $D_f = \mathbb{R}$

2) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7 - (x^2 + 3x + 3)}{x^2 + 3x + 3} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3}$$

$$f(x) - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3} \text{ or } x^2 + 3x + 3 > 0 \text{ car } \Delta = -3 < 0$$

(signe de  $a=1$ )

Et on a :  $(x+2)^2 \geq 0$  donc  $f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}$  par  $m=1$

2) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \frac{7}{3} = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - \frac{7}{3} = \frac{-x^2}{3(x^2 + 3x + 3)} \leq 0$$

par suite  $f$  est majorée par  $\frac{7}{3}$ .

conclusion :  $1 < f(x) \leq \frac{7}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 20 :** Soit  $f$  une fonction numérique

$$\text{tq : } f(x) = \frac{x-1}{x^2 + x + m} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

1) déterminer les valeurs de  $m$  pour que  $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit  $g$  la fonction numérique tq :

$$g(x) = \frac{1}{x+2} \text{ déterminer les valeurs de } m \text{ pour}$$

que  $\forall x \in \{-2; 1\}$  on a :  $f(x) = g(x)$

**Solution :**

$$1) D_f = \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + m \neq 0$$

$$x^2 + x + m \neq 0 \text{ ssi } \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4m < 0$$

$$\text{Ssi } m > \frac{1}{4}$$

$$2) f(x) = g(x) \quad \forall x \in \{-2; 1\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{x^2 + x + m} = \frac{1}{x+2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = x^2 + x + m \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = x^2 + x + m$$

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \{-2; 1\} \Leftrightarrow -2 = m$$

**Exercice 21 :** Soit  $f$  une fonction numérique

$$\text{tq : } f(x) = 5x^2 + 3$$

Montrer que  $f$  admet un minimum absolue sur  $\mathbb{R}$  que l'on déterminera

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R}$

On a pour tout  $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$  Donc  $5x^2 \geq 0$  car  $5 > 0$

Par suite  $5x^2 + 3 \geq 3$  et on a  $f(0) = 3$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(0)$

d'où  $f(0) = 3$  est un minimum absolue de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 22 :** Soit  $g$  une fonction numérique

$$\text{tq : } g(x) = -4x^2 + 1$$

Montrer que  $g$  admet un maximum absolue sur  $\mathbb{R}$  que l'on déterminera

**Solution :**  $D_g = \mathbb{R}$

On a pour tout  $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$  Donc  $-4x^2 \leq 0$  car  $-4 < 0$

Par suite  $-4x^2 + 1 \leq 1$  et on a  $g(0) = 1$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq g(0)$

d'où  $g(0) = 1$  est un maximum absolue de  $g$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 23 :** Soit  $f$  une fonction numérique

$$\text{tq : } f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

1°a) montrer que  $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

b) montrer que  $f(x) \leq 6$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

2° calculer :  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  et en déduire les

extrémums de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Réponses:** 1°a) on a  $D_f = \mathbb{R}$

$$6 - (2x - 1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$$

$$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$$

$$\text{Donc : } f(x) = 6 - (2x - 1)^2$$

b) Donc pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a  $(2x - 1)^2 \geq 0$

Par suite  $-(2x - 1)^2 \leq 0$  donc  $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$

Donc pour tout  $x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 6$

$$2^\circ \text{ on a } f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1 - 1)^2 = 6$$

on a pour tout  $x \in \mathbb{R} \quad 6 - (2x - 1)^2 \leq 6$  alors

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$  est un maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 24 : Du tableau de variation**

|        |    |     |   |    |
|--------|----|-----|---|----|
| $x$    | -5 | -2  | 2 | 5  |
| $f(x)$ | 5  | 0,5 | 2 | -2 |

Déduire les extrêmes de  $f$

**Solution :**

Du tableau de variation on a :

Le nombre 2 est une valeur maximale de  $f$  au point  $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de  $f$  au point  $x_0 = -2$

**Exercice 25 :** Soit  $f$  une fonction numérique

tq :  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Montrer que 1 est le maximum absolu de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R}$

Montrons donc que :  $f(x) \leq 1$  et que l'équation

$f(x) = 1$  admet une solution dans  $\mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = -x^2 + 4x - 3 - 1 = -x^2 + 4x - 4$$

$$f(x) - 1 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x - 2)^2 \leq 0$$

Donc  $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  et on a :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow -(x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Donc l'équation  $f(x) = 1$  admet une solution dans  $\mathbb{R}$

Et on a :  $f(2) = 1$  donc :  $f(x) \leq f(2) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

que  $f(2) = 1$  est le maximum absolue de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 26 :** Soit  $f$  une fonction numérique

tq :  $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$

1) Déterminer  $D_f$

2) a) Démontrer que  $f$  est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de  $f$  ?

3) a) Démontrer que  $f$  est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de  $f$  ?

**Solution :**

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$  pas de solution dans  $\mathbb{R}$  donc  $D_f = \mathbb{R}$

2) a) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 3 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 = \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 3 = \frac{-x^2}{x^2 + 1} \leq 0 \text{ par suite } f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f$  est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = 3$

b) on remarque que :  $f(0) = 3$

donc  $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de  $f$

2) a) soit  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 2 = \frac{1}{x^2 + 1} > 0 \text{ par suite :}$$

$$0 < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

par suite  $f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}$  par  $m = 2$

b) on remarque que :  $f(x) > 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de  $f$

conclusion :  $2 < f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 27 :** Soit  $f$  une fonction numérique

définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

1) étudier le signe de  $f$

2) a) Démontrer que  $f$  est majorée par  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

b) est ce que  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  est une valeur maximale de  $f$  ?

**Solution :** 1) soit  $x \in ]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$f(x) = \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} > 0$$

Donc  $f(x) > 0$  si  $x \in ]1; +\infty[$

2) a)  $x \in ]1; +\infty[$  montrons que  $f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

soit  $x \in ]1; +\infty[$  donc  $x > 1$  cad  $x+1 > 2$

donc  $\sqrt{x+1} > \sqrt{2}$  donc  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2} > 2\sqrt{2}$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

donc  $f(x) < \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in ]1; +\infty[$

f est donc majorée sur  $\mathbb{R}$  par  $M = 3$

conclusion :  $2 < f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) on remarque que :  $f(0) = 3$

donc  $f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur  $]1; +\infty[$  par  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque  $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in ]1; +\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  N'est pas une valeur maximale de f

**Exercice 28 :** Soit f une fonction numérique

définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que -1 est la valeur minimal de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est-ce que 1 est une valeur maximale de f ?

**Solution : 1)**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} + 2 \neq 0 \text{ et } x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq -2 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

2) Montrons donc que :  $f(x) \geq -1$  et que

l'équation  $f(x) = -1$  admet une solution dans  $\mathbb{R}^+$

$$f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} + 1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \geq 0$$

Donc  $f(x) \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$  et on a :

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc l'équation  $f(x) = -1$  admet une

solution dans  $\mathbb{R}^+$

Et on a :  $f(0) = -1$  donc :  $f(x) \geq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On dit que  $f(0) = -1$  est le minimum absolue de f sur  $\mathbb{R}^+$

$$3) \text{ soit } x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} - 1 = \frac{-4}{\sqrt{x}+2} < 0$$

Donc  $f(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc f est donc majorée sur  $\mathbb{R}^+$  par  $M = 1$

Et puisque  $f(x) = 1$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

f est donc bornée sur  $]1; +\infty[$  par  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque  $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in ]1; +\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$  n'est pas une valeur maximale de f

**Exercice 28 :** Soit f une fonction numérique tel que :  $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1)a) Démontrer que f est minorée.

b) est ce que f admet une valeur minimale ?

2) Démontrer que f est non majorée.

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R}$

$$1)a) \quad f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x-1)^2 + 2$$

$$\text{Donc } f(x) - 2 = (x-1)^2 \geq 0$$

donc :  $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$  donc que f est minorée par 2

et on a :  $f(1) = 2$  donc :  $f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 + 2 \leq M$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 \leq M - 2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x-1)^2} \leq \sqrt{M-2} \quad (\text{on peut toujours supposer } M \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq \sqrt{M-2}$$

$$\text{Donc on a : } -\sqrt{M-2} \leq x-1 \leq \sqrt{M-2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc on a : } -\sqrt{M-2} + 1 \leq x \leq \sqrt{M-2} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ absurde}$$

Donc f est non majorée

**Exercice 29 :** Soit f une fonction numérique

$$\text{tq : } f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

étudier les variations de f et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

la courbe  $(C_f)$  de f

**Solution :** on a f est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

On a  $a = 2$  et  $b = -4$  et  $c = -2$

$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1 \quad \text{et} \quad (f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x-1)^2 - 4$$

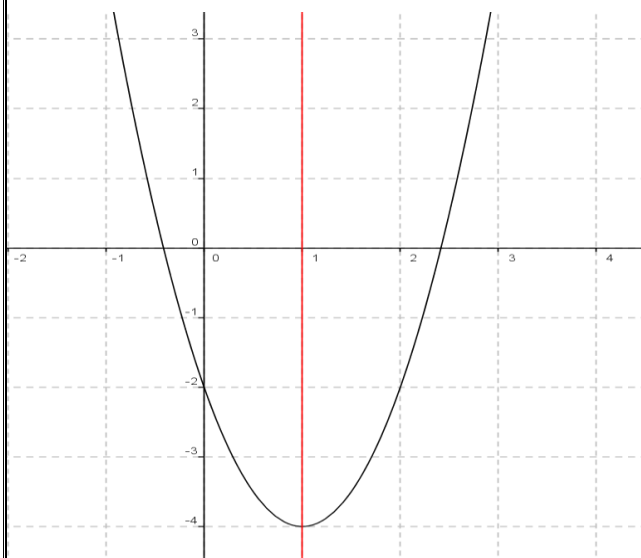
Soit  $W(1; -4)$  Donc dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  :

la courbe  $(C_f)$  c'est une parabole de sommet  $W(1; -4)$  et d'axe de symétrie la droite  $x = 1$

Tableau de variations de  $f$

On a  $a = 2 > 0$  donc :

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 1    | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | $-4$ |           |



$W(1; -4)$

**Exercice 30 :** Soit  $g$  une fonction numérique

$$tq : g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

étudier les variations de  $g$  et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_g)$  de  $g$

**Solution :**  $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

on a  $g$  est une fonction polynôme donc  $D_g = \mathbb{R}$

On a  $a = -\frac{1}{2}$  et  $b = 2$  et  $c = 1$  ( $g(x) = ax^2 + bx + c$ )

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = 2 \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4+2}{-2} = 3$$

Donc pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  on peut écrire sous la

$$\text{forme : } g(x) = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$

$$\left( g(2) = -\frac{1}{2}(2-2) + 3 = 3 \right)$$

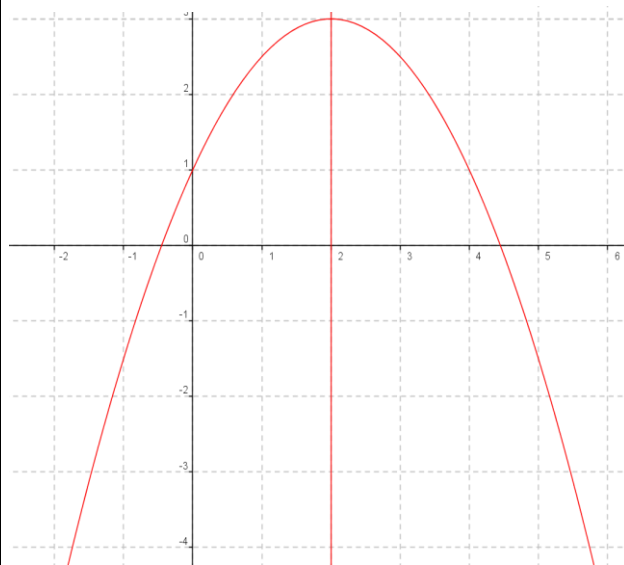
Soit  $W(2; 3)$  Donc dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$  la

courbe  $(C_g)$  c'est une parabole de sommet  $W(2; 3)$  et d'axe de symétrie la droite  $x = 2$

Tableau de variations de  $g$

On a  $a = -\frac{1}{2} < 0$  donc :

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | 3 |           |



**Exercice 31** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$

la courbe  $(C_f)$  de  $f$

**Solution :**

on a  $f(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-1 \neq 0$  ssi  $x \neq 1$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$$

• Donc le tableau de variations de

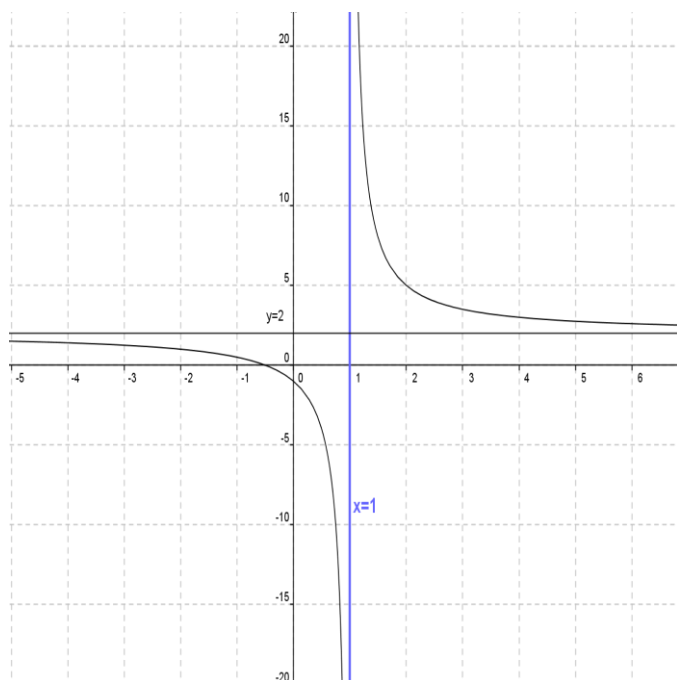
$$x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-1}$$

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |   |           |

- Représentation graphique

$(C_f)$  est l'hyperbole de centre  $W(1;2)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x=1$  et  $y=2$

|    |               |    |   |   |               |   |
|----|---------------|----|---|---|---------------|---|
| -2 | 1-            | 0  | 1 | 2 | 3             | 4 |
| 1  | $\frac{1}{2}$ | -1 |   | 5 | $\frac{7}{2}$ | 3 |



**Exercice 32 :** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$g(x) = \frac{-x}{x-2}$  étudier les variations de  $g$  et dresser le tableau de variation et tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_g)$  de  $g$

**Solution :** on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-2 \neq 0$  ssi  $x \neq 2$

Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

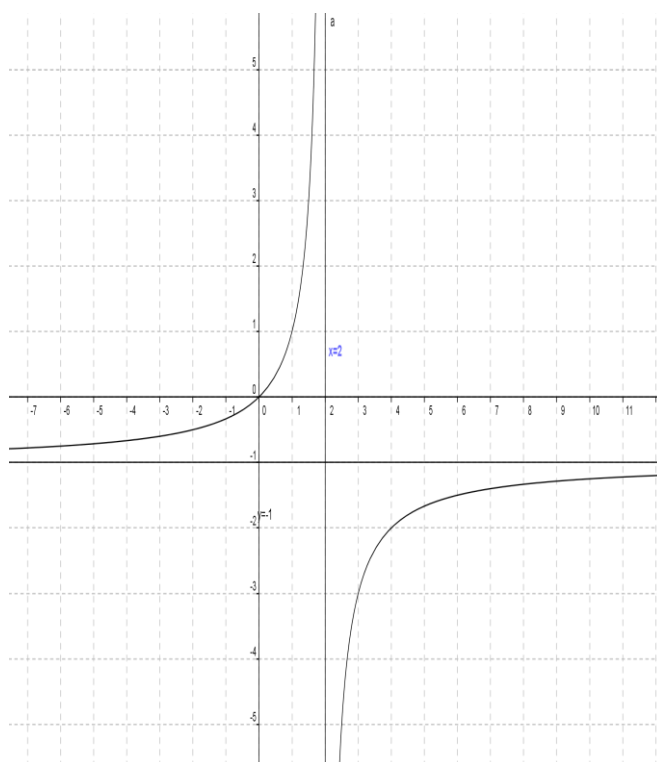
- Donc le tableau de variations

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |   |           |

- Représentation graphique

$(C_f)$  est l'hyperbole de centre  $W(2;-1)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x=2$  et  $y=-1$

|      |   |   |   |    |    |      |
|------|---|---|---|----|----|------|
| -1   | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5    |
| -1/3 | 0 | 1 |   | -3 | -2 | -5/3 |



**Exercice 33 :** Soit  $f$  une fonction numérique

définie par :  $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

- 1) Déterminer  $D_f$
- 2) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation
- 3) tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_f)$  de  $f$

**Solutions :** 1)  $D_f = x \in \mathbb{R}$

2) soient  $x_1 \in \mathbb{R}$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$  tq  $x_1 < x_2$

Donc :  $x_1^3 < x_2^3$  Donc :  $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

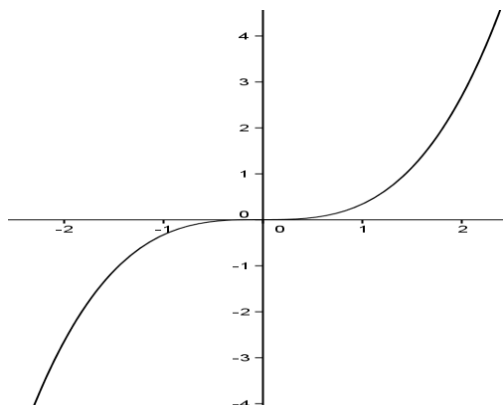
Donc :  $f(x_1) < f(x_2)$

Donc  $f$  est strictement croissante

Tableau de variation

|        |           |           |
|--------|-----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |           |

|        |     |    |      |   |     |   |     |
|--------|-----|----|------|---|-----|---|-----|
| $x$    | -3  | -2 | -1   | 0 | 1   | 2 | 3   |
| $f(x)$ | 6.5 | -2 | -1/4 | 0 | 1/4 | 2 | 6.5 |



**Exercice 34 :** Soit  $f$  une fonction numérique

définie par :  $f(x) = \sqrt{x+2}$

1) Déterminer  $D_f$

2) étudier les variations de  $f$  et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  la courbe  $(C_f)$  de  $f$

**Solutions : 1)**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x + 2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$$

2) soient  $x_1 \in [-2; +\infty[$  et  $x_2 \in [-2; +\infty[$  tq  $x_1 < x_2$

$$\text{Donc : } x_1 + 2 < x_2 + 2 \text{ Donc : } \sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$$

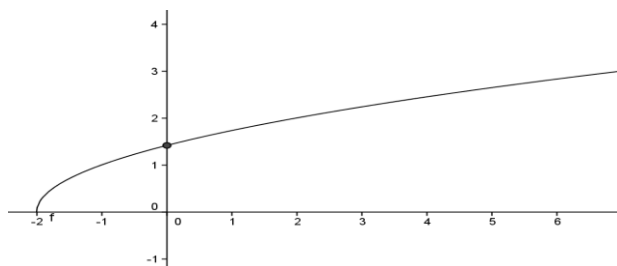
$$\text{Donc : } f(x_1) < f(x_2)$$

Donc  $f$  est strictement croissante

Tableau de variation :

|        |    |           |
|--------|----|-----------|
| $x$    | -2 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | 0  | $+\infty$ |

|        |    |    |            |   |   |
|--------|----|----|------------|---|---|
| $x$    | -2 | -1 | 0          | 2 | 7 |
| $f(x)$ | 0  | 1  | $\sqrt{2}$ | 2 | 3 |



**Exercice 35 :** calculer

$$E(4, 2); E(-3, 75); E(\sqrt{3}); E\left(\frac{1}{2}\right); E(\pi)$$

$$E\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 + E\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{Solutions : } E(4, 2) = 4 \quad E(-3, 75) = -4$$

$$E(\sqrt{3}) = 1; \quad E\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\text{on a : } 3 \leq \pi < 4 \text{ donc } E(\pi) = 3$$

$$2) \text{ on a : } E\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 + E\left(\frac{1}{n}\right) \text{ or } 0 \leq \frac{1}{n} < 1 \text{ donc}$$

$$E\left(\frac{1}{n}\right) = 0 \quad \text{Par suite : } E\left(3 + \frac{1}{n}\right) = 3 + 0 = 3$$

**Exercice 36 :** Soit les fonctions  $f$  et  $g$

tel que :  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  et  $g(x) = 2x + 1$

Déterminer :  $g \circ f$  et  $f \circ g$

**Solution :** on a :  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = \mathbb{R}$  donc

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ et } D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2(2x + 1) + 3$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 3 = 4x^2 + 2$$

**Exercice 37 :** Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies

par :  $f(x) = 3x + 4$  et  $g(x) = \frac{1}{x+1}$

1) Déterminer  $D_{g \circ f}$

2) déterminer :  $(g \circ f)(x)$

**Solution : 1)**  $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

On a  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$  donc

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \neq -1\}$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow 3x + 4 = -1 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} = x$$

$$\text{donc : } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

2) on a :  $D_f = \mathbb{R}$  et  $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{et } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 4) = \frac{1}{3x + 4 + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x+5}$$

**Exercice 38 :** Soit les fonctions  $f$  et  $g$  définies

par :  $g(x) = \frac{x}{x+2}$  et  $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

On pose :  $h(x) = (g \circ f)(x)$

1) Déterminer  $D_h$  2) déterminer :  $h(x)$

3) Soit la fonction  $k$  définie par :  $k(x) = \frac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions  $h$  et  $k$  sont-elles égales ?

**Solution :** 1) on a :  $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$  et

$$D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g \right\}$$

$$D_{g \circ f} = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } f(x) \neq -2 \right\}$$

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} = -2$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) = x+3 \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$\text{donc : } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3}; -1 \right\}$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$$

$$h(x) = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1} + 2} = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3+2x+2}{x+1}} = \frac{x+3}{3x+5}$$

$$\text{Donc : } h(x) = \frac{x+3}{3x+5}$$

3) Les fonctions  $h$  et  $k$  ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3}; -1 \right\} \text{ et } D_k = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{5}{3} \right\}$$

**Exercice 39 :** exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

1)  $h_1(x) = \frac{1}{3x-1}$  2)  $h_2(x) = \sqrt{x+3}$

3)  $h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$

**Solution :** 1)  $h_1(x) = \frac{1}{3x-1}$  on a :  $h_1(x) = (g \circ f)(x)$

avec  $f(x) = 3x-1$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$

2)  $h_2(x) = \sqrt{x+3}$  on a :  $h_2(x) = (g \circ f)(x)$

avec  $f(x) = x+3$  et  $g(x) = \sqrt{x}$

3)  $h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$  on a :  $h_3(x) = (g \circ f)(x)$

avec  $f(x) = \sqrt{x}$  et  $g(x) = 3x+4$

**Exercice 40 :** Soit  $f$  la fonction  $f$  définie sur un intervalle  $[0; +\infty[$  tel que :  $f(x) = -5x^2 + 7$

Décomposer la fonction  $f$  en fonctions élémentaire et étudier les variations de  $f$

**Solution :**

$$v(x) = -5x + 7 \text{ et } u(x) = x^2$$

$$\text{La fonction } f = v \circ u$$

La fonction  $u$  est croissante sur  $[0; +\infty[$  et

$u(x) = x^2 \in [0; +\infty[$  et  $v$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$  Donc d'après le théorème des fonctions composées,  $f = v \circ u$  est décroissante sur  $[0; +\infty[$

**Exercice 41 :** Soit la fonction  $h$  définie sur  $]-\infty; 1]$  par  $h(x) = \sqrt{1-x}$

1) Décomposer  $h$  en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de  $h$ .

**Solution :** 1) La fonction  $h$  se décompose de cette façon  $h = g \circ f$

on a alors :  $f(x) = 1-x$  et  $g(x) = \sqrt{x}$

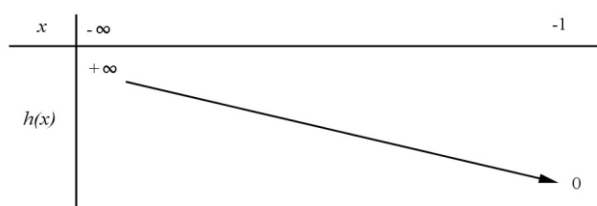
2) On sait que :

$$\Leftrightarrow f \text{ est décroissante sur } ]-\infty; 1]$$

$$\Leftrightarrow g \text{ est croissante sur } f(]-\infty; 1]) = [0; +\infty[$$

Donc La fonction  $h$  décroissante sur  $]-\infty; 1]$

On a alors le tableau de variation suivant



**Exercice 42 :** Montrer que la fonction

$f : x \rightarrow x - E(x)$  est périodique de période 1.

**Solution :**  $D_f = \mathbb{R}$

a)  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $x+1 \in \mathbb{R}$

b)  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a :

$$f(x+1) = x+1 - E(x+1) = x+1 - E(x) - 1 = f(x)$$

L'application  $f$  est donc périodique de période 1.

**Exercice 43 :** 1) Quelle est la période des fonctions suivantes :

a)  $f : x \rightarrow \sin(4x-1)$  b)  $g : x \rightarrow \cos(5x)$

2) Trouver une fonction de période  $T = \frac{3}{4}$

**Solution :** 1)a)  $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$  1)b)  $T = \frac{2\pi}{5}$

2) Une fonction est.  $h : x \rightarrow \cos(\frac{8\pi}{3}x)$

**Exercice 44 :** Soit  $f$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  et périodique de période  $T = 2$  tel que :  $f(x) = 2x - x^2 \quad \forall x \in [0; 2[$

1) Tracer la représentation graphique de la fonction sur  $[-2; 8]$  dans un repère  $(0; \vec{i}; \vec{j})$

2) calculer :  $f(4.1)$  ;  $f(-3.5)$  ;  $f(265.11)$

3) donner l'expression de :  $f(x) = 2x - x^2$  sur les intervalles :  $I_k = [2k; 2(k+1)[ \quad k \in \mathbb{Z}$

**Solution :** dans l'intervalle  $I_0 = [0; 2[$  on a  $f$  est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

On a  $a = -1$  et  $b = 2$  et  $c = 0$

$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

Donc  $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = 1$  et  $(f(1) = 2 - 1 = 1)$

Donc la courbe  $(C_f)$  c'est une portion parabole de sommet  $A(1; 1)$  et d'axe de symétrie la droite  $x = 1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur  $[-2; 8]$  il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur  $I_0 = [0; 2[$

et utiliser les translation  $2k\vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

2) calculer :

$$f(4.1) = f(2 + 2.1) = f(2.1) = f(2 + 0.1) = f(0.1)$$

$$f(4.1) = 2(0.1) - (0.1)^2 = 0.19$$

$$f(-3.5) = f(-4 + 0.5) = f(0.5)$$

$$f(-3.5) = 2(0.5) - (0.5)^2 = 0.75$$

$$f(265.11) = f(2 \times 132 + 1.11) = f(1.11)$$

$$f(1.11) = 2(1.11) - (1.11)^2 \approx 0.98$$

3) l'expression de :  $f(x) = 2x - x^2$  sur les

intervalles :  $I_k = [2k; 2(k+1)[ \quad k \in \mathbb{Z}$

$$x \in I_k = [2k; 2(k+1)[ \Leftrightarrow 2k \leq x < 2(k+1)$$

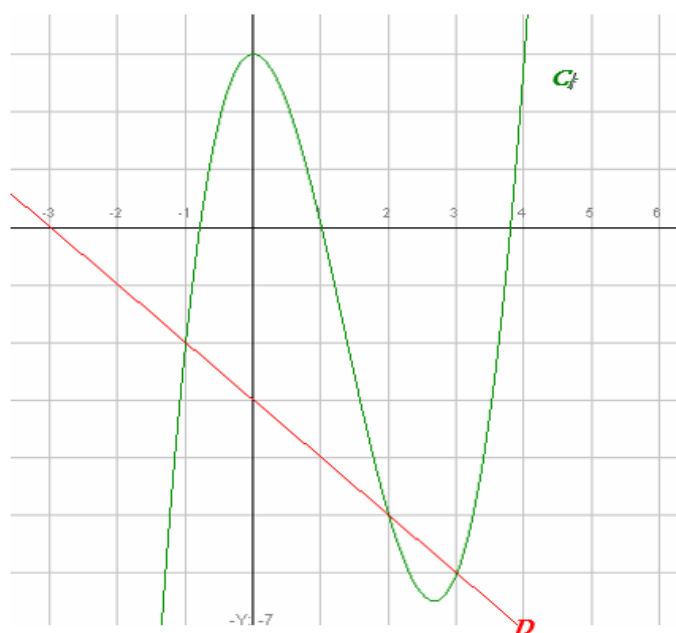
$$x \in I_k \Leftrightarrow 0 \leq x - 2k < 2 \Leftrightarrow f(x - 2k) = f(x)$$

$$x \in I_k \Leftrightarrow f(x) = 2(x - 2k) - (x - 2k)^2 \text{ avec}$$

$$k \leq \frac{x}{2} < k + 1 \text{ cad } k = E\left(\frac{x}{2}\right)$$

**Exercice 45 :** Soit la courbe  $(C_f)$  représentative de  $f$  telle que  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = -x - 3$

1- Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 3$



puis l'inéquation  $f(x) < 3$

2- Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = 0$

puis l'inéquation  $f(x) \geq 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = -x - 3$  puis l'inéquation  $f(x) \leq -x - 3$

**Réponses :** 1)  $f(x) = 3$  La solution est l'ensemble des antécédents de 3 :  $S = \{0; 4\}$

2-  $f(x) = 0$  La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :  $S = \{a; b\}$  Avec  $-1 < a < -0.5$  et  $3.5 < b < 4$

$$f(x) \geq 0 \quad S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$$

3-  $f(x) = -x - 3$  La solution l'ensemble des abscisses des points d'intersection de  $(C_f)$  et de  $D$  :  $y = -x - 3$  donc  $S = \{-1; 2; 3\}$

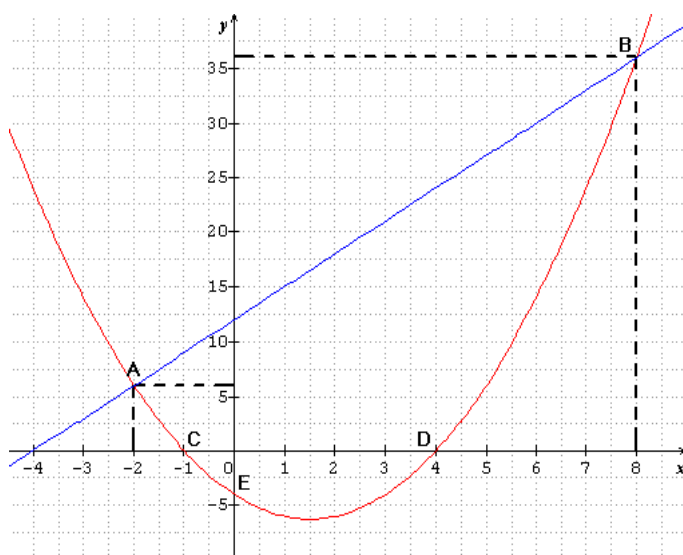
$$f(x) \leq -x - 3 \quad S = ]-\infty; -1] \cup [2; 3]$$

**Exercice 46 :** Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^2 - 3x - 4$  et

$$g(x) = 3x + 12$$

- 1) Tracer Les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$
- 2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation  $f(x) = g(x)$
- 3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$
- 4) Trouver les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec les axes du repère

**Réponses :** 1) Les courbes représentatives  $(C_f)$  (en rouge) et  $(C_g)$  (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



- 2) a) résolution graphique de l'équation  $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$

On a donc  $x = -2$  et  $x = 8$  donc  $S = \{-2; 8\}$

- b) résolution algébrique de l'équation  $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 3x + 12 \text{ ssi}$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -6 \text{ et } c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\text{donc } S = \{-2; 8\}$$

- 3) a) résolution graphique de l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$

La courbe  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  si

$$x \in ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$$

$$\text{Donc } S = ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$$

- b) résolution algébrique de l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$

$$f(x) \geq g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 \geq 3x + 12 \text{ ssi } x^2 - 6x - 16 \geq 0$$

$$\text{Les racines sont : } x_1 = 8 \text{ et } x_2 = -2$$

| $x$         | $-\infty$ | $-2$ | $8$ | $+\infty$ |     |
|-------------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x^2-6x-16$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |

$$\text{Donc } S = ]-\infty; -2[ \cup ]8; +\infty[$$

- 5) a) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -3 \text{ et } c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses sont :

$$C(-1; 0) \text{ et } D(4; 0)$$

- b) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a  $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$

donc le point d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des ordonnées est :  $E(-4;0)$

**Exercice 47 :** Soient  $f$  et  $g$  les deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x^2 - 2x + 3$  et

$g(x) = \frac{x-1}{x+2}$  et  $(C_f)$  et  $(C_g)$  Les courbes représentatives de  $f$  et  $g$

1) dresser le Tableau de variations de  $f$  et de  $g$

2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axes des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe  $(C_g)$  avec l' axes des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère

4) a) Résoudre graphiquement l'équation  $f(x) = g(x)$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$

**Réponses :** 1)a)  $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

on a  $f$  est une fonction polynôme donc  $D_f = \mathbb{R}$

On a  $a = -1$  et  $b = -2$  et  $c = 3$

$(f(x) = ax^2 + bx + c)$

Donc  $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1$  et  $(f(-1) = 4)$

Donc la courbe  $(C_f)$  c'est une parabole de sommet  $A(-1;4)$

et d'axe de symétrie la droite  $x = -1$

Donc le tableau de variations de  $f$

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           | 4    |           |

1)b)  $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$  on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x+2 \neq 0$

ssi  $x \neq -2$  Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 > 0$

$(C_g)$  est l'hyperbole de centre  $W(-2;1)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x = -2$  et  $y = 1$

Donc le tableau de variations de  $g$

|        |           |      |           |
|--------|-----------|------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-2$ | $+\infty$ |
| $g(x)$ |           |      |           |

2)a) Intersection de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation  $f(x) = 0$

$f(x) = 0$  ssi  $-x^2 - 2x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$

$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{2 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3$  et

$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = 1$  donc les points d'intersection

de la courbe  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3;0)$  et  $B(1;0)$

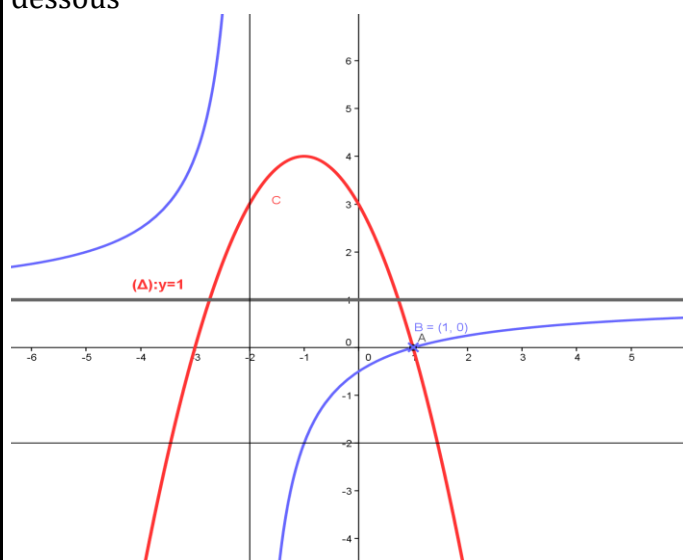
b) Intersection de la courbe  $(C_g)$  avec l'axe des abscisses

$g(x) = 0$  ssi  $\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

le point d'intersection de la courbe  $(C_g)$  avec l'axe des abscisses est :  $C(1;0)$

3) Représentation graphique

Les courbes représentatives  $(C_f)$  (en rouge) et  $(C_g)$  (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



4) a) résolution graphique de l'équation

$$f(x) = g(x)$$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$

On a donc  $x=1$  donc  $S = \{1\}$

4) b) résolution graphique de l'inéquation

$$f(x) \geq g(x)$$

La courbe  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  si  $x \in ]-2; 1]$

Donc  $S = ]-2; 1]$

**Exercice 48 :** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

1) Déterminer  $D_f$

2) Démontrer que  $f$  est minorée.

3) Démontrer que  $f$  est majorée par  $\frac{1}{2}$  Conclure

**Solution : 1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

2) soit  $x \in \mathbb{R}^+$  on a  $x + \sqrt{x} \geq x$

Donc :  $\sqrt{x+\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$  donc

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \geq 0$$

$f$  est donc minorée sur  $\mathbb{R}^+$  par  $m=0$

2) soit  $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})} \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)}$$

Si  $x \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$  donc  $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

donc  $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} > 1$  donc  $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 > 2$

donc  $\frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} < \frac{1}{2}$  donc  $f(x) < \frac{1}{2}$

et on a :  $f(0) = 0 < \frac{1}{2}$  donc  $\forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) < \frac{1}{2}$

par suite  $f$  est majorée par  $\frac{1}{2}$ .

conclusion :  $0 < f(x) < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

$f$  est donc bornée sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Exercice 49 :** Soit  $f$  une fonction numérique tq :

$$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$$

1) Démontrer que  $f$  admet une valeur minimale

3) Démontrer que  $f$  n'est pas majorée

**Solution : 1)**  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

soit  $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - 4$$

$$f(x) = (x + \sqrt{x})^2 - 4 \text{ donc}$$

$$f(x) + 4 = (x + \sqrt{x})^2 \geq 0$$

donc  $f(x) + 4 \geq 0$  donc  $f(x) \geq -4$

et on a :  $f(0) = -4$  donc  $f(x) \geq f(0)$

donc  $f(0) = -4$  est une valeur minimale de  $f$  au point  $x_0 = 0$

2) Montrons que  $f$  est non majorée.

Supposons  $f$  majorée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x + \sqrt{x})^2 - 4 \leq M$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x + \sqrt{x})^2 \leq M + 4$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} \leq \sqrt{M+4}$  (on peut toujours supposer  $M \geq 0$ )

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (\sqrt{x})^2 + 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M+4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} \leq \sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x \leq \left(\sqrt{\sqrt{M+4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ Absurde}$$

Donc  $f$  est non majorée

**Exercice 50 :** Soient  $f$  et  $g$  et  $h$  les trois fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2} \text{ et } g(x) = \frac{2x+3}{x-1} \text{ et}$$

$$h(x) = x^2 + 2$$

1) a) Étudier les variations de  $g$  et de  $h$

b) Étudier le signe de la fonction  $g$

2)montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3)Etudier les variations de  $f$  dans les intervalles :

$$]1; +\infty[ ; \left[-\frac{3}{2}; 1\right[ ; \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$$

**Réponses :** 1)a)  $g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

on a  $g(x) \in \mathbb{R}$  ssi  $x-1 \neq 0$  ssi  $x \neq 1$

Donc  $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$   $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0$

$(C_g)$  est l'hyperbole de centre  $W(1;2)$  et d'asymptotes les droites d'équations respectives  $x=1$  et  $y=2$

Donc le tableau de variations de  $g$

| $x$    | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $g(x)$ |           |     |           |

1) a) on a  $h$  est une fonction polynôme donc  $D_h = \mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de  $h$

| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $h(x)$ |           |     |           |

b) étudions le signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R} - \{1\}$

| $x$                | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|----------------|-----|-----------|
| $2x+3$             | -         | 0              | +   | +         |
| $x-1$              | -         | -              | 0   | +         |
| $\frac{2x+3}{x-1}$ | +         | 0              | -   | +         |

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

2)montrons que :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$$

$$(h \circ g)(x) = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 + 2 = \frac{4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)^2}$$

$$(h \circ g)(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2}$$

Donc  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3)Etude des variations de  $f$  dans les intervalles :

a) sur  $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$  :

On a  $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

Puisque  $g$  est décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$  et

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right] : g(x) \in [0; +\infty[$  et  $h$  est

croissante sur  $[0; +\infty[$  alors  $f = h \circ g$  est

décroissante sur  $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$

b) sur  $\left[-\frac{3}{2}; 1\right[$

Puisque  $g$  est décroissante sur  $\left[-\frac{3}{2}; 1\right[$  et

$\forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right[ : g(x) \in ]-\infty; 0]$  et  $h$  est

décroissante sur  $]-\infty; 0]$  alors  $f = h \circ g$  est

croissante sur  $\left[-\frac{3}{2}; 1\right[$

c) sur  $]1; +\infty[$  :

Puisque  $g$  est décroissante sur  $]1; +\infty[$  et

$\forall x \in ]1; +\infty[ : g(x) \in ]0; +\infty[$  et  $h$  est croissante

sur  $]0; +\infty[$  alors  $f = h \circ g$  est décroissante sur

$]1; +\infty[$

Donc le tableau de variations de  $f$  :

| $x$    | $-\infty$ | $-3/2$ | $1$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|--------|-----|-----------|
| $f(x)$ |           |        |     |           |

<http://xriadiat.e-monsite.com>

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »  
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

**Prof : Atmani najib**

