

EXERCICE1:

Soit la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 2 ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{1}{16}U_n + \frac{15}{16}$$

- 1) a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 < U_n$
 b) Vérifier que : $U_{n+1} - U_n = -\frac{15}{16}(U_n - 1)$, puis démontrer que (U_n) est strictement décroissante.

EXERCICE2:

Soit la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 2 ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{3+U_n}{5-U_n}$$

- 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} - 3 = \frac{4(U_n - 3)}{2 + (3 - U_n)}$.

Puis montrer : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n < 3$

- 2) Soit la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{U_n - 1}{3 - U_n}$.

EXERCICE3:

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 4 ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 3$$

- 1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n < 5$

- 2) Vérifier que $U_{n+1} - U_n = \frac{3}{5}(5 - U_n)$

En déduire que (U_n) est strictement croissante.

EXERCICE4:

Soit la suite numérique (U_n) définie par :

$$U_0 = 17 ; (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 12$$

- 1) a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 16 < U_n$.
 b) Montrer que (U_n) est strictement décroissante, en déduire que (U_n) est convergente.

On considère la suite (V_n) telle que :

- 2) On considère la suite (V_n) telle que: $V_n = U_n - 1$
 a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{16}$ et donner V_n en fonction de n .

- b) Montrer que $U_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. En déduire que $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- b) Montrer que $U_n = \frac{1+3V_n}{1+V_n}$, puis calculer U_n en fonction de n .

- c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

- 3) Soit la suite (V_n) telle que : $V_n = 5 - U_n$

- a) Montrer que (V_n) est géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et donner V_n en fonction de n .

- b) Montrer que $U_n = 5 - \left(\frac{2}{5}\right)^n$ pour tout entier n .

$V_n = U_n - 16$, pour tout entier naturel n .

- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique et préciser sa raison et son premier terme.

- b) En déduire $U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout entier n .