

L'ARITHMETIQUE

I) LA DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

1) Définition et conséquences

1.1 Diviseur d'un entier

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; on dit que l'entier relatif b divise a s'il existe un entier relatif k tel que $a = kb$; On écrit : $b|a$.

On dit que a est divisible par b

Exemples : $3 \nmid 12$ car $12 = 3 \times 4$ et $6 \nmid 42$

car $-42 = 7 \times (-6)$ et on a : 7 ne divise pas 16

Remarques :

- Si l'entier non nul b divise l'entier a alors $-b$ divise lui aussi.
- 1 divise tous les entiers relatifs
- 0 est divisible par tous les entiers non nuls : car $0 = 0 \times b$
- Si a est un entier les diviseurs de a constituent un ensemble fini noté D_a :

$$D_a = \{b \in \mathbb{Z} / b|a\}$$

Exemple :

$$D_{18} = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

$$\text{et } D_{18}^+ = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

Exercice01 : 1) Déterminer et dénombrer les diviseurs naturels de 156

2) Déterminer dans $\mathbb{Z}$ tous les diviseurs de -8

Solution01 : 1) 156 a 12 diviseurs :

1; 2; 3; 4; 6; 12; 13; 26; 39; 52; 78 et 156.

156 et 1 sont appelés diviseurs triviaux, les autres sont des diviseurs stricts.

$$2) D_{-8} = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$$

Propriété : $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$; $c \in \mathbb{Z}$

- $1/a$ et $-1/a$ et a/a et $a/-a$
- $b|a \Rightarrow |b| \leq |a|$
- $a/b \Rightarrow a/b \times c$
- $a/b \Rightarrow |a| \leq |b|$
- $b|1 \Rightarrow b \in \{-1, 1\}$

Déduction :

Si m et n sont deux entiers relatifs tels que : $mn = 1$ alors $|m| = 1$ et $|n| = 1$.

1.2 Multiple d'un entier.

Définition : On dit que a est un multiple de b si b est un diviseur de a

Remarque : Si b est un entier non nul,

les multiples de b constituent Un ensemble infini noté $b\mathbb{Z}$

$$b\mathbb{Z} = \{m \in \mathbb{Z} / m = kb \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple :

$$3\mathbb{Z} = \{\leftarrow \dots, -12, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \rightarrow\}$$

1.3 Diviseur commun, multiple commun de deux entiers

Définition : a) Si $b|m$ et $b|n$ on dit que b est un diviseur commun de m et n

b) Si $b|m$ et $b'|m$, on dit que m est un multiple commun de b et b' .

Exemples : 4 est un diviseur commun de 16 et 12

36 est un multiple commun de 9 et 12.

Propriété : Etant donnés des entiers relatifs non nuls. On a les propositions suivantes :

- $a|b$ et $b|a \Rightarrow |a| = |b|$
- $a|b$ et $c|d \Rightarrow ac|bd$
- $a|b$ et $b|c \Rightarrow a|c$
- $a|b \Rightarrow a|bc$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m+n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|m-n$
- $a|m$ et $a|n \Rightarrow a|\alpha m + \beta n$ où α et β sont des entiers relatifs quelconques.
- $a/b \Rightarrow a^n/b^n$ $n \in \mathbb{N}$

Exercice02 :

1) $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$

a) montrer que si $a/2b+c$ et $a/b+c$ alors a/c

b) montrer que si $a/2b+3c$ et $a/b+c$ alors a/c

c) montrer que si $a/x-y$ et $a/b-c$ alors $a/xb-cy$

2) $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et $a/12n+1$ et $a/-2n+3$

Montrer que $a/19$

3) $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ et d/n^2+3 et $d/2n-1$

Montrer que $d/13$

Solution02 : 1) a) $\begin{cases} a/2b+c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2(b+c)-(2b+c) \Rightarrow a/c$

1) b) $\begin{cases} a/2b+3c \\ a/b+c \end{cases} \Rightarrow a/2b+3c-2(b+c) \Rightarrow a/c$

$$1) c) \begin{cases} \frac{a}{x-y} \Rightarrow \frac{a}{bx-by} \text{ et } \frac{a}{by-cy} \Rightarrow \frac{a}{bx-cy} \\ \frac{a}{b-c} \end{cases}$$

$$2) \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-2n+3} \\ \Rightarrow \frac{a}{12n+1} \text{ et } \frac{a}{-12n+18} \Rightarrow \frac{a}{19} \\ \Rightarrow a \in \{\pm 1; \pm 19\}$$

$$3) d \in \mathbb{Z} \text{ et } a \in \mathbb{Z} \text{ et } \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{d}{2n-1} \\ \Rightarrow \frac{d}{n^2+3} \text{ et } \frac{a}{(2n-1)^2} \Rightarrow \frac{d}{4n^2+12} \text{ et } \frac{d}{4n^2-4n+1} \\ \Rightarrow \frac{d}{11+4n} \text{ et } \frac{d}{-2+4n} \Rightarrow \frac{d}{13}$$

Exercice03 : $a \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}$

Montrer que : $\begin{cases} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{29} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases}$

Solution03 : $\begin{cases} \frac{a}{5x-7} \Rightarrow \frac{a}{2(5x-7)-5(2x+3)} \\ \frac{a}{2x+3} \end{cases}$

$$\frac{a}{10x-14-10x-15} \Rightarrow \frac{a}{-29} \Rightarrow \frac{a}{29}$$

Exercice04 : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$:

3 divise $4^n - 1$ **Solution04 :**

Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$
1étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons
 $4^0 - 1 = 0$ est un multiple de 3

Donc P (0) est vraie.

2étapes : d'hérédité : Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : $\exists k \in \mathbb{N} / 4^n - 1 = 3k$ donc
 $4^n = 3k + 1$

3étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie. Montrons alors que :

$$\exists k' \in \mathbb{N} / 4^{n+1} - 1 = 3k' \quad ??$$

$$4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 \\ = 4 \times (3k + 1) - 1 = 12k + 4 - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1) \\ \text{avec } k' = 4k + 1 \text{ Donc P(n+1) est vraie.}$$

Conclusion. Par le principe de récurrence on a :
 $\forall n \in \mathbb{N}; 4^n - 1$ est divisible par 9

Exercice05 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$

Solution05 : $n + 2/3n + 1$ et $n + 2/n + 2$

$n + 2/3n + 1$ et $n + 2/3n + 6$ donc

$n + 2/(3n + 6) - (3n + 1)$ donc $n + 2/5$

Les diviseurs de 5 sont 1 ; -1 ; 5 ; -5 donc Il faut que $n + 2 \in \{-1; -5; 1; 5\}$ ce qui entraîne que
 $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$

On vérifie que que si $n \in \{-3; -7; -1; 3\}$ alors
 $n + 2/3n + 1$ avant de conclure.

Conclusion : les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles : $n + 2/3n + 1$ sont : -7 ; -3 ; -1 ; 3

Exercice 06 : Quelles sont les valeurs de l'entier relatif n pour lesquelles la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$

Représente un entier relatif ?

Solution06 : Cette fraction a un sens si : $n + 4 \neq 0$ soit $n \neq -4$

On constate que $3n + 8 = 3(n + 4) - 4$

$n + 4$ divise $3(n + 4)$, donc $n + 4$ divise $3n + 8$ si
 $n + 4$ divise -4.

Les diviseurs de -4 sont 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 4 ; -4.

Il faut que $n + 4 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$ ce qui entraîne que $n \in \{-8; -6; -5; -3; -2; 0\}$

On vérifie que -4 n'appartient pas à -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0 avant de conclure.

Conclusion : la fraction $\frac{3n+8}{n+4}$ représente un

entier relatif pour les valeurs de l'entier relatif n : -8 ; -6 ; -5 ; -3 ; -2 ; 0.

Exercice07 : Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les équations suivantes : a) $x^2 - y^2 = 32$ avec $x > y$
b) $2xy + 2x + y = 99$

Solution07 : a) $x^2 - y^2 = 32 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 32$
 $x - y$ et $x + y$ sont des diviseurs positif de 32
Et $(x - y) + (x + y) = 2x$ est u nombre pair

Donc $x - y$ et $x + y$ ont la même parité $32 = 2^5$

On dresse un tableau :

$x - y$	2	4
$x + y$	16	8
x	9	6
y	7	2

$$S = \{(6; 2); (9; 7)\}$$

b) $2xy + 2x + y = 99 \Leftrightarrow 2xy + y + 2x + 1 - 1 = 99$

$$\Leftrightarrow y(2x + 1) + 2x + 1 = 99 + 1 \Leftrightarrow (2x + 1)(y + 1) = 100$$

Donc : $2x + 1$ et $y + 1$ sont des diviseurs positif de 100
 $D_{100} = \{1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$

$2x + 1$	1	2	4	5	20	25	50	100
$y + 1$	100	50	25	20	5	4	2	1
x	0			2		12		
y	99			10		3		

$$S = \{(0; 99); (2; 19); (12; 3)\}$$

2) La division euclidienne

2.1 La division euclidienne dans $\mathbb{N}$.

Propriété : Considérons a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$; ils existent deux entiers naturels q et r tels que $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$

- L'entier a s'appelle : **Le divisé**
- L'entier b s'appelle : **Le diviseur**
- L'entier q s'appelle : **Le quotient**
- L'entier r s'appelle : **Le reste**

Remarque : Si r est le reste de la division euclidienne par b alors : $r \in \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Exemple1 :

la division euclidienne de 75 par 8 donne :

$$75 = 9 \times 8 + 3 \text{ car } 0 \leq 3 < 8$$

la division euclidienne de 126 par 7 donne :

$$126 = 18 \times 7 + 0 \text{ car } 0 \leq 0 < 7$$

la division euclidienne de 85 par 112

$$\text{donne : } 85 = 0 \times 112 + 85 \text{ car } 0 \leq 85 < 112$$

Exemple2 : Un entier naturel n peut s'écrire de l'une des façons suivantes

$$n = 5k \text{ ou } n = 5k + 1 \text{ ou } n = 5k + 2$$

$$\text{ou } n = 5k + 3 \text{ ou } n = 5k + 4 \text{ avec } k \in \mathbb{N}$$

Exercice 08 : déterminer le nombre entier naturel n Tel que le quotient de la division euclidienne de n par 25 est p et le reste est p^2 ($p \in \mathbb{N}$)

Solution08 : $n \in \mathbb{N} : n = 25p + p^2$ et $0 \leq p^2 < 25$
donc $0 \leq p < 5$

$$\text{Donc : } \begin{cases} p=0 \\ n=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=1 \\ n=26 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=2 \\ n=54 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=3 \\ n=84 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} p=4 \\ n=116 \end{cases}$$

$$\text{Donc : } n \in \{0; 26; 54; 84; 116\}$$

Exercice 09: n et a et b des entiers naturels
Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution09 : soit r le reste de la division euclidienne de n par a et r' le reste de la division euclidienne de q par b on a donc :

$$n = aq + r \text{ et } 0 \leq r \leq a-1 \text{ et on a : } q = bq' + r'$$

et $0 \leq r' \leq b-1$ donc on déduit que :

$$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b-1$ et $0 \leq r \leq a-1$ alors :

$$ar' + r \leq ab-1 \text{ donc } n = abq' + ar' + r$$

$0 \leq ar' + r \leq ab-1$ conclusion : q' est aussi le quotient de n par ab

2.2 La division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs tels que $b \neq 0$; ils existent un entiers relatif q et un entier naturel r

Tels que : $a = bq + r$ où $0 \leq r < |b|$

Exemple1 :1) la division euclidienne de 37 par -11 donne : $37 = (-11) \times (-3) + 4$ car $0 \leq 4 < 11$

2) la division euclidienne de -37 par 11

$$\text{donne : } -37 = 11 \times (-4) + 7 \text{ car } 0 \leq 7 < 11$$

3) la division euclidienne de -37 par -11

$$\text{donne : } -37 = (-11) \times 4 + 7 \text{ car } 0 \leq 7 < 11$$

Exercice10: $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$

si q est le quotient de la division euclidienne de $a-1$ par b déterminer le quotient de la division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

Solution10 : soit r le reste de la division euclidienne de $a-1$ par b donc :

$$a-1 = bq + r \text{ et } 0 \leq r < b$$

$$\text{Donc : } ab^9 - b^9 = b^{10}q + rb^9$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + rb^9 + b^9 - 1$$

$$\text{Donc : } ab^9 - 1 = b^{10}q + (r+1)b^9 - 1$$

On montre que : $0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$???

On a : $0 \leq r < b$ donc $0 \leq r+1 \leq b$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 \leq b^{10} \text{ donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 \leq b^{10} - 1$$

$$\text{donc } 0 \leq (r+1)b^9 - 1 < b^{10}$$

conclusion : q est aussi le quotient de la

division euclidienne de $ab^9 - 1$ par b^{10}

II) LES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Définitions : a) On dit que l'entier d est un diviseur effectif de l'entier relatif a

Si $d|a$ et $|d| \neq 1$ et $|d| \neq |a|$

b) On dit qu'un entier relatif non nul p est

premier s'il est différent de 1 et s'il n'admet pas de diviseurs effectifs.

Remarques :

- Un nombre premier p admet exactement deux diviseurs positifs 1 et $|p|$.
- Si p est un nombre premier positif alors p n'admet pas de diviseurs effectifs de même
 - p n'admet pas de diviseurs effectif d'où :
 - $-p$ est aussi premier ;
- Pour l'étude des nombres premiers on se contente d'étudier les nombres premiers positifs.

Propriété : Soit a un entier naturel non nul différent de 1 et non premier, le plus petit

diviseur de a différent de 1 est un nombre premier

Exemple1 : Les nombres -3 et -7 et 23 sont premiers.

2) Détermination d'un nombre premier

Propriété : Soit n un entier naturel non nul, différent de 1 et non premier, il existe un nombre premier p qui divise l'entier n et qui vérifie $p^2 \leq n$.

Remarque : Cette propriété nous permet de déterminer si un nombre est premier ou non.

Corolaire : Si un entier n n'est divisible par aucun entier premier p et qui vérifie $p^2 \leq n$ alors n est premier.

Exercice: 1) Les nombres suivants sont-ils premiers : 499 ; 601 ; 703 ; 2003 ; $2n^2 + 3n$ $n \in \mathbb{N}$

Théorème : L'ensemble des nombres premiers est infini.

III) PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN, PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN.

1) Plus grand diviseurs commun

1.1 Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre d est le **plus grand diviseur commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque d divise a et d divise b et qu'il n'y a pas d'autre plus grands diviseurs de ces deux nombres.

On note $d = PGDC(a, b) = a \wedge b$

Exemple :

$$-48 \wedge 36 = 12$$

Propriétés : 1) $a \wedge a = |a|$ 2) $1 \wedge a = 1$

$$3) (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

$$4) \text{ Si } b|a \text{ alors } a \wedge b = |b|$$

$$5) \text{ si } d|a \text{ et } d|b \text{ alors } d|(a \wedge b)$$

Exercice11 : montrer que $\forall a \in \mathbb{Z} \quad a \wedge (a+1) = 1$

Solution11 : on pose $d = a \wedge (a+1)$

$$\Rightarrow d/a \text{ et } d/(a+1) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

Exercice12 : $n \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A = n^2 + 3$ et $B = n + 2$

1) montrer que $A \wedge B = (n+2) \wedge 7$

2) déterminer l'entier naturel n tel que : $\frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N}$

Solution12 : 1) on pose $d = A \wedge B$ et $d' = (n+2) \wedge 7$

On a : $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d/A \text{ et } d/B \Rightarrow d/(n^2+3) \text{ et } d/(n+2)$$

$$\Rightarrow d/(n^2+3) \text{ et } d/(n+2) \text{ on utilisant la division euclidienne : on trouve : } n^2+3 = (n+2)(n-2)+7$$

$$n^2+3-(n+2)(n-2)=7$$

$$\Rightarrow d/(n^2+3-(n+2)(n-2))$$

$$\Rightarrow d/7 \text{ et } d/(n+2) \Rightarrow d/((n+2) \wedge 7) \Rightarrow d/d'$$

Inversement : On a : $d' = (n+2) \wedge 7$

$$\Rightarrow d'/(n+2) \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/((n+2)(n-2)) \text{ et } d'/7$$

$$\Rightarrow d'/((n+2)(n-2)+7) \text{ et } d'/7 \Rightarrow d'/(n^2+3) \text{ et } d'/7$$

$$\text{donc : } d'/A \wedge B \text{ donc } d'/d$$

$$\text{donc } d/d' \text{ et } d'/d \text{ et } d \in \mathbb{N} \text{ et } d' \in \mathbb{N} \text{ donc}$$

$$\text{donc } d = d' \text{ donc : } A \wedge B = (n+2) \wedge 7$$

$$2) \frac{n^2+3}{n+2} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{n+2}{n^2+3} \text{ et on a : } \frac{n+2}{n+2}$$

$$\text{Donc : } \frac{n+2}{A \wedge B} \text{ Donc : } \frac{n+2}{(n+2) \wedge 7}$$

Donc : $\frac{n+2}{7}$ or 7 est premier donc :

Il faut que $n+2 \in \{1; 7\}$ ce qui entraîne que $n=5$

Définition : On dit que deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si $a \wedge b = 1$.

Exemple : 21 et 10 sont premiers entre eux.

Exercice 13: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution13 : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

$$\text{On a : } \Delta_1/a \text{ et } \Delta_1/b \text{ donc } \Delta_1/a \text{ et } \Delta_1/bc \text{ donc}$$

$$\Delta_1/(a-bc) \text{ donc } \Delta_1/d$$

$$\text{donc } \Delta_1/d \text{ et } \Delta_1/b \text{ donc } \Delta_1/(b \wedge d) \text{ donc } \Delta_1/\Delta_2$$

$$\text{inversement On a : } \Delta_2/b \text{ et } \Delta_2/d \text{ donc } \Delta_2/d \text{ et}$$

$$\Delta_2/bc \text{ donc } \Delta_2/(bc+d) \text{ donc } \Delta_2/a$$

$$\text{donc } \Delta_2/a \text{ et } \Delta_2/b \text{ donc } \Delta_2/(a \wedge b) \text{ donc } \Delta_2/\Delta_1$$

$$\text{On a donc : } \Delta_1/\Delta_2 \text{ et } \Delta_2/\Delta_1 \text{ et } \Delta_1 \in \mathbb{N} \text{ et } \Delta_2 \in \mathbb{N}$$

$$\text{donc } \Delta_1 = \Delta_2$$

$$\text{donc : } a \wedge b = b \wedge d$$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice14 : $a \in \mathbb{N}$ On considère les deux nombres : $A=35a+57$ et $B=45a+76$ montrer que $A \wedge B=1$ ou $A \wedge B=19$

Solution14 : 1) on pose $d = A \wedge B$

$$\Rightarrow d \mid A \text{ et } d \mid B \Rightarrow d \mid 35a+57 \text{ et } d \mid 45a+76$$

$$\Rightarrow d \mid 9(35a+57) \text{ et } d \mid 7(45a+76)$$

$$\Rightarrow d \mid 315a+513 \text{ et } d \mid 315a+532$$

$$\Rightarrow d \mid 19 \text{ or } 19 \text{ est premier donc :}$$

Il faut que $d \in \{1;19\}$ ce qui entraîne que :

$$A \wedge B=1 \text{ ou } A \wedge B=19$$

1.2 L'algorithme d'Euclide.

Théorème : Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul on a : $a = bq + r$

Où $0 \leq r < b$ on a : $a \wedge b = b \wedge r$

L'algorithme d'Euclide.

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le plus grand diviseur commun de a et b est le dernier reste non nul dans les divisions euclidiennes successives.

Application :

1- Trouver le PGDC (362154, 82350).

2- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls

Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de $a \wedge b$.

On peut dire que : $D_a \cap D_b = D_{a \wedge b}$

Exercice : Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$1) n \wedge (n+1) = 1 \quad 2) n \wedge (2n+1) = 1$$

$$3) (2n+1) \wedge (3n+1) = 1$$

2) Le plus petit multiple commun.

Définition et propriété

Définition : On dit que le nombre entier naturel m est le **plus petit multiple commun** de deux entiers relatifs a et b lorsque

m est un multiple de a et de b et qu'il n'y a pas d'autre plus petit multiple non nuls de ces deux nombres. On note : $m = PPCM(a, b) = a \vee b$

Exemple : $-48 \wedge 36 = 144$

Propriétés :

$$1) a \vee a = |a| \quad 2) a \vee b = b \vee a$$

$$3) a \vee 1 = |a| \quad 4) \text{ Si } b \mid a \text{ alors } a \vee b = |a|$$

$$5) a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$6) a \mid (a \vee b) ; b \mid (a \vee b) \text{ et } (a \vee b) \mid ab$$

Propriété : Considérons a et b deux entiers relatifs. Si $a \vee b = m$ et M un multiple commun de a et b alors $m \mid M$.

Indications pour preuve :

Poser $M = qm + r$ on a : $a \mid m, a \mid M$ conclure.

De même pour b et si $r \neq 0$ aboutir à une contradiction.

IV) LA CONGRUENCE MODULO n

1) Définition et propriétés.

Activité : Quelle relation y a-t-il entre ces nombres -11, 15, 67, 28, 132 et 13.

Définition : Soient a et b deux entiers relatifs ; et n un entier naturel non nul. On dit que : a est congrue à b modulo n si $n \mid (b - a)$.

On écrit : $a \equiv b [n]$

Exemples : $122 \equiv 27 [5]$ $34 \equiv 13 [7]$

Propriété : Si $a \equiv b [n]$ alors a et b ont le même reste de la division euclidienne sur n

Propriété fondamentale :

1) $(\forall a \in \mathbb{Z})(a \equiv a [n])$ on dit que la relation de congruence est réflexive.

2) $(\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2)(a \equiv b [n] \Leftrightarrow b \equiv a [n])$: on dit que la relation de congruence est symétrique.

3) $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Z}^3)$

$(a \equiv b [n] \text{ et } b \equiv c [n]) \Rightarrow a \equiv c [n]$: on dit que la relation de congruence est transitive.

Définition : Puisque la relation est de congruence est réflexive, symétrique et transitive on dit que la relation de congruence est une **relation d'équivalence**

2) Compatibilité de la relation d'équivalence avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Propriété et définition : Soit n un entier naturel non nul. Si $a \equiv b [n]$ et $c \equiv d [n]$ alors :

1) $a + c \equiv b + d [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec l'addition dans $\mathbb{Z}$

2) $ac \equiv bd [n]$; On dit que la relation de congruence est compatible avec la multiplication dans $\mathbb{Z}$

Corolaire : Si $a \equiv b [n]$ alors pour tout k dans $\mathbb{N}$ on a : $a^k \equiv b^k [n]$

Remarque : La réciproque du corolaire n'est pas vraie : $2^4 \equiv 3^4 [5]$ mais $2 \not\equiv 3 [5]$

Exercice15 : $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$ Si 17 est le reste de la division euclidienne de a par 19

Et Si 15 est le reste de la division euclidienne de b par 19 Déterminer le reste de la division euclidienne des nombres suivants par 19 :

$$1) a+b \quad 2) a^2+b^2 \quad 3) 2a-5b$$

Solution15 : 1) On a : $a \equiv 17 [19]$ et $b \equiv 15 [19]$

$$\text{donc } a+b \equiv 17+15 [19] \Leftrightarrow a+b \equiv 13 [19]$$

Par suite : le reste dans la division du nombre $a+b$ Par 19 est : 13

a) montrer que $a \wedge b = b \wedge 7$
b) en déduire les valeurs possibles $a \wedge b = d$
c) montrer que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
d) en déduire les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$

Solution19 : 1) on pose $d = x \wedge y$ et $d' = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$
 $d = x \wedge y$ donc : $\Rightarrow d/x$ et $d/y \Rightarrow d/a$ et d/b
Car il divise toute combinaison de x et y
 $\Rightarrow d/a \wedge b \Rightarrow d/d'$
Inversement :
 $d' = a \wedge b \Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/9x+4y$ et $d'/2x+y$
 $\Rightarrow d'/(9x+4y) - 4(2x+y)$ et $d'/9(2x+y) - 2(9x+4y)$
 $\Rightarrow d'/x$ et $d'/y \Rightarrow d'/x \wedge y \Rightarrow d'/d$
ce qui entraîne : $d = d'$

2) $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = n^2 + 5n + 13$ et $b = n + 3$
a) montrons que $a \wedge b = b \wedge 7$?
la division euclidienne de $n^2 + 5n + 13$ par $n + 3$
donne : $n^2 + 5n + 13 = (n + 3)(n + 2) + 7$
Donc : $a = b(n + 2) + 7 \Leftrightarrow a - b(n + 2) = 7$
on pose $d' = b \wedge 7$ et $d = a \wedge b$
montrons que : $d = d'$
 $d = a \wedge b \Rightarrow d/a$ et $d/b \Rightarrow d/a - b(n + 2)$ et d/b
 $\Rightarrow d/7$ et $d/b \Rightarrow d/b \wedge 7 \Rightarrow d/d'$
 $d' = b \wedge 7 \Rightarrow d'/7$ et $d'/b \Rightarrow d'/b(n + 2) + 7$ et d'/b
 $\Rightarrow d'/a$ et $d'/b \Rightarrow d'/a \wedge b \Rightarrow d'/d$
ce qui entraîne : $d = d'$

b) les valeurs possibles $a \wedge b = d$??
on a : $a \wedge b = b \wedge 7 = d$
donc : $d/7$ donc : $d = 1$ ou $d = 7$

c) montrons que : $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow a \wedge b = 7$
 $n \equiv 4[7] \Leftrightarrow n + 3 \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7/n+3 \Leftrightarrow 7/b \Leftrightarrow b \wedge 7 = 7 \Leftrightarrow b \wedge a = 7$

d) les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que : $a \wedge b = 1$??
 $a \wedge b = 1 \Leftrightarrow n$ n'est pas congrue a 0 modulo 4
 $n \equiv 0[7]$ ou $n \equiv 1[7]$ ou $n \equiv 2[7]$ ou $n \equiv 3[7]$ ou $n \equiv 5[7]$
ou $n \equiv 6[7]$

3) Les classes d'équivalences.

3.1 Définition et propriété :

Activité : Déterminer l'ensemble des entiers relatifs qui admettent 2 pour reste de la division par 7.

Définition : Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble des entiers relatifs qui ont le même reste r de la division euclidienne par n s'appelle

la classe d'équivalence de r et se note : $\bar{r} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv r [n]\} = \{nk + r \text{ où } k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple : Pour $n = 7$ les restes possibles sont les éléments de l'ensemble : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Donc on peut définir les classes d'équivalences suivantes :

$$\bar{0} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 0 [7]\}$$

$$\bar{1} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 1 [7]\} \text{ et } \dots$$

$$\bar{6} = \{m \in \mathbb{Z} / m \equiv 6 [7]\}$$

on remarque que $\bar{0} = \bar{7}$

Les classes d'équivalences modulo 7 constituent : un ensemble noté :

$$\mathbb{Z} / 7\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}; \bar{5}; \bar{6}\}$$

$$\text{Généralisation : } \mathbb{Z} / n\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \dots; \overline{n-1}\}$$

3.2 Les opérations sur $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$

Définition : Soit n un entier naturel non nul.

On définit dans $\mathbb{Z} / n\mathbb{Z}$ les deux lois :

1) **L'addition :** On pose $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

2) **La multiplication :** On pose : $\bar{a} \times \bar{b} = \overline{a \times b}$

Exemple : Dans $\mathbb{Z} / 6\mathbb{Z}$: $\bar{3} \times \bar{4} = \bar{0}$ et $\bar{5} + \bar{4} = \bar{3}$

Exercice20: Résoudre les équations

suivantes dans $\mathbb{Z} / 4\mathbb{Z}$: 1) $\bar{2}x = \bar{3}$ 2) $x^2 + \bar{3}x = \bar{0}$

3) $\bar{2013}x^3 + \bar{2}x = \bar{k}$

Solution20 : On a : $\mathbb{Z} / 4\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}\}$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que

Cette équation n'admet pas de solutions

Donc : $S = \emptyset$

1) On Dresse une table comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$x^2 + \bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Et en utilisant cette une table on déduit que :

$\bar{0}$ et $\bar{1}$ sont solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{0}; \bar{1}\}$

$$2) \overline{2013}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow \overline{1}x^3 + \overline{2}x = \overline{k} \Leftrightarrow x^3 + \overline{2}x = \overline{k}$$

$$\text{Car : } 2013 = 503 \times 4 + 1$$

On Dresse une table comme suite :

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
x^3	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$x^3 + \overline{2}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$$\text{Si } \overline{k} = \overline{0} : S = \{\overline{0}; \overline{2}\} \quad \text{Si } \overline{k} = \overline{1} : S = \{\overline{3}\}$$

$$\text{Si } \overline{k} = \overline{2} : S = \emptyset \quad \text{Si } \overline{k} = \overline{3} : S = \{\overline{1}\}$$

Exercice21 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ l'équations

$$\text{suivants : } x + \overline{3}y = \overline{1}$$

Solution21 : on Dresse une table des opérations

de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}; \overline{1}; \overline{2}; \overline{3}; \overline{4}\}$ Comme suite

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$

$$S = \{(\overline{0}; \overline{2}); (\overline{1}; \overline{0}); (\overline{2}; \overline{3}); (\overline{3}; \overline{1}); (\overline{4}; \overline{3}); (\overline{4}; \overline{4})\}$$

Exercice22 : Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ les

$$\text{système suivants : } \begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$$

Solution22 :

$$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{2}y = \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\overline{3} + \overline{2})x + (\overline{2} + \overline{4})y = \overline{3} + \overline{1} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \overline{4} \\ \overline{2}x + \overline{4}y = \overline{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \overline{1} \\ y = \overline{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\overline{1}; \overline{4})\}$$

Exercice : 1) Dresser les tables des opérations de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

2) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations :

$$\text{a) } \overline{2}x - \overline{1} = \overline{0} \quad \text{b) } \overline{4}x + \overline{1} = x + \overline{3}$$

$$\text{c) } \overline{5}x^2 + \overline{3}x + \overline{1} = \overline{0}$$

Propriété : Si p est **premier** alors dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a :

$$(\overline{a} \times \overline{b} = \overline{0}) \Leftrightarrow \overline{a} = \overline{0} \text{ ou } \overline{b} = \overline{0}$$

Preuve : Après la décomposition.

IV) DECOMPOSITION D'UN ENTIER EN FACTEURS DES NOMBRES PREMIERS

1) Définition et propriétés

Activité : Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre : 24816

Théorème :

a) Chaque entier **naturel** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers comme suite :

$$m = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

b) Chaque entier **relatif** m non nul s'écrit d'une façon unique comme le produit des facteurs premiers

comme suite :

$$m = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

Propriété 1: Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

un entier d non nul divise l'entier a si et seulement si d à une décomposition de la forme

$$d = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \dots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k} \delta n \text{ où}$$

$$(\forall i \in [1, n]) (0 \leq \beta_i \leq \alpha_i)$$

δn un diviseur de a le nombre des valeurs possibles de δi est $\alpha_i + 1$

On en déduit que :

Propriété 2 :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

est un entier, le nombre des diviseurs de a

$$\text{est : } 2(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$$

Exercice :

1- Décomposer le nombre 2975 en facteurs des nombres premiers

2- Déterminer le nombre des diviseurs de 2975.

3- Déterminer tous les diviseurs positifs de 2975.

Propriété 3 : Soit a un entier relatif dont la décomposition est de la forme :

$$a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_n^{\alpha_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k}$$

un entier m est un multiple de a si et seulement

$$\text{si } m = \varepsilon p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times p_3^{\beta_3} \times \dots \times p_n^{\beta_n} = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$$

où $(\forall i \in [1, n])(\alpha_i \leq \beta_i)$

2) Application de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers naturels

1) Le plus grand entier n qui vérifie :

$$n \leq a \text{ et } n \leq b \text{ est } \inf(a, b)$$

2) Le plus petit entier n qui vérifie :

$$n \geq a \text{ et } n \geq b \text{ est } \sup(a, b)$$

Exemple : $a = 7$ et $b = 10$

Le plus grand des entiers n tel que :

$$n \leq 7 \text{ et } n \leq 10 \text{ est : } 7 = \inf(10, 7)$$

Le plus petit des entiers n tel que :

$$n \geq 7 \text{ et } n \geq 10 \text{ est } 10 = \sup(10, 7)$$

2.1 Le P.G.C.D de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k} = 1$ et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; le P. G. D. C (a, b) est l'entier

$$a \wedge b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\inf(\alpha_k; \beta_k)}$$

Remarque : Soient a et b deux entiers relatifs

$$\text{on a : } a \wedge b = |a| \wedge |b|$$

Exemple : Déterminer : $(-5664) \wedge (-984)$ et

$$324 \wedge (-144)$$

Exercice :

1- Décomposer les nombres 362154 et 82350 en produit des facteurs premiers

2- Déterminer le P.G.C.D de 362154 et 82350

3- Déterminer tous les diviseurs communs de 362154 et 82350

2.2 Le P.P.C.M de deux nombres.

Soient $a = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\alpha_k} = 1$ et $b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\beta_k}$ deux entiers ; le ppmc (a, b) est l'entier

$$a \vee b = \prod_{k=1}^{k=n} p_k^{\sup(\alpha_k; \beta_k)}$$

Exemple : déterminer : $d = (-8316) \wedge 1080$ et

$$m = 8316 \vee 1080$$

Solution : la décomposition des nombres 8316 et 1080 en produit des facteurs premiers

$$\text{Donnent : } 8316 = 2^2 \times 3^3 \times 7 \times 11 \text{ et}$$

$$1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$d = 8316 \wedge 1080 = 2^2 \times 3^3 = 108 \text{ et}$$

$$m = 8316 \vee 1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11 = 11880$$

2.3 Applications de la décomposition.

Propriété : Soient a et b deux entiers relatifs non nuls, on a les assertions suivantes :

$$1) (a \wedge b) \times (a \vee b) = |ab|$$

$$2) ca \vee cb = c(a \vee b)$$

$$3) ca \wedge cb = c(a \wedge b)$$

Exemple : si $2 = a \wedge b$ et $-12 = a \times b$

déterminer : $a \vee b$

Solution : on a $a \wedge b \times (a \vee b) = |ab|$

$$\text{donc : } a \vee b = |a \times b| / a \wedge b = |-12| / 2 = 6$$

Exercice23: $a = (25^n - 1)(36^n - 1)$ et $b = (5^n - 1)(6^n - 1)$

Calculer les $a \vee b$ ($n \in \mathbb{N}$)

Solution23 :

$$a = ((5^n)^2 - 1)((6^n)^2 - 1) = (5^n - 1)(5^n + 1)(6^n - 1)(6^n + 1)$$

$$a = b(5^n + 1)(6^n + 1) \text{ donc : } \frac{b}{a} \text{ donc : } a \vee b = a$$

V) Exercices avec solutions

Exercice24: n et a et b des entiers naturels

Démontrer que si q est le quotient de la division euclidienne de n par a et q' est le quotient de q

par b Alors q' est aussi le quotient de n par ab

Solution : soit r le reste de la division

euclidienne de n par a et r' le reste de la

division euclidienne de q par b on a donc :

$$n = aq + r \text{ et } 0 \leq r \leq a - 1 \text{ et on a : } q = bq' + r' \text{ et}$$

$$0 \leq r' \leq b - 1 \text{ donc on déduit que :}$$

$$n = a(bq' + r') + r = abq' + ar' + r$$

Et puisque : $0 \leq r' \leq b - 1$ et $0 \leq r \leq a - 1$ alors :

$$ar' + r \leq ab - 1 \text{ donc } n = abq' + ar' + r$$

$$0 \leq ar' + r \leq b - 1 \text{ conclusion : } q' \text{ est aussi le}$$

quotient de n par ab

Exercice25: Déterminer le reste de la division

euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Solution25 : on a $19 \equiv 5[7]$ donc $19^2 \equiv 4[7]$

$$\text{donc : } 19^4 \equiv 2[7] \text{ donc } 19^{52} \equiv 2^{13}[7]$$

$$\text{Et on a } 23 \equiv 2[7] \text{ donc } 23^{41} \equiv 2^{41}[7] \text{ donc}$$

$$23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{13} \times 2^{41}[7]$$

$$\text{donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 2^{54}[7] \text{ donc}$$

$$23^{41} \times 19^{52} \equiv (2^3)^{18}[7] \text{ donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 8^{18}[7]$$

$$\text{et puisque : } 8 \equiv 1[7] \text{ donc } 23^{41} \times 19^{52} \equiv 1[7]$$

conclusion : 1 est le reste de la division

euclidienne de $19^{52} \times 23^{41}$ par 7

Exercice26: $n \in \mathbb{N}$ on pose $U_n = 4^n - 3n - 1$

1) montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$ divise $4^n - 3n - 1$

Solution26 : 1) on a $U_{n+1} = 4^{n+1} - 3(n+1) - 1$

donc $U_{n+1} = 4 \times 4^n - 3n - 3 - 1$

et puisque : $U_n = 4^n - 3n - 1$ donc :

$4^n = U_n + 3n + 1$ donc : $U_{n+1} = 4U_n + 9n$

2) notons P(n) La proposition suivante : « 9

divise U_n » . Nous allons démontrer par

récurrence que P(n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1 étapes : l'initialisation : Pour $n=0$ nous avons

$U_0 = 4^0 - 3 \times 0 - 1 = 0$ donc 9 divise 0 .

Donc P (0) est vraie.

2 étapes : d'hérédité ou Hypothèse de récurrence

: Supposons que P(n) soit vraie c'est-à-dire : « 9 divise U_n »

3 étapes : Nous allons montrer que P(n+1) est vraie.

Montrons alors que : « 9 divise U_{n+1} » ??

c'est-à-dire Montrons que $U_{n+1} \equiv 0[9]$??

On a d'après l'hypothèse de récurrence: « 9

divise U_n » donc $U_n \equiv 0[9]$ donc $4U_n \equiv 0[9]$

Et on a : $9n_n \equiv 0[9]$ donc $U_n + 9n_n \equiv 0[9]$ donc

$U_{n+1} \equiv 0[9]$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 9$ divise $4^n - 3n - 1$

Exercice27: 1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation:

$$\bar{4}x - \bar{3} = \bar{0}$$

2) Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ le système suivant :

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation: $x^2 - x - \bar{2} = \bar{0}$

Solution27 : 1) on Dresse une table des

opérations de $\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{4}x$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{4}x - \bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ est la seul solution de l'équation

Donc : $S = \{\bar{2}\}$..

$$2): \begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\bar{3} + \bar{2})x + (\bar{2} + \bar{4})y = \bar{3} + \bar{1} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \bar{4} \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \bar{1} \\ y = \bar{4} \end{cases} \text{ donc } S = \{(\bar{1}; \bar{4})\}$$

3) on Dresse une table des opérations de

$$\mathbb{Z} / 5\mathbb{Z} = \{\bar{0}; \bar{1}; \bar{2}; \bar{3}; \bar{4}\}$$

Comme suite :

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
x^2	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$x^2 - x - \bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

Et on utilisons cette une table on déduit que $\bar{2}$ et $\bar{4}$ sont les solutions de l'équation

Donc : $S = \{\bar{2}; \bar{4}\}$

Exercice28: $n \in \mathbb{Z}$ on pose $\alpha_n = n^4 - n^2 + 16$

1) montrer que $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paires

2) En déduire que α_n n'est pas un nombre premier

Solution28 : 1) soit $n \in \mathbb{Z}$

$$n^2 - 3n + 4 \equiv n^2 - n[2] \text{ donc}$$

$$n^2 - 3n + 4 \equiv n(n-1)[2]$$

Or $n(n-1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

$$\text{donc } n(n-1) \equiv 0[2] \text{ donc } n^2 - 3n + 4 \equiv 0[2]$$

donc $n^2 - 3n + 4$ est un nombre paire

$$\text{et on a : } n^2 + 3n + 4 \equiv n^2 + n[2] \text{ donc}$$

$$n^2 + 3n + 4 \equiv n(n+1)[2]$$

Or $n(n+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc paire

$$\text{donc } n(n+1) \equiv 0[2] \text{ donc } n^2 + 3n + 4 \equiv 0[2]$$

donc $n^2 + 3n + 4$ est un nombre paire

2)

$$\alpha_n = n^4 - n^2 + 16 = (n^2 + 4)^2 - 9n^2 = (n^2 - 3n + 4)(n^2 + 3n + 4)$$

Et puisque $n^2 - 3n + 4$ et $n^2 + 3n + 4$ sont des nombres paire

$$\text{alors : } n^2 - 3n + 4 \neq 1 \text{ et } n^2 + 3n + 4 \neq 1$$

donc α_n n'est pas un nombre premier

Exercice29: $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$ tels que : $a = bc + d$

1) montrer que $a \wedge b = b \wedge d$

2) En déduire que : $a \wedge b = b \wedge (a - bc)$

Solution29 : 1) on pose $\Delta_1 = a \wedge b$ et $\Delta_2 = b \wedge d$

On a : Δ_1/a et Δ_1/b donc Δ_1/a et Δ_1/bc donc

$\Delta_1/a - bc$ donc Δ_1/d

donc Δ_1/d et Δ_1/b donc $\Delta_1/b \wedge d$ donc Δ_1/Δ_2

inversement On a : Δ_2/b et Δ_2/d donc Δ_2/d et

Δ_2/bc donc $\Delta_2/bc + d$ donc Δ_2/a

donc Δ_2/a et Δ_2/b donc $\Delta_2/a \wedge b$ donc Δ_2/Δ_1

On a donc : Δ_1/Δ_2 et Δ_2/Δ_1 et $\Delta_1 \in \mathbb{N}$ et $\Delta_2 \in \mathbb{N}$

donc $\Delta_1 = \Delta_2$

donc : $a \wedge b = b \wedge d$

2) on a : $a = bc + (a - bc)$ si on prend : $d = a - bc$ et d'après 1) on aura : $a \wedge b = b \wedge d = b \wedge (a - bc)$

Exercice30: $a \in \mathbb{N}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ et $a \geq 3$ et a est impair On pose : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

1) a) montrer que $2^{ab} \equiv 1[d]$

b) montrer que $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) En déduire que : $d \in \{1; 2\}$

3) montrer que $d = 1$

Solution31 : 1) a) montrons que $2^{ab} \equiv 1[d]$

On a : $d = (2^a - 1) \wedge (2^b + 1)$

Donc il existent : $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et $\beta \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$2^a - 1 = d\alpha$ et $2^b + 1 = d\beta$ donc :

$2^{ab} = (2^a)^b = (d\alpha + 1)^b$

Et on a : $d\alpha + 1 \equiv 1[d]$ Donc $(d\alpha + 1)^b \equiv 1[d]$

Par suite : $2^{ab} \equiv 1[d]$

1) a) montrons que $2^{ab} \equiv -1[d]$

On a : $2^{ab} = (2^b)^a = (d\beta - 1)^a$

Et on a : $d\beta - 1 \equiv -1[d]$ Donc $(d\beta - 1)^a \equiv (-1)^a[d]$

et puisque a est impair on a $(d\beta - 1)^a \equiv -1[d]$

Par suite : $2^{ab} \equiv -1[d]$

2) $d \in \{1; 2\}$???

on a : $2^{ab} \equiv 1[d]$ et $2^{ab} \equiv -1[d]$ donc $0 \equiv 2[d]$

donc $d/2$ et on a $d \in \mathbb{N}^*$ donc $d \in \{1; 2\}$

3) montrons que $d = 1$

On a : $2^a - 1$ et $2^b - 1$ sont impairs donc d est impair

Et puisque $d \in \{1; 2\}$ donc $d = 1$

Exercice32 :

1) a) montrer que : $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k; r) \in \mathbb{N}^2$

b) Déterminer et discuter suivants les valeurs de l'entier naturel n le reste de la division par 5 du nombres 2^n

2) montrer que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3) montrer que $\frac{5}{1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006}}$

Solution33 : 1) a) on a : $2^4 \equiv 1[5]$ donc

$(2^4)^k \equiv 1^k [5]$ donc $2^{4k} \equiv 1[5]$ donc $2^{4k} \times 2^r \equiv 2^r [5]$

Donc $2^{4k+r} \equiv 2^r [5] \forall (k; r) \in \mathbb{N}^2$

b) $2^n \equiv r[5]$ et $r \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$

Si $n \in \mathbb{N}$ alors : $n = 4k + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$

donc : $2^{4k} \equiv 1[5]$ et $2^{4k+1} \equiv 2[5]$ et $2^{4k+2} \equiv 4[5]$

et $2^{4k+3} \equiv 3[5]$

2) montrons que $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^* ?$

on a : $17 \equiv 2[5]$ donc : $17^{4p+2} \equiv 2^{4p+2} [5]$

$32^{4p+3} \equiv -2^{4p+3} [5]$ $17^{4p+2} \equiv 4[5]$

on a : $32 \equiv 2[5]$ donc : $32^{4p+3} \equiv 2^{4p+3} [5]$

donc : $32^{4p+3} \equiv 3[5]$ donc $32^{4p+3} \equiv 2[5]$

donc $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 4 + 3 + 3[5]$

donc $17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3 \equiv 0[5]$

donc $\frac{5}{17^{4p+2} + 32^{4p+3} + 3} \forall p \in \mathbb{N}^*$

3)

on a : $1 \equiv 1[5]$ et $2 \equiv 2[5]$ et $3 \equiv -2[5]$ et $4 \equiv -1[5]$

donc : $1^{2006} \equiv 1^{2006} [5]$ et $2^{2006} \equiv 2^{2006} [5]$ et

$3^{2006} \equiv (-2)^{2006} [5]$ et $4^{2006} \equiv (-1)^{2006} [5]$

donc ; $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2 \times 2^{2006} [5]$

$1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 2^{2007} [5]$

Or : $2007 = 4 \times 501 + 3$ donc : $2^{2007} \equiv 3[5]$

Donc : $1^{2006} + 2^{2006} + 3^{2006} + 4^{2006} \equiv 2 + 3[5] \equiv 0[5]$

Exercice34 : déterminer le chiffre des unités

des nombres suivants : 1) $2019^{2020^{2021}}$ 2) $1987^{1991^{1983}}$

Solution34 :1) on a : $2019 \equiv -1[10]$ donc

$$2019^{2020^{2021}} \equiv (-1)^{2020^{2021}} [10] \text{ et puisque } 2020^{2021}$$

$$\text{Est paire donc : } 2019^{2020^{2021}} \equiv 1[10]$$

le chiffre des unités est 1

$$2) \text{ on a : } 1987 \equiv 7[10] \text{ donc } 1987^2 \equiv 9[10]$$

$$\text{Et } 1987^3 \equiv 3[10] \text{ et } 1987^4 \equiv 1[10]$$

$$\text{Donc : } 1987^{4k} \equiv 1[10] \text{ et } 1987^{4k+1} \equiv 7[10] \text{ et}$$

$$1987^{4k+2} \equiv 9[10] \text{ et } 1987^{4k+3} \equiv 3[10]$$

$$1991^{1983} \equiv ?[4]$$

$$1991 \equiv 3[4] \text{ et } 1991^2 \equiv 1[4]$$

$$\text{on a : } 1983 \equiv 1[2] \text{ donc : } 1991^{1983} \equiv 3[4]$$

$$\text{donc : } 1987^{1991^{1983}} \equiv 3[10]$$

Le chiffre des unités est 3

Exercice35 : soit $N = \overline{dcba}$ un entier naturel

montrer que : $N \equiv a - b + c - d [11]$

Solution35 : on a :

$$N = \overline{dcba} = a + b \times 10 + c \times 10^2 + d \times 10^3$$

$$\text{et on a : } 10 \equiv -1[11] \text{ et } 10^2 \equiv 1[11] \text{ et } 10^3 \equiv -1[11]$$

$$\text{Donc : } N \equiv a - b + c - d [11]$$

Exercice36 :

1) En utilisant l'algorithme d'Euclide calculer :

$$67 \wedge 39$$

2) en déduire deux nombres relatifs u et v tel

$$\text{que : } 39u + 67v = 1$$

Solution36 :1)

$$(1) 67 = 1 \times 39 + 28 \quad (2) 39 = 1 \times 28 + 11$$

$$(3) 28 = 2 \times 11 + 6 \quad (4) 11 = 1 \times 6 + 5$$

$$(5) 6 = 1 \times 5 + 1 \quad (6) 5 = 1 \times 5 + 0$$

Donc : $67 \wedge 39 = 1$ c'est le dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide

$$2) (5) 6 = 1 \times 5 + 1 \Rightarrow 6 - 1 \times 5 = 1$$

$$\Rightarrow 6 - 1 \times (11 - 1 \times 6) = 1 \Rightarrow 2 \times 6 - 1 \times 11 = 1$$

$$\Rightarrow 2 \times (28 - 2 \times 11) - 1 \times 11 = 1 \Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times 11 = 1$$

$$\Rightarrow 2 \times 28 - 5 \times (39 - 1 \times 28) = 1 \Rightarrow 7 \times 28 - 5 \times 39 = 1$$

$$\Rightarrow 7 \times (67 - 1 \times 39) - 5 \times 39 = 1 \Rightarrow 7 \times 67 - 12 \times 39 = 1$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

