I. Définition – Applications – Cas particuliers:

1) Définition :

- $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs nuls.

  Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est le nombre réel noté $\vec{U}.\vec{V}$ tel que:

$$\vec{U}\,.\,\vec{V} = \|\vec{U}\| \times \|\vec{V}\| \times \cos\alpha$$

  avec $\|\vec{U}\|$ est la norme de $\vec{U}$ et $\|\vec{V}\|$ la norme de $\vec{V}$ et $\alpha = (\widehat{\vec{U},\vec{V}})$

- Si l'un des vecteurs $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul, alors leur produit scalaire est nul ،c à d $\vec{U}.\vec{V} = 0$.

2) Applications:

a) Application 1 :

Calculer dans chacun des cas : $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC}$

a) $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{4}$; $AC = 3$; $AB = 2$

b) $\widehat{BAC} = \frac{3\pi}{4}$; $AC = 2$; $AB = 5$

c) $\widehat{BAC} = \frac{5\pi}{6}$; $AC = 4\sqrt{3}$; $AB = 3$

d) $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$; $AC = 4$; $AB = 5$

a) Application 2 :

Soient les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ avec $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$. Calculer $\cos\theta$ dans chacun des cas suivants:

a) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = -18$; $AC = 4\sqrt{3}$; $AB = 3$

b) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = -5\sqrt{2}$; $AC = 2$; $AB = 5$

c) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = 3\sqrt{2}$; $AC = 3$; $AB = 2$

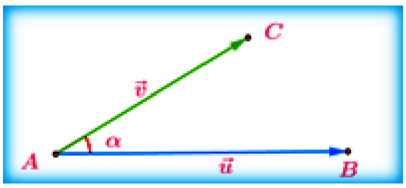
d) $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = -20$; $AC = 5$; $AB = 4$

3) Cas particuliers :

$0 < \alpha < \pi/2$

$\cos\alpha > 0$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} > 0$



Si $\alpha = 0$ Alors $\cos\alpha = 1$, d'où :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC$$

Si $\alpha = \pi$ Alors $\cos\alpha = -1$, d'où :

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC$$

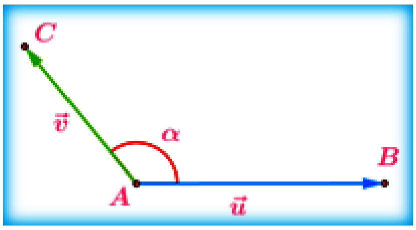
Si $\alpha = \pi/2$ Alors $\cos\alpha = 0$, d'où :

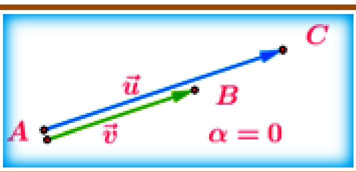
$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0$$

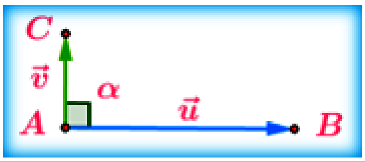
$\pi/2 < \alpha < \pi$

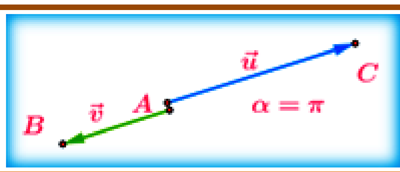
$\cos\alpha < 0$

$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} < 0$









4) Proppriété :

$\vec{U}$ و $\vec{V}$ deux vcteurs non nuls .

On a : $\vec{U}\,.\,\vec{V} = 0$ équivalent à $\vec{U} \perp \vec{V}$

II. Propriétés:

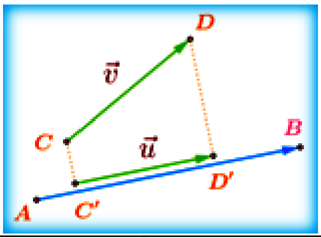
1) Propriétés de base :

Quels que soient les vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ et les nombres réels x et y et z .

- $\vec{U}^2 = \vec{U}.\vec{U} = \|\vec{U}\|^2$ ou $\|\vec{U}\| = \sqrt{\vec{U}^2}$
- $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$
- $(x.\vec{U}).\vec{V} = \vec{U}.(x.\vec{V}) = x.(\vec{U}.\vec{V})$
- $(\vec{U} + \vec{V}).\vec{W} = \vec{U}.\vec{W} + \vec{V}.\vec{W}$

Si $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{CD}$ et C' et D' sont respectivement les projections orthogonales respectifs des points C et D sur la droite (AB) ، alors :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$



Preuve:

On a:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D}$

Or $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CC'}$ و $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{D'D}$ فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = 0$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{D'D} = 0$

D'où : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

3) Théorème d'ALKACHY :

Quels que soient les points A , B et C on :a

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \qquad \text{(Théorème d'Alkachy)}$$

Preuve:

On a:

$BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AB^2$

D'où : $BC^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

4) Théorème de la médiane :

Quels que soient les points A , B et C , si est le milieu I du sgment $[BC]$, alors :

$$AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2 \qquad \text{(Théorème de la médiae)}$$

Preuve:

D'une part, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, d'où : $(1): AB^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2 = BC^2$

D'autre part, I étant le milieu de $[BC]$ donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ d'où :

$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = (2\overrightarrow{AI})^2 = 4AI^2$ d'où : $(2): AB^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + AC^2 = 4AI^2$

En faisant la somme membre à membre de relations (1) et (2) : $2AB^2 + 2AC^2 = BC^2 + 4AI^2$

D'où la relation : $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$ (théorème de la médiane)

III. Analytique du Produit Scalaire:

Dans tout ce qui suit, le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminants et vecteurs colinéaires :

Définition : $\vec{U}(a,b)$ et $\vec{V}(c,d)$ $\det(\vec{U},\vec{V})$ أو $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ tel que : $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

théorème: ✓ Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe un réel α tel que : $\vec{V} = \alpha.\vec{U}$. ✓ Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{U},\vec{V}) = 0$.

2) Analytique du produit scalaire :

On considère les vecteurs $\vec{U}(a,b)$ et $\vec{V}(a',b')$.

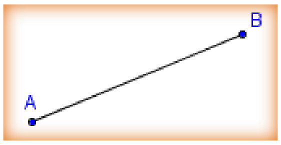
Définiton	Le produit scalaire des vecteurs $\vec{U}(a,b)$ et $\vec{V}(a',b')$ est le nombre réel $\vec{U}.\vec{V}$ tel que: $$\vec{U}.\vec{V} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$$ Le produit scalaire $\vec{U}.\vec{V}$ est un nombre algébrique.
Remarques	$$\vec{U}.\vec{V} = \lVert\vec{U}\rVert \times \lVert\vec{V}\rVert \times \cos(\widehat{\vec{U},\vec{V}})$$ $$\lVert\vec{U}\rVert = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$ $$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$
Propriété	$\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{U}.\vec{V} = 0$

3) Calcul des distances :

Distance entre les points A et B

$A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$

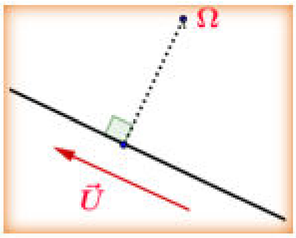
$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$



Distance entre le point Ω et la Droite (D)

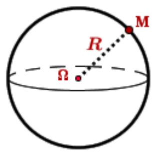
$\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et $(\Delta) : ax + by + c = 0$

$$d(\Omega,(\Delta)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



4) Equation du cercle :

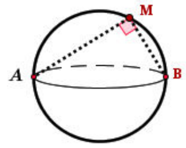
Equation du cercle défini par un centre et un rayon



Soit (C) le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon R

$$M(x,y)\in(S) \Leftrightarrow \Omega M = R \Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2 = R^2$$

Equation du cercle défini par un diamètre



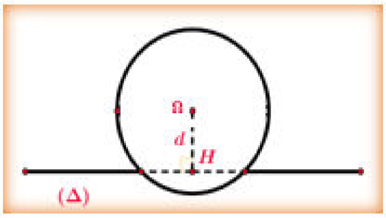
Soit (C) le cercle de diamètre $[AB]$

$$M(x,y,z)\in(S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$$

5) Position Relative d'un Cercle et d'une droite :

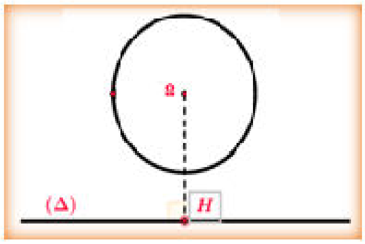
(C) est un cercle de centre Ω et de rayon R et (Δ) est une droite du plan.

H est la projection orthogonale Ω de sur (Δ) et d est la distance entre Ω et (Δ).



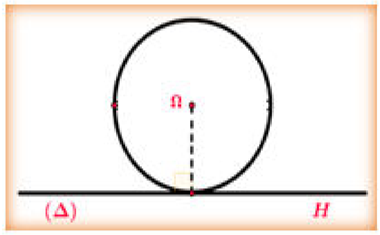
d<R

La droite coupe le cercle en deux points



d>R

Dans ce cas la droite ne coupe pas le cercle.



d=R

Dans ce cas le cercle est tangent à la droite en H